УДК 511.2

P-НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ю.И. Волков , О.Ю. Волкова

Дається визначення спеціального перетворення довільних послідовностей невід'ємних цілих чисел, які містять у собі тільки скінченне число ненульових елементів. Доводится, що за допомогою скінченного числа таких перетворень довільну послідовність можна привести до деякого канонічного виду (можна нормалізувати). Цей результат застосовується для побудови систем числення з ірраціональними основами, зокрема, одим із наслідків є теорема Бергмана про систему числення основа якої є золота пропрція.

We define a spezial transformation of arbitrary sequences nonnegative integers with only finitely many non-zero elements. We prove that any sequence can be reduced to a normalized form using a finite number of such transformations. This result can be useful for construction systems of numeration with irrational bases. In particular, Bergman theorem about a system of numeration with base golden ratio is a corollary of our result.

Пусть дана произвольная двусторонняя последовательность неотрицательных целых чисел, которая содержит только конечное число ненулевых элементов:

(1) $$\cdots,0,0,a_n,\cdots,a_1,a_0,a_{-1},\cdots,a_{-k},0,0,\cdots$$

Будем изменять члены этой последовательности при помощи двух преобразований. Пусть

(2) $$p_m \ge p_{m-1} \ge \cdots \ge p_1 \ge \cdots \ge p_0 > 0$$

натуральные числа и пусть $k \in Z$.

Определение 1. *P-преобразованием первого типа называется замена подпоследовательности (ПП)*

(3) $$\{a_{k-1},a_k,\cdots,a_{k+m}\}$$

на ПП

(4) $$\{a_{k-1}+1,a_k-p_m,\cdots,a_{k+m}-p_0\}.$$

P-преобразованием второго типа называется замена ПП

(5) $$\{a_{k-1},a_k,\cdots,a_{k+m+1}\}$$

на ПП

(6) $$\{a_{k-1}+1,a_k-p_m-1,a_{k+1}+p_m-p_{m-1},\cdots,a_{k+m}+p_1-p_0,a_{k+m+1}+p_0\}.$$

P-преобразования, которые не порождают отрицательных членов, называются допустимыми.

Заметим, что каждое преобразование первого типа уменьшает сумму членов последовательности на $p_m+p_{m-1}+\cdots+p_0-1$ единиц, а преобразование второго типа сумму членов последовательности не меняет.

Определение 2. *ПП (3) с неотрицательными членами называется нормализованной 1-го типа, если хотя бы одно из чисел* $a_k - p_m, \cdots, a_{k+m} - p_0$ *отрицательное, ПП (5) с неотрицательными членами называется нормализованной 2-го типа, если* $a_k - p_m - 1 < 0$.

Определение 3. *Последовательность (1) называется Р-нормализованной, если для всякого* $k \in Z$ *подпоследовательности (3) и (5) являются нормализованными, соответственно, 1-го или 2-го типов.*

Теорема 1. *Произвольную последовательность с конечным числом неотрицательных целых чисел за конечное число Р-преобразований первого и второго типов можно нормализовать.*

Доказательство. Сначала над нашей последовательностью выполним все допустимые преобразования первого типа, их может быть только конечное число, ибо эти преобразования уменьшают сумму членов последовательности. Кроме того, преобразования первого типа не порождают новые ПП, которые находятся левее и к которым можно применять преобразования второго типа.

Дальше будем просматривать члены преобразованной последовательности слева направо до тех пор пока не встретим ПП к которой можно применить преобразование второго типа.

Выполним это преобразование. Если полученная ПП ненормализованная, то выполним (если это возможно) преобразование первого типа.

В результате такой процедуры *k*–ый член последовательности уменьшится, а следовательно, через конечное число шагов ненормализованная ПП на месте ПП (3) исчезнет, но может появиться ненормализованная ПП справа и к этой ПП можно будет применить преобразование второго типа.

Поскольку ненулевых членов последовательности (1) имеется конечное число, то в результате конечного числа преобразований второго типа исчезнут все ненормализованные ПП.

Теорема 2. *Пусть* $A(x)$ *произвольный многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и* $p_m \geq p_{m-1} \geq \cdots \geq p_1 \geq \cdots \geq p_0 > 0$ *натуральные числа. Тогда существуют такие натуральное* r *и многочлен* $C(x)$ *с коэффициентами из множества* $\{0,1,2,\cdots,p_m\}$, *что многочлен* $C(x) - x^r A(x)$ *делится на многочлен*

$$x^{m+1} - p_m x^m - p_{m-1} x^{m-1} - \cdots - p_1 x - p_0 .$$

Доказательство. Пусть $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Поставим этому многочлену в соответствие последовательность его коэффициентов $\cdots,0,0,a_n,\cdots,a_1,a_0,\cdots$. Р-преобразованиям первого типа отвечает прибавление к многочлену $A(x)$ выражений вида $(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0)x^s, s \in Z$,

а Р-преобразованиям второго типа отвечает прибавление к многочлену $A(x)$ выражений вида

$$(x^{m+2} - (p_m + 1)x^{m+1} + (p_m - p_{m-1})x^m + \cdots + (p_1 - p_0)x + p_0)x^s =$$
$$(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0)(x-1)x^s, s \in Z.$$

Следовательно, алгоритму нормализации последовательности (2) будет отвечать прибавление к многочлену $A(x)$ разнообразных выражений этих видов, сумму которых можно записать так: $R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0)x^s$, где $R(x)$ многочлен относительно x^{-1} . В результате прибавлений мы получим многочлен $A(x) + R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0)$ относительно x^{-1} с коэффициентами из множества $\{0,1,2,\cdots,p_m\}$. Если обозначить минимальный показатель x в выражении $R(x)$ через $(-r)$, то многочлен

$$(7)\ C(x) = A(x)x^r + R(x)(x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0)x^r,$$

будет искомым.

