

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Випуск 66

Серія:

МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Кіровоград – 2007

ББК 22.1я73

НЗ4

УДК 512.5, 532.5, 519.2, 518.3, 517.9

Наукові записки. – Випуск 66. – Серія: Математичні науки. –
Кіровоград: РВВ КДПУ ім В. Винниченка, 2007. – 88 с.

ISBN 966-8088-27-8

Збірник наукових праць є результатом окремих наукових пошуків дослідників теоретичних проблем математики.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

1. Андрієнко В.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
2. Авраменко О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор.
3. Волков Ю.І. – доктор фізико-математичних наук, професор
(відповідальний редактор).
4. Кушнір В.А. – доктор педагогічних наук, професор
5. Петренюк А.Я. – доктор фізико-математичних наук, професор
6. Плічко А.М. – доктор фізико-математичних наук, професор.
7. Романов В.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.
8. Філер З.Ю. – доктор технічних наук, професор.
9. Шевчук І.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
10. Яременко Ю.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент
(відповідальний секретар).

Друкується за рішенням ученої ради
Кіровоградського державного
педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
(протокол № 10 від 7 травня 2007 р.)

Адреса редакції: 25006, м.Кіровоград, вул. Шевченка, 1,
кафедра математики, тел. 29-31-33.

ISBN 966-8088-27-8

© Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

УДК 532.59

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПАРАМЕТРУ БАГАТОМАСШТАБНОГО РОЗВИНЕННЯ

О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий

Показано, що малий параметр, за яким розвинуто розв'язок задачі про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту двох рідких шарів, є коефіцієнтом нелінійності.

It is shown, that the small parameter from the multi-scale solution of the problem of wave-packets propagation along the interface between two fluid layers is the nonlinear coefficient.

В публікаціях [1]-[3] вироблено обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень, яке застосовано до дослідження двошарових системи вигляду "півпростір - півпростір" та "шар - півпростір" до четвертого наближення. Аналогічні результати отримано у системі "шар - шар" до третього наближення [4]-[5] та "півпростір - півпростір" [6]. При цьому згідно методу багатомасштабних розвинень вводився малий параметр для формального розвинення розв'язку в асимптотичний ряд. У даній статті висвітлюється питання про фізичне тлумачення малого параметру.

Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, y, z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -h_1 < z < 0\}$ з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, y, z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 < z < h_2\}$ з густиною ρ_2 . Швидкості у Ω_j - виражені через градієнт потенціалу φ_j , $j = 1, 2$. Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$. Враховується сила поверхневого натягу, сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими (рис. 1).

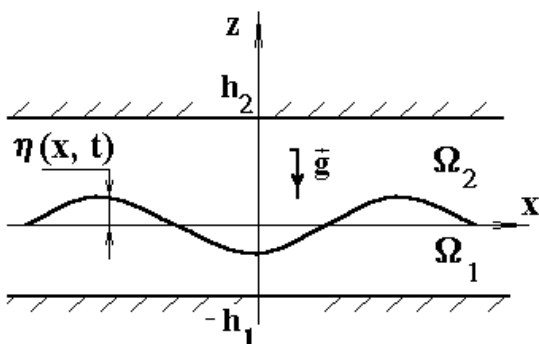


Рис. 1. Постановка задачі.

Математична постановка задачі про розповсюдження хвильових пакетів двох рідких шарів з товщиною h_1 и h_2 має

вигляд:

$$\nabla^2 \varphi_j \equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad v_j = \bar{\nabla} \varphi_j \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z = \eta(x, y, z)$$

(2)

$$g\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\eta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + 0,5(\bar{\nabla}\varphi_1)^2 - 0,5(\bar{\nabla}\varphi_2)^2 - \frac{T}{\rho_1} \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2} \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$$

при $z = \eta(x, y, z)$ (3)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2 \quad (5)$$

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини L , максимального відхилення вільної поверхні a , характерного часу $(L/g)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1 , де g прискорення вільного падіння. Перейдемо до безрозмірних величин за допомогою формул

$$x = Lx^*, \quad z = Lz^*, \quad t = \sqrt{\frac{L}{g}}t^*, \quad \rho_2 = \rho_1\rho^*, \quad \eta = a\eta^*, \quad \varphi = \frac{La}{\sqrt{L/g}}\varphi^*, \quad T = L^2\rho_1gT^* \quad (6)$$

Тоді наша задача в плоскому варіанті буде сформульована слідуючим чином(далі зірочки опущено)

$$\nabla^2\varphi_j \equiv \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad \text{в } \Omega_j \quad j=1,2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha\eta(x, y, z) \quad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[(\bar{\nabla}\varphi_1)^2 - (\bar{\nabla}\varphi_2)^2] - T \left[1 + \alpha^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2} \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$$

при $z = \alpha\eta(x, y, z)$ (9)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2 \quad (11)$$

Для визначення наближеного розв'язку задачі (7) - (11) для малих, але кінцевих амплітуд, застосуємо метод багатомасштабних розвинень

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\alpha^3), \quad (12)$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\alpha^3), \quad (j=1,2) \quad (13)$$

де $\alpha = \frac{a}{L}$ - коефіцієнт нелінійності, $x_i = \alpha^i x$, $t_i = \alpha^i t$ - масштабні змінні.

