

УДК 519.213

## РОЗПОДІЛИ ФІБОНАЧЧІ

Ю.І. Волков

Изучается семейство арифметических распределений, которые являются обобщениями биномиального распределения. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии. Кроме того, найдены наиболее вероятные значения соответствующей случайной величины.

The family of arithmetical distributions, which the binomial distribution are a generalization, is studied. For the expectation and variance the asymptotic formulas are determine. Thereto, the most probable number of corresponding random variable are found.

Проводиться  $n$  незалежних випробувань Бернуллі з імовірністю успіху  $p$ . Ймовірність  $p_k$  того, що при такому експерименті отримаємо рівно  $k$  успіхів за умови, що за кожним успіхом слідує принаймні  $m$  ( $m \geq 0$ ) невдач можна знайти за формулою:

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k (p/q)^k}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i (p/q)^i}, \quad k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)], p+q=1. \quad (1)$$

Якщо  $m=0$ , то це звичайний біноміальний розподіл з параметрами  $(n, p)$ .

Розподіли, які визначаються за допомогою співвідношення (1), частинні випадки арифметичних  $(a, b, m, n)$ -розподілів.

**Означення.** Випадкова величина  $\xi$  має розподіл Фібоначчі з параметрами  $(a, b, m, n)$ , якщо вона приймає значення  $k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)]$  з ймовірностями

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k b^k a^{n-(m+1)k}}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i}}, \quad (2)$$

$a, b$  довільні додатні числа,  $m, n$  – натуральні.

Якщо в (2) покласти  $a=1, b=p/q$ , то отримаємо (1), а у випадку  $m=1, a=b=1$ , отримаємо розподіл, який вивчав П.Філіппоні, [1].

Метою даної роботи є дослідження розподілів Фібоначчі, як то: дослідити поведінку  $M\xi$  при  $n \rightarrow \infty$ , дослідити поведінку  $D\xi$  при  $n \rightarrow \infty$ , знати найбільш ймовірне значення випадкової величини  $\xi$ .

**Лема 1.** Числа

$$u_n(a, b) := \sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i} \quad (3)$$

задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1} = a u_{n+m} + b u_n, \quad u_0=1, u_1=a, \dots, u_m=a^m. \quad (4)$$

Співвідношення (4) впливає з такої тотожності:

$$C_{n+m-mi}^i + C_{n+m-mi}^{i-1} = C_{n+m-mi+1}^i.$$

Далі використовуватимемо характеристичне рівняння для рекурентного співвідношення (4):

$$z^{m+1} = az^m + b \quad (5)$$

**Лема 2.** Рівняння (5) має єдиний додатний корень  $a < \lambda < a+2$ . Всі інші корені цього рівняння  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  по модулю строго менші, ніж  $\lambda$ .

*Доведення.* На проміжку  $[a, \infty]$  функція  $f(z) := z^{m+1} - az^m - b$  строго монотонно зростає ( $f'(z) = (m+1)z^m - maz^{m-1} = z^{m-1}((m+1)z - ma) > 0$ ), в точці  $a$   $f(a) = -b < 0$ , а для досить великих  $z$   $f(z) > 0$ , тому існує єдине  $\lambda$ , де  $f(\lambda) = 0$ .

Далі перепишемо рівняння (5) так:

$$w^{m+1} - \frac{a}{\lambda} w^m = \frac{b}{\lambda^{m+1}}, \text{ де } w = z/\lambda. \text{ Звідси } |w|^m \left| w - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}}. \text{ Припустимо, що існує}$$

корінь  $w_0 \neq 1$  і  $|w_0| \geq 1$ . Тоді  $|w_0|^m \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}} \geq \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| > 1 - \frac{a}{\lambda}$ , але  $\frac{b}{\lambda^{m+1}} = 1 - \frac{a}{\lambda}$ ,

бо  $\lambda$  корінь рівняння (5), прийшли до протиріччя. Отже,  $|w_0| < 1 \Leftrightarrow |z_0| < \lambda$ ,  $z_0$  любий корінь рівняння (5), який не дорівнює  $\lambda$ .

**Лема 3.** Має місце рівність:

$$u_n(a, b) = C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n, \quad (6)$$

де сталі  $C, C_1, \dots, C_m$  знаходяться з початкових умов рекурентного співвідношення (4).