Следствие 1. *Пусть N произвольное натуральное число, а λ какой-нибудь нуль (не об'язательно действительный) многочлена*

$$x^{m+1} - p_mx^m - p_{m-1}x^{m-1} - \cdots - p_1x - p_0.$$

Тогда существует такая линейная комбинация различных целых степеней числа λ с коэффициентами из множества $\{0,1,2,\cdots,p_m\}$, что ее значение равно N, а последовательность коэффициентов этой линейной комбинации будет Р-нормализованной.

Действительно, возьмем в качестве многочлена $A(x)$ число N и положим в соотношении (7) $x=\lambda$, в результате получим требуемый результат.

Пример 1. *Пусть $m = 0, p_0 > 0$. Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных целых степеней числа p_0, то-есть, в этом случае алгоритм нормализации превращается в алгоритм получения кода числа N в система счисления с основаним p_0.*

Пример 2. *Пусть $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398877498\cdots$ золотая пропрция. Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных непоследовательных целых степеней числа φ.*

Действительно, золотая пропорция корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, положим $m = 1, p_1 = p_0 = 1$ и воспользуемся следствием 1.

Впервые этот результат был получен в 1957 году Бергманом [1] и послужил мотивом для построения бинарной системы счисления с иррациональным основанием φ. Коды чисел в такой системе называются кодами золотой пропорции. Более детально с такой системой счисления можно познакомиться в [2].

Пример 3. *Пусть λ какой-нибудь корень уравнения $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Тогда произвольное натуральное число можно представить в виде конечной линейной комбинации различных целых степеней числа λ.*

Действительно, положим $m = 2, p_2 = p_1 = p_0 = 1$ и воспользуемся следствием 1. Взяв корень

$$\lambda = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} = 1{,}83928675521416113 26\cdots$$

за основание системы счисления, получим бинарную систему счисления. Приведем небольшую таблицу кодов натуральных чисел в такой системе.

число	код	число	код
2	10.001	16	10101.001000011
3	11.001	17	10110.010001011
4	100.100011	18	11000.010001011
5	101.100011	19	11001.010001011
6	110.101011	20	11010.011001011
7	1000.101011	30	101010.110010000011
8	1001.101011	40	1000001.001101010011
9	1010.110100011	50	1001101.10010110110101
10	1100.010100011	60	1100000.001010110110011
11	1101.010100011	70	1101100.100011010110011
12	10000.100000011	80	10001010.101000110010011
13	10001.100000011	90	10011001.000101010010011
14	10010.101000011	100	10101001.011010011010011
15	10100.001000011		

Эти коды дают также примеры числовых тождеств, например,

$$7 = \lambda^3 + \lambda^{-1} + \lambda^{-3} + \lambda^{-5} + \lambda^{-6}.$$

Следствие 2. *Пусть последовательность $\{v_k\}$ задана при помощи рекуррентного соотношения*

$v_{k+m+1} = p_m v_{k+m} + p_{m-1} v_{k+m-1} + \cdots + p_1 v_{k+1} + p_0 v_k, k \in Z, v_0 = 1,$

$v_1, \cdots v_m$ *– произвольные. Тогда произвольное натуральное число N можно представить в виде*

$$N = \sum_{k=-r}^{l} n_k v_k, n_k \in \{0,1,2,\cdots p_m\}.$$

В самом деле, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ корни уравнения

$x^{m+1} - p_m x^m - p_{m-1} x^{m-1} - \cdots - p_1 x - p_0 = 0,$ то $v_k = C_1 \lambda_1^{\ k} + C_2 \lambda_{\ 2}^{\ k} + C_{m+1} \lambda_{m+1}^k$, где $C_1, C_2, \cdots, C_{m+1}$ такие постоянные, что $C_1 + C_2 + \cdots + C_{m+1} = 1$, и тогда, в силу следствия 1

$$N = \sum_{k=-r}^{l} n_k \lambda_1^k, \cdots, N = \sum_{k=-r}^{l} n_k \lambda_{m+1}^k,$$

поэтому

$$(C_1 + \cdots C_{m+1})N = N = \sum_{k=-r}^{l} n_k (C_1 \lambda_{11}^{\ k} + C_2 \lambda_{12}^{\ k} + C_{m+1} \lambda_{m+1}^k) = \sum_{k=-r}^{l} n_k v_{_k}.$$

В связи с понятием P-преобразования появляется задача о количестве $t(N)$ операций для нормализации произвольного натурального числа N. Так, если m=0 , то поятно, что $t(N)=[N/p_0]$, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{1}{p_0}.$$

В случае m=1 мы полагаем, что имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{p_1}{p_1^2 - (p_0 - 1)^2}(1 + \frac{1}{\lambda}),$$

в частности, если $p_0=p_1=1$, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{N} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Bergman G. A number system with an irrational base//Mathematics magazine. – 1957. – №31. – P.98119.
2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 154с.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Інститут математики НАН України

Надійшло 10 січня 2006 р.