Підставляючи (12)-(13) у (7)-(11) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях α , отримаємо три лінійні задачі. Наприклад задача першого порядку має вигляд

$$\begin{aligned}
\varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \\
\eta_{1,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z = 0 \\
\varphi_{11,t_0} - \rho\varphi_{21,t_0} + (1-\rho)\eta_1 - T\eta_{1,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z = 0 \\
\varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z = -h_1 \\
\varphi_{21,z} &= 0 \text{ на } z = h_2
\end{aligned} \tag{14}$$

Ті ж самі лінійні задачі ми одержуємо, якщо в початкову задачу підставити розвинення по формальному малому безрозмірному параметру ε , що визначає різні масштаби $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$,

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \tag{15}$$

$$\varphi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \quad (j=1,2) \tag{16}$$

Таким чином, малий параметр ε , що вводився в подібних задачах формально, набув після переходу до безрозмірних змінних конкретного фізичного змісту, тобто є коефіцієнтом нелінійності.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладна гідромеханіка.- 2002.- Т.4(76), №4.- С.3-13.
2. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы.- 2001. -Вып.17.- С. 58-67.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханіка.- 2001.- Т.3(75), №4.- С.38-46.
4. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка.- 2005.- Т.7 (79), № 1.- С.80-89.
5. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикладна гідромеханіка.- 2006.- Т.8 (80), № 4.- С.60-65.
6. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface, Trans. ASME. *J.Appl. Mech.*. Ser. E, 43, №4, 1976, pp.584-588.

УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Ю.И. Волков

Пропонуються методи побудови з натуральною параметризацією багатовимірних розподілів степеневих рядів.

In this article the methods of construction with natural parametrization of multivariate distributions of power series are proposed.

В одномерном случае понятие распределения степенных рядов появилось в работе [1], в многомерном – [2, 4, 6]. Позже этим распределениям было посвящено много других работ, см., например, [3, 5].

Пусть $k = (k_1, \dots, k_m)$ мультииндекс с неотрицательными целочисленными координатами и пусть ряд

$$\omega(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m},$$

$a_{k_1} \geq 0, \dots, a_{k_m} \geq 0$, сходится в полицилиндре

$$Y := \{y_1 \mid 0 \leq y_1 < R\} \times \dots \times \{y_m \mid 0 \leq y_m < R\}.$$

Распределение случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ с вероятностями координат

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \frac{a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)}, k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0$$

называется распределением степенного ряда (РСР) функции ω .

Производящая функция:

$$P(z) = \sum_k \frac{(z_1 y_1)^{k_1} \dots (z_m y_m)^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)} a_{k_1} \dots a_{k_m} = \frac{\omega(z_1 y_1, \dots, z_m y_m)}{\omega(y_1, \dots, y_m)}.$$

Отсюда получим математическое ожидание

$$M \xi = (M \xi_1, \dots, M \xi_m) = \left(y_1 \frac{\partial \log \omega}{\partial y_1}, \dots, y_m \frac{\partial \log \omega}{\partial y_m} \right) = \left(\frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_1}, \dots, \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_m} \right) = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y}$$

и ковариационную матрицу $D \xi = \frac{d^2 \log \omega}{(d \log y)^2}$ с элементами

$$D_{ij} = y_i y_j \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{\omega} - \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{1}{\omega^2} \right) + \delta_{ij} y_i \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Если ввести новую параметризацию (ее будем называть *натуральной*)

$$x = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y}, \text{ то-есть,}$$

$$x_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_1}, \dots, x_m = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_m}, \quad (1)$$

то $D\xi = \tilde{y} \frac{dx}{dy}$, где

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & y_m \end{pmatrix}, \text{ а } \frac{dx}{dy} = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \dots & \partial x_m / \partial y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_1 / \partial y_m & \dots & \partial x_m / \partial y_m \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\frac{dx}{dy} = \tilde{y}^{-1} D\xi$, то эта матрица положительно определенная,

следовательно, отображение (1) на выпуклом множестве Y имеет обратное

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_m), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (2)$$

После введения новой параметризации матрицу $D\xi$ будем обозначать через $V(x) = V(x_1, \dots, x_m)$, $x \in X$, где X образ Y при отображении (1).

Теорема. *Имеет место соотношение:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} V(x) - \frac{\partial P}{\partial z} \tilde{z} + xP = 0, P(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_m) = 1,$$

$$P = P(z_1, \dots, z_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_m} \right), \frac{\partial P}{\partial z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial z_m} \right), \tilde{z} = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_m \end{pmatrix}.$$

В правильности теоремы можно убедиться непосредственной проверкой.