Рівність (6) випливає з того, що рекурентне співвідношення (4) – лінійне однорідне з постійними коефіцієнтами.

$$\text{Неважко показати, що, наприклад, } \ln C = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}.$$

Для знаходження математичного сподівання і дисперсії досліджуваного розподілу скористаємось генератрисою розподілу. Позначимо її через  $P(z)$ ,

$$P(z) = \frac{u_n(a, bz)}{u_n(a, b)}, M\xi = P'(1), D\xi = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2. \quad (7)$$

Для знаходження відповідних похідних спочатку знайдемо похідні по  $z$  від функцій  $u_n(a, bz)$ . Ці функції задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1}(a, bz) = au_{n+m}(a, bz) + bu_n(a, bz), u_0 = 1, u_1 = a, \dots, u_m = a^m. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння для цього рекурентного співвідношення

$$w^{m+1} = aw^m + bz. \quad (9)$$

Нехай  $\lambda(z), \lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)$  розв'язки рівняння (9). Тоді

$$\lambda(1) = \lambda, \lambda_1(1) = \lambda_1, \dots, \lambda_m(1) = \lambda_m \quad (10)$$

$$u_n(a, bz) = C(z)(\lambda(z))^n + C_1(z)(\lambda_1(z))^n + \dots + C_m(z)(\lambda_m(z))^n, \quad (11)$$

функції  $C(z)$ ,  $C_1(z), \dots, C_m(z)$  можна знайти з початкових умов (8), а  $C(1)=C$ ,  $C_1(1)=C_1, \dots, C_m(1)=C_m$ . Наприклад,  $\ln C(z) = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k(z)}{\lambda(z) - \lambda_k(z)}$ .

Будемо користуватись позначеннями:  $C' = C'(1)$ ,  $C_1' = C_1'(1)$ , ...,  $C_m' = C_m'(1)$  і аналогічними позначеннями для других похідних.

**Теорема 1.** *Мають місце асимптотичні рівності:*

$$M\xi = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}} n + C_M + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$D\xi = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3} n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де сталі  $C_M$  і  $C_D$  можна виразити через корені рівняння (5) (див. далі).

*Доведення.* Спочатку знайдемо похідні по  $z$  від розв'язків рівняння (9), користуючись цим рівнянням, отримаємо

$$\lambda'(z) = \frac{b\lambda(z)}{(\lambda(z))^{m+1} + mbz}, \quad \left( \frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' = - \frac{b(mb + (m+1)(\lambda(z))^m \lambda'(z))}{((\lambda(z))^{m+1} + mbz)^2}.$$

Звідси

$$\lambda' := \lambda'(1) = \frac{b\lambda}{\lambda^{m+1} + mb}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{\lambda''(1)}{\lambda} - \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = - \frac{b^2((2m+1)\lambda^{m+1} + m^2b)}{(\lambda^{m+1} + mb)^3}. \quad (15)$$

$$\lambda'' := \lambda''(z) \Big|_{z=1} = \frac{b^2 \lambda m (b(1-m) - 2\lambda^{m+1})}{(\lambda^{m+1} + mb)^3} \quad (16)$$

Аналогічні формули мають місце і для функцій  $\lambda_k(z)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ .

Користуючись (11), знаходимо

$$P'(1) = \frac{C\lambda^n + C\lambda^{n-1}\lambda'n + C_1'\lambda_1^n + C_1\lambda_1^{n-1}\lambda_1' \dots + C_m'\lambda_m^n + C\lambda_m^{n-1}\lambda_m'n}{C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n} = \frac{C'}{C} + \frac{\lambda'}{\lambda} n + o(1), \quad (17)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , бо  $\left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, k=1, 2, \dots, m$  за лемою 2.

Якщо скористатись (14), то матимемо

$$M\xi = \frac{C'}{C} + \frac{b}{\lambda^{m+1} + mb} n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

що доводить співвідношення (12) теореми.

З виразу для  $\ln C(z)$  випливає

$$C_M := \frac{C'}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a} - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_k - \lambda}, \quad (19)$$

а за формулами (14) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Подібно до попереднього, знайдемо

$$P''(1) = \frac{C''}{C} + \frac{2C'}{C} \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} n + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 n(n-1) + n \frac{\lambda''}{\lambda} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Якщо скористатись (7), (14), (15) і (17), то

$$D\xi = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)'\right)n + o(1) = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(\lambda^{m+1} + mb)^3}n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

що доводить співвідношення (13) теореми.

З виразу для  $\ln C(z)$  випливає

$$C_D := \left(\frac{C'}{C}\right)' = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k''}{\lambda_k - a} - \left(\frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a}\right)^2 - \frac{\lambda_k'' - \lambda''}{\lambda_k - \lambda} + \left(\frac{\lambda_k' - \lambda'}{\lambda_k - \lambda}\right)^2, \quad (21)$$

а за формулами (14) і (16) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

**Наслідок 1.** *Мають місце співвідношення:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}}, \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3}. \quad (23)$$

Якщо в співвідношенні (22) взяти  $m=1$ ,  $a=b=1$ , то отримуємо результат Філіппоні [1, Theorem 4, P.338].

**Наслідок 2.** *Нехай розподіл випадкової величини задається співвідношеннями (1). Тоді*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{p}{mp + q\lambda^{m+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{pq^2\lambda^{2m+1}}{(mp + q\lambda^{m+1})^3},$$

де  $\lambda$  додатний корінь рівняння  $q\lambda^{m+1} = q\lambda^m + p$ .

**Наслідок 3.** *Нехай  $m=1$ . Тоді*

$$M\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b}}\right)n + C_M + o(1), \quad D\xi = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + 4b)^3}}n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty,$$

де

$$C_M = \frac{a(a - \sqrt{a^2 + 4b})}{2(a^2 + 4b)}, \quad C_D = \frac{a((a^2 + 6b)\sqrt{a^2 + 4b} - a^3 - 8ab)}{2(a^2 + 4b)^2}.$$

Зокрема, якщо  $a=b=1$ , то

$$M\xi = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}n + \frac{1 - \sqrt{5}}{10} + o(1), \quad D\xi = \frac{\sqrt{5}}{25}n + \frac{\sqrt{5} - 2}{25} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Для знаходження найбільш ймовірного значення випадкової величини  $\xi$  можна діяти подібно тому, як це робиться у випадку біноміального

розподілу, тобто, потрібно розв'язати нерівність  $\frac{P_{k+1}}{P_k} \geq 1$  відносно  $k$ .

Обмежимося випадком  $m=1$ .

**Теорема 2.** Нехай

$$\mu := \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) - \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)}. \quad (24)$$

Тоді найбільш ймовірними значеннями випадкової величини  $\xi$  будуть числа  $[\mu]$  (ціла частина числа  $\mu$ ), якщо  $\mu$  неціле, і  $\mu$  та  $\mu+1$ , якщо  $\mu$  ціле.

Доведення. 
$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{C_{n-k-1}^{k+1} a^{n-2(k+1)} b^{k+1}}{C_{n-k}^k a^{n-2k} b^k} \geq 1, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow$$

$$k^2(a^2 + 4b) - k(n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b)) + bn^2 - n(a^2 + b) \geq 0, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Відповідний квадратний тричлен має такі корені:

$$k_{1,2} = \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) \pm \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)},$$
 а звідси впливає результат

теорема, бо  $k_1 > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

Якщо параметри  $a$  та  $b$  натуральні, то можна займатись пошуками таких  $n$ , для яких  $\mu$  ціле. У випадку  $a=b=1$  відомо:  $\mu$  ціле тоді і тільки тоді, коли  $n=F_{4s}$ ,  $s=1,2,\dots$ ,  $F_r$  –  $r$ -те число Фібоначчі [1, Theorem 6, P.340]. У випадку довільних натуральних  $a$  та  $b$  потрібно розв'язувати рівняння :

$$x^2 = Ay^2 + 4b^2, \quad A = a^2(a^2 + 4b). \quad (25)$$

Розглянемо випадки.

1). Якщо  $A$  повний квадрат, то шукаємо розв'язки серед піфагорових трійок.

2). Нехай  $A$  не є повним квадратом і  $b=1$ . Тоді рівняння (25) рівносильне рівнянню Пелля  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2(a^2 + 4)\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1$ , найменший розв'язок якого  $(a^2+2, 1)$ , а тому (див., наприклад, [2]) можна отримати нескінченну множину розв'язків  $(x_s, y_s)$  рівняння (25) за формулами

$$x_s = 2^{-s} ((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s + (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s),$$

$$y_s = \frac{2^{-s}}{a\sqrt{a^2 + 4}} ((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s - (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s),$$

$$s=1,2,3,\dots$$

Ці формули можна перетворити, скориставшись тим, що

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2 \pm a\sqrt{a^2 + 4}) = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right)^2$$
 і тоді  $x_s = t_{2s}$ ,  $y_s = a^{-1}u_{2s-1}$ , де

$$u_{2s-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}} (\lambda^{2s} - \lambda^{-2s}), \quad t_{2s} = (\lambda^{2s} + \lambda^{-2s}), \quad \lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Далі  $n$  шукаємо серед чисел  $y_s-1$ , а якщо врахувати таку властивість чисел  $u$  і

$$t: (a^2+4)u_{2s-1}-at_{2s}=2t_{2s-1}, \text{ то } \mu = \frac{t_{2s-1} - (a^2+3)a}{(a^2+4)a}, s=1,2,3\dots$$

Якщо  $s$  парне, то  $t_{2s-1}-a(a^2+3)$  ділиться націло на  $a(a^2+4)$ .

3). Нехай  $A$  не є повним квадратом і  $b>1$ . Тоді ( див. ,наприклад, [1]) можна користуватись такою множиною розв'язків рівняння (25):

$$x_s = \frac{1}{2}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s + \frac{1}{2}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$$y_s = \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s - \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$s=1,2,3\dots$ , де  $(x_0, y_0)$  найменший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля  $x^2=Ay^2+1$ .

П р и к л а д и .

<b>a</b>	1	1	1	1	1	2	3	3	4
<b>b</b>	1	3	4	9	10	1	1	3	1
<b>n</b>	20	1908	104	300	8768	203	1308	114	5795
<b><math>\mu</math></b>	5	649	39	125	3699	29	109	19	365

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Piero Filippini. A note on the representation of integeres as a sum of distinct Fibonacci numbers// The Fibonacci Quarterly.–1986.–24, №4.–Р.332–335.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.–М.:Наука, 1978.

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 18 травня 2004р.