Дальше для суммы координат m -мерного вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$ будем использовать обозначение $|x| = x_1 + \dots + x_m$.

Для построения конкретных РСР функций воспользуемся степенными рядами в одномерном случае.

Пусть $\omega(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k, 0 \leq u < R$ и функция $f(x)$ является обратной к функции $x = y \frac{\omega'(y)}{\omega(y)}$.

1). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1, \dots, y_m) = \omega(y_1 + \dots + y_m)$. В этом случае

$y_1 = f(|x|) \frac{x_1}{|x|}, \dots, y_m = f(|x|) \frac{x_m}{|x|}$, а распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ такое:

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \frac{a_{|k|}!}{\omega(f(|x|)) k_1! \dots k_m!} \left(\frac{x_1}{|x|}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_m}{|x|}\right)^{k_m} (f(|x|))^{|k|}, k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0,$$

элементы матрицы $V(x) = \{v_{ij}\}$ находятся при помощи формул

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j \left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)}\right)' \Big|_{u=f(|x|)}, i, j = 1, \dots, m,$$

$$\det V(x) = x_1 \dots x_m \left(1 - |x| \left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)}\right)' \Big|_{u=f(|x|)}\right). \tag{3}$$

2). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1, \dots, y_m) = \omega(y_1) \omega(y_1 y_2) \dots \omega(y_1 y_2 \dots y_m)$. Тогда

$$y_i = \frac{f(x_i - x_{i+1})}{f(x_{i-1} - x_i)}, i = 1, \dots, m, x_{m+1} := 0, f(x_0 - x_1) := 1,$$

ковариационная матрица:

$$V(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} w_1 + \dots + w_m & w_2 + \dots + w_m & \dots & w_m \\ w_2 + \dots + w_m & w_2 + \dots + w_m & \dots & w_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m & w_m & \dots & w_m \end{pmatrix}, \det V(x) = w_1 \dots w_m,$$

где

$$w_i = w_i(x) = \frac{f(x_i - x_{i+1})}{f'(x_i - x_{i+1})}, i = 1, \dots, m.$$

Пример 1. $\omega(y) = (1 + y)^n, n \in N$.

Имеем $f(x) = \frac{x}{n-x}, \frac{\omega(y)}{\omega'(y)} = \frac{1+y}{n}, \left(\frac{\omega(y)}{\omega'(y)} \right)' = \frac{1}{n}$, а отсюда для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1 + \dots + y_m)$ получим:

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j n^{-1}, \det V(x) = x_1 \cdots x_m (1 - |x| n^{-1}).$$

Если обозначить через $p_1 = x_1/n, \dots, p_m = x_m/n$, то

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} =$$

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_m! (n - |k|)!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} (1 - p_1 - \dots - p_m)^{n - |k|},$$

т.е., получим полиномиальное распределение.

Пример 2. $\omega(y) = \exp y$.

В этом случае $f(x) = x$, а для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1)\omega(y_1 y_2) \cdots \omega(y_1 y_2 \cdots y_m)$ получим $v_{ij} = x_i$, если $i \geq j$ и $v_{ij} = x_j$, если $i < j$, $\det V(x) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{m-1} - x_m)x_m$.

Для получения других распределений можно воспользоваться примерами из статьи [8].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Noack A. A class of Random Variables with Discrete Distributions//Ann.Math.Statist.-1950.-№21, P.127-132.
2. Khattry C.G. On certain properties of power-series distributions//Biometrika. -1959.-№46, P.486-490.
3. Johnson L., Kotz S. Developments in Discrete Distributions, 1969-1980//
4. Int.Statist.Rev.-1982.-v.50, №1, P.71-101.
5. Kotz S., Johnson L. Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol.6.-New York, John Wiley and Sons.-1985.
6. Johnson L., Kotz S., Balakrishnan N. Discrete Multivariate Distributions.Wiley.-1997-328p.
7. Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical Distributions. Wiley.-2000.-221p.
8. Волков Ю.І. Розподіли степеневих рядів із заданими коваріаціями.// Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка, серія: фізико-математичні науки, Випуск 43, 2002.- С.16-21.

УДК 518.3 / 681.142.2

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПО τ -МЕТОДУ ЛАНЦОША

П.Н. Денисенко

В роботі побудовано алгоритм τ -методу Ланцоша для систем комп'ютерної алгебри. За цим алгоритмом розв'язують задачу Коші для лінійних диференціальних рівнянь порядку k з многочленими коефіцієнтами та регулярною особливою початковою точкою та $s \leq k$ початковими умовами. Доведено еквівалентність цього алгоритму проєкційному методу розв'язування лінійного інтегро-диференціального рівняння відносно функції $y^{(s)}$. Це інтегро-диференціальне рівняння еквівалентне оригінальній задачі Коші. Цей алгоритм записано у вигляді специфікації операторів системи алгебраїчного програмування APS. Ця процедура мови APLAN еквівалентна алгоритму.

The Lanczos τ -method algorithm for the computer algebra systems is presented. The algorithm solves the initial-value problem for linear differential equations of order k with polynomial coefficients, regular special initial point and the initial conditions $s \leq k$. We proved the equivalence of the algorithm to the projective method of solving the linear integro-differential equation relating to the function $y^{(s)}$. This integro-differential equation is equivalent to the original initial-value problem. The algorithm is written as a specification in terms of the algebraic programming system (APS) operators. The APLAN-language procedure is equivalent to the algorithm.

ВВЕДЕНИЕ

Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, APS и другие системы компьютерной алгебры (СКА) символично преобразуют композиции специальных математических функций (СМФ) и решают уравнения. Поэтому СКА стали естественной средой математического моделирования. Функции Бесселя J_i и другие СМФ являются классическим аппаратом описания математических моделей. Большой класс этих функций является решением задачи Коши для ЛДУМКО – системы из линейного дифференциального уравнения порядка k с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$D[y] + G = 0, \quad D[y] = A y^{(k)} + \dots + C y \quad (1)$$

и $s \leq k$ начальных условий в точке 0

$$\text{init_cond}(y, 0) = \{ y(0) = Y_0, y'(0) = Y_1, \dots, y^{(s-1)}(0) = Y_{s-1} \}. \quad (2)$$

Начальная точка 0 является регулярной особой точкой уравнения (1)

$$A(0) = 0, \quad y = c_0 + c_1 x + \dots \quad (3)$$

Пример 1. Функция $x^{-\mu} J_{\mu}(x)$ является решением системы уравнений

$$x y'' + (2\mu + 1) y' + x y = 0, \quad y(0) = 1. \quad (4)$$

СКА решают обыкновенные дифференциальные уравнения и вычисляют: – точное решение – композицию СМФ – если она существует, – приближенное решение – частную сумму ряда Тейлора решения задачи Коши – многочлен Тейлора. Этот многочлен, как правило, не удовлетворяет основному критерию оценки эффективности математических моделей – точность. Поэтому актуальна следующая задача – задача работы.

Задача. Построить метод решения задачи Коши для ЛДУМКО (1) – (3) на отрезке $[a, b]$. Преобразования этого метода выполняют операторы СКА. По этому методу вычисляют алгебраический многочлен

$$y_n = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n. \quad (5)$$

Метод 1 сходится на корректной задаче Коши для ЛДУМКО (1) – (3).

Метод решения задачи. Построить алгоритм τ -метода Ланцоша.

1 МЕТОД 1 – АЛГОРИТМ τ -МЕТОДА ЛАНЦОША

Вход: $D[y] = 0$ (1), $init_cond(y, 0)$ (2), $[a, b]$, n .

Выход: Многочлен y_n (5). Этот многочлен является решением системы уравнений – аппроксимации уравнения (1) и начальных условий (2)

$$D[y_n] + G + E_{m,p}(z(x)) = 0 \quad (y_n \in P_n, \quad E_{m,p}(z(x)) \in H_{m|p}), \quad (6)$$

$$init_cond(y_n \in P_n, 0) = \{ c_0 = Y_0, \dots, (s-1)! c_{s-1} = Y_{s-1} \}. \quad (7)$$

Дополнительный многочлен $E_{m,p}(z(x))$ уравнения (6) имеет параметры

$$m = deg(D[y_n \in P_n] + G), \quad p = n - s, \quad s = dim(init_cond(y, 0)). \quad (8)$$

P_n – пространство алгебраических многочленов степени n . Многочлен $y_n \in P_n$ в уравнениях (6), (7) и тождестве (8) является элементом общего вида этого пространства, имеет вид (5) и символьные коэффициенты c_0, \dots, c_n . Поэтому уравнения системы (7) являются линейными алгебраическими уравнениями относительно этих коэффициентов.

Пространство $H_{m|p}$ является линейной оболочкой элементов с индексом $i = p+1, \dots, m$ базиса пространства Гильберта $L_2(a, b; \rho)$

$$\cos(i \arccos(z(x))), \quad i = 0, 1, \dots, \quad z(x) = 2(x-a)/(b-a) - 1.$$

Поэтому дополнительный многочлен уравнения (6) имеет вид

$$(E_{m,p}(z(x)) \in H_{m \setminus p}) = \text{subs}(x = z(x), E_{m,p}). \quad (9)$$

Многочлен $E_{m,p}$ имеет символьные коэффициенты $\tau_1, \dots, \tau_{m-p}$ и вид

$$E_{m,p} = E_{m,p}(x) = \tau_1 \text{cheb}(p+1, x) + \dots + \tau_{m-p} \text{cheb}(m, x). \quad (10)$$

Поэтому левая часть уравнения (6) является многочленом степени m (8). Коэффициент этого многочлена при x^i – коэффициент Тейлора t_i – равен

$$t_i(D[y_n \in P_n]) + t_i(G) + t_i(E_{m,p}(z(x)) \in H_{m \setminus p}),$$

$$t_i(D[y_n \in P_n]) = t_i(D[1]) c_0 + t_i(D[x]) c_1 + \dots + t_i(D[x^n]) c_n,$$

$$t_i(E_{m,p}(z(x)) \in H_{m \setminus p}) = t_i(\text{cheb}(p+1, z(x))) \tau_1 + \dots + t_i(\text{cheb}(m, z(x))) \tau_{m-n}$$

и справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Уравнение (6) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов y_n , $E_{m,p}(z(x))$

$$S = \{ t_i(D[y_n \in P_n]) + t_i(E_{m,p}(z(x)) \in H_{m \setminus p}) + t_i(G) = 0 \}_{i=0}^m \quad (11)$$

2 АЛГОРИТМ 1 – АЛГОРИТМИЗАЦИЯ МЕТОДА 1 ДЛЯ СКА

Вход: $D[y] + G = 0$ (1), $\text{init_cond}(y, 0)$ (2), $[a, b]$, n .

Выход: Многочлен y_n (5).

Преобразования:

1. Вычислить оператор $D[y] + G$ ЛДУМК (1).
2. Вычислить число начальных условий (2) s (8).
3. Вычислить многочлен $y_n \in P_n$ (с символьными коэффициентами).
4. Вычислить многочлен $D[y_n \in P_n] + G$.
5. Вычислить порядок m (8) этого многочлена.
6. Вычислить параметр p (8) дополнительного многочлена.
7. Вычислить многочлен $E_{m,p}$ (10) с символьными коэффициентами.
8. Вычислить преобразование $z(x) = 2(x-a)/(b-a) - 1 : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$.
9. Вычислить многочлен $E_{m,p}(z(x)) \in H_{m \setminus p}$ (9).

10. Вычислить многочлен $D[y_n \in P_n] + G + (E_{m,p}(z(x)) \in H_{m,p})$.
11. Вычислить систему линейных алгебраических уравнений (11).
12. Вычислить систему линейных алгебраических уравнений (7).
13. Объединить СЛАУ (7) и СЛАУ (11).
14. Решить объединение СЛАУ (7) и СЛАУ (11) – вычислить значения коэффициентов $c_0, \dots, c_n, \tau_1, \dots, \tau_{m-p}$ многочленов y_n (5), $E_{m,p}(z(x))$ (9)

$$\text{Coef} = \text{solve}(S(11), (7)) = \{ \text{coef}(y_n), \text{coef}(E_{m,p}) \}. \quad (12)$$

15. Вычислить многочлен y_n (5) с числовыми коэффициентами – преобразовать значения коэффициентов этого многочлена $\text{coef}(y_n) = \{ d, \dots, e \}$ (12) в сумму мономов

$$y_n = \text{ser}(\text{coef}(y_n)) = d + \dots + e x^n. \quad (13)$$

Доказательство. Согласно теореме 1, уравнение (6) эквивалентно СЛАУ (11). Поэтому алгоритм 1 является детализацией метода 1.

3 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА 1

Структура данных на входе.

1. ЛДУМК (1) имеет вид

$$\text{LDUMK} := (\mathbf{A} * \text{dif}(\mathbf{y}, \mathbf{k}) + \dots + \mathbf{C} * \mathbf{y} + \mathbf{G} = \mathbf{0});$$

где \mathbf{y} – атом. Коэффициенты $\mathbf{A}, \dots, \mathbf{C}, \mathbf{G}$ уравнения (1) являются многочленами переменной (атома) x . Эти многочлены являются отдельными термами. (Произведение термов берется в скобки). Обычно они имеют вид естественный для математики. Коэффициенты этих многочленов являются целыми или рациональными или действительными числами. Рациональные числа в APS имеют вид $\text{rat}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \mathbf{p} / \mathbf{q}$, где \mathbf{p}, \mathbf{q} – целые числа. Длина целых чисел в APS не ограничена.

2. Начальные условия (2) определяют: – начальная точка

$$\text{InitPoint} := \mathbf{0};$$

– список тождеств (2) (в этой точке) относительно атома \mathbf{y}

$$\text{init_cond} := (\mathbf{y} = \mathbf{Y}_0, \dots, \text{dif}(\mathbf{y}, \mathbf{s}-1) = \mathbf{Y}_{\{\mathbf{s}-1\}});$$

3. Отрезок аппроксимации $[a, b]$ определяет список его концов – чисел

interval := (a, b) ;

4. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Процедура вычисляет многочлен y_n (13) с числовыми коэффициентами вида (5) – естественного для математики

$$y_n := d + \dots + f * x^n ;$$

Структура результатов промежуточных вычислений.

Алгоритм 1 вычисляет СЛАУ (7) и (11) в результате аналитического (символьного) преобразования многочленов $y_n \in P_n$ и $E_{m,p}$ (10) с символьными коэффициентами

$$c_0, \dots, c_n, \tau_1, \dots, \tau_{m-p} .$$

Неизвестные СЛАУ (7) и (11) в процедуре являются атомами

$$c(0), \dots, c(n), c(n+1), \dots, c(m+s).$$

Поэтому символьные коэффициенты многочленов $y_n \in P_n$ и $E_{m,p}$ (10) в процедуре являются этими атомами.

Многочлен $y_n \in P_n$ процедура вычисляет в виде

$$c(0) + c(1) * x + \dots + c(n) * x^n .$$

Результат преобразования многочлена $y_n \in P_n$ оператором $D[y]$ (1) в процедуре, после приведения к каноническому виду, является суммой одночленов вида

$$c(i) * x^j \$ b, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m,$$

где $\$$ – операция умножения терма на число, b – число.

Дополнительный многочлен $E_{m,p}$ (10) процедура вычисляет в виде

$$c(n+1) * \text{cheb}(p+1, x) + \dots + c(m+s) * \text{cheb}(m, x),$$

где $\text{cheb}(i, x)$ – многочлен Чебышева первого рода порядка i . Линейный перенос (9) на отрезок $[a, b]$ многочлена $E_{m,p}$ в процедуре, после приведения к каноническому виду, является суммой одночленов вида

$$c(i) * x^j \text{ } \$ \mathbf{b}, \quad i = n+1, \dots, m+s, \quad j = 0, \dots, m.$$

Поэтому объединение СЛАУ (7) и (11) в процедуре является списком уравнений вида

$$S := (\dots, c(m+s) \$ f + \dots + c(0) \$ e + d = 0, \dots)$$

и решение (12) объединения СЛАУ (7) и (11) является списком тождеств

$$\text{Coef} := (c(0) = d, \dots, c(n) = f, \dots, c(m+s) = g).$$

Процедура 1. Алгебраическая спецификация алгоритма 1.

```

let(LDUMK, Dy = 0);      /* Dy = D[y] + G */
s := dim(init_cond);   /* число условий (2) */
y_n := main_pol(n);    /* y_n \in P_n */
Dn := canplf(sub_du(Dy, y_n)); /* D[y_n] + G */
m := deg(canplf(ein_pol(Dn))); /* deg(D[y_n] + G) */
p := n - s;
Em := Enl(n, m-p, s);  /* E_{m,p} */
b := arg(interval, 2); a := arg(interval, 1);
h := b - a;
z := canplf((2/h) * (x + (-1) * a) + -1); /* z(x) */
Em --> canplf(subs(x = z, Em)); /* E_{m,p}(z(x)) */
Dn --> canplf(Dn + Em); /* D[y_n] + G + Em */
SD := pol_equ(Dn, m); /* СЛАУ - аппр. ЛДУМК (1) */
/* АППРОКСИМАЦИЯ начальных условий (2) */
S := init_sys(y_n, InitPoint, init_cond);
S --> conc(S, SD); /* СЛАУ \approx task (1), (2) */
Xn := c; Coef := solve(S); /* решение СЛАУ */
y_n := ser(n, Coef); /* аппроксимация y */

```

Выводы из процедуры 1 и структуры данных.

Теорема 2. Пусть данные на входе процедуры 1 имеют только целые или рациональные числа.

Тогда процедура не вносит в результат преобразований погрешности от выполнения арифметических операций компьютером с фиксированной длиной машинного числа.

Доказательство. Процедура 1 имеет известные операторы [3] системы алгебраического программирования APS. Эти операторы выполняют вычисления в арифметике рациональных чисел. Длина числителя и

знаменателя рациональных чисел в APS не ограничена. Поэтому операторы процедуры не вносят в результат преобразований погрешности от выполнения арифметических операций компьютером с фиксированной длиной машинного числа.

Теорема 3. Процедура 1 имеет по параметру n полиномиальную сложность

$$m Q(\text{canplf}, m) + O(n^3), \quad m = n + O(1),$$

$Q(\text{canplf}, m)$ – сложность преобразования оператором canplf многочлена $P : \text{canplf}(P)$ имеет слагаемые вида $c(i) * x^j$, $i, j \leq m$

Доказательство. Процедура 1 линейная и имеет известные операторы [3] системы алгебраического программирования APS. Поэтому вычислительная сложность процедуры 1 тождественна максимальной вычислительной сложности операторов этой процедуры. Наибольшую вычислительную сложность имеет оператор

$$Q(\text{pol_equ}(Dn, m), n) = m Q(\text{canplf}, m+s) + O(n^3).$$

Оператор canplf является внутренним оператором солвера gr_solve.exe системы APS. Он приводит [3] многочлены к виду каноническому для системы APS. Структура результатов вычислений операторами процедуры 1 приведена выше. Согласно этой структуре, если процедура 1 вычислила многочлен P , то многочлен $\text{canplf}(P)$ имеет слагаемые вида

$$c(i) * x^j, \quad i = 0, \dots, m+s, \quad j = 0, \dots, m, \quad m = n + O(1), \quad s = O(1).$$

Метод 2

Вход: $D[y] + G = 0$ (1), $\text{init_cond}(y, 0)$ (2), $[a, b]$, n .

Выход: Многочлен y_n (5).

Преобразования:

1. Вычислить уравнение относительно функции $u = y^{(s)}$

$$D[V^s[u] + y_{s-1}] + G = 0, \quad (14)$$

где

$$V[u] = \int_0^x u(t) dt, \quad y_{s-1} = Y_0 + \dots + Y_{s-1} / (s-1)! x^{s-1}. \quad (15)$$

2. Вычислить аппроксимацию уравнения (14) по а-методу В. К. Дзядыка [2] решения ЛИУМК Вольтерра с параметром $p = n-s$ (8)

$$D[V^s[u_p] + y_{s-1}] + E_{m,p}(z(x)) = 0 \quad (u_p \in P_p, E_{m,p}(z(x)) \in H_{m,p}), \quad (16)$$

где

$$m = \deg(D[y_{s-1} + V^s[u_p]]) + G \quad (u_p \in P_p). \quad (17)$$

3. Решить уравнение (16) и вычислить многочлены $u_p, E_{m,p}(z(x))$.

4. Вычислить искомую аппроксимацию (5) решения y задачи Коши (1) – (3)

$$y_n = V^s[u_p] + y_{s-1}. \quad (18)$$

Теорема 4. Пусть задача Коши для ЛДУМКО (1) – (3) имеет порядок k и метод 1 и метод 2 имеют параметр $n > 2k$.

Тогда многочлен y_n (18) является решением СЛАУ (7) и уравнение (16) тождественно преобразованию уравнения (6)

$$\begin{aligned} \text{subs}(y_n = V^s[u_p] + y_{s-1}, D[y_n] + G + E_{m,p}(z(x)) = 0) = \\ (D[V^s[u_p] + y_{k-1}] + G + E_{m,p}(z(x)) = 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. Согласно определению (15) оператора V и многочлена y_{s-1} , многочлен y_n (18) удовлетворяет СЛАУ (7). Первое слагаемое уравнения (16) тождественно первому слагаемому уравнения (19) по определению. Параметр p дополнительного многочлена $E_{m,p}(z(x))$ уравнений (6), (16) и (19) тождественен по определению. Тождество первого параметра этих дополнительных многочленов

$$\deg(D[y_n \in P_n] + G) = \deg(D[y_{s-1} + V^s[u_{n-s} \in P_{n-s}]] + G)$$

в случае $\deg(D[y_n \in P_n]) \leq \deg(G)$ очевидно.

Тождество первого параметра дополнительных многочленов уравнений (6), (16) и (19) в случае $\deg(D[y_n \in P_n]) > \deg(G)$ непосредственно следует из очевидного тождества

$$\deg(D[y_{s-1} + V^s[u_p \in P_p]]) = \deg(D[V^s[u_p \in P_p]])$$

и тождества

$$\deg(D[y_n \in P_n]) = \deg(D[V^s[u_{n-s} \in P_{n-s}]]).$$

Последнее тождество непосредственно следует из тождеств

$$\deg(D[y_n \in P_n]) = \max \{ \deg(D[1]), \deg(D[x]), \dots, \deg(D[x^n]) \}, \quad (20)$$

$$\deg(D[V^i[y_{n-i} \in P_{n-i}]]) = \max \{ \deg(D[x^i]), \dots, \deg(D[x^n]) \}, \quad (21)$$

где $i = 1, \dots, n$ и, если $n > 2k$, то

$$\deg(D[y_n \in P_n]) = \max \{ \deg(D[x^k]), \deg(D[x^{k+1}]), \dots, \deg(D[x^n]) \}. \quad (22)$$

Тождества (20) – (22) доказаны ниже в леммах 1 – 4.

Лемма 1. Пусть $D[y]$ – линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами вида (1).

Тогда $D[y_n \in P_n]$ является многочленом и имеет порядок (20).

Доказательство. Оператор $D[y]$ линейный. Поэтому имеет место тождество

$$D[y_n \in P_n] = c_0 D[1] + c_1 D[x] + \dots + c_n D[x^n]. \quad (23)$$

Если $n=0$, то правая часть тождества (23) имеет одно слагаемое. Поэтому в случае $n=0$ тождество (20) очевидно.

Пусть тождество (20) имеет место для $n=q-1$. Согласно тождества (23)

$$\deg(D[y_q \in P_q]) = \max \{ \deg(D[y_{q-1} \in P_{q-1}]), \deg(D[x^q]) \}.$$

Поэтому тождество (20) имеет место в случае $n=q \in N$.

Лемма 2. Пусть $D[y]$ – линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами вида (1) и $V[u]$ – оператор (15).

Тогда $D[V^i[y_{n-i} \in P_{n-i}]]$ является многочленом и имеет порядок (21).

Доказательство. Тождественно доказательству леммы 1.

Операторы $D[y]$ и $V[u]$ – линейные. Поэтому имеют место тождества

$$D[V^i[y_{n-i} \in P_{n-i}]] = c_0 D[V^i[1]] + c_1 D[V^i[x]] + \dots + c_{n-i} D[V^i[x^{n-i}]], \quad (24)$$

$$D[V^i[1]] = D[x^i] / i!, \dots, D[V^i[x^{n-i}]] = D[x^n] (n-i)! / n!.$$

Если $n-i=0$, то правая часть тождества (24) имеет одно слагаемое и тождество (21) очевидно.

Пусть тождество (21) имеет место в случае $n-i=q-1$. Согласно тождества (24) и определения функции \deg , имеет место тождество

$$\deg(D[V^i [y_q \in P_q]]) = \max \{ \deg(D[V^i [y_{q-1} \in P_{q-1}]]), \deg(D[x^{q+i}]) \}.$$

Поэтому тождество (21) имеет место в общем случае $n-i = q \in N$.

Лемма 3. Пусть $D[y]$ – линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами вида (1).

Тогда множество значений параметра $j \geq k$ для которого не выполняется тождество

$$\deg(D[x^j]) = \max \{ \deg(A (x^j)^{(k)}), \dots, \deg(C x^j) \} \quad (25)$$

имеет не более k элементов.

Доказательство. Если $j \geq k$, то многочлен $D[x^j]$ имеет вид

$$D[x^j] = d_0 + d_1 x + \dots + d_q x^q, \quad q = j - k + \max \{ \deg(A), \dots, \deg(C) + k \}.$$

Согласно правила дифференцирования монома x^j порядка $j > i$

$$(x^j)^{(i)} = j(j-1) \dots (j-i+1) x^{j-i}$$

коэффициент d_q многочлена $D[x^j]$ является алгебраическим многочленом переменной j порядка k

$$d_q = e_0 + e_1 j + \dots + e_k j^k.$$

Элементами множества значений параметра j , для которого не выполняется тождество (25), могут быть только нули коэффициента d_q . Многочлен порядка k имеет на действительной оси не более k нулей. Поэтому множество значений параметра j , для которого не выполняется тождество (25), имеет не более k элементов.

Лемма 4. Пусть $D[y]$ – линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами вида (1) порядка k

$$D[y] = A y^{(k)} + B y^{(k-1)} + \dots + E y' + C y$$

и параметр $n > 2k$.

Тогда имеет место тождество (22).

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$P = \{ \deg(D[x^k]), \deg(D[x^{k+1}]), \dots, \deg(D[x^j]), \dots, \deg(D[x^n]) \}.$$

Рассмотрим подпоследовательность P_1 последовательности P

$$P_1 = \{ \deg(D[x^j]) < \max \{ \deg(A (x^j)^{(k)}), \dots, \deg(C x^j) \} \}_{j=k}^n \subseteq P$$

Согласно лемме 3, эта подпоследовательность имеет не более k элементов $\dim(P_1) \leq k$. Поэтому, если выполнено второе условие леммы $n > 2k$, то последовательность $P \setminus P_1$ не пуста – существует такое число $j : k \leq j \leq n$, для которого имеет место тождество (25). Это тождество, очевидно, имеет вид

$$\deg(D[x^j]) = j - k + \max \{ \deg(A), \deg(B) + 1, \dots, \deg(E) + k - 1, \deg(C) + k \}.$$

Поэтому правая часть этого тождества превышает очевидные оценки порядка многочленов $D[x^j]$, $j=0, \dots, k-1$

$$\deg(D[0]) = \deg(C), \deg(D[x]) \leq \max \{ \deg(E), \deg(C) + 1 \}, \dots,$$

$$\deg(D[x^{k-1}]) \leq \max \{ \deg(B), \dots, \deg(E) + k - 2, \deg(C) + k - 1 \}$$

и справедливо тождество (22).

5 СВЯЗЬ МЕТОДА 1 С ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Теорема 5. Пусть уравнение (14) имеет оператор

$$D[V^s[u] + y_{s-1}] + G = L[u] + g : P_p \rightarrow P_m.$$

Тогда аппроксимация (16) уравнения (14) эквивалентна системе:

– аппроксимирующее уравнение проекционного метода порядка p

$$S_p[D[V^s[u_p] + y_{s-1}] + G] = 0 \quad (u_p \in P_p), \quad (26)$$

где оператор проектирования вычисляет частную сумму ряда Фурье - Чебышева порядка p функции на отрезке $[a, b]$

$$S_p[y] = a_0(y) \text{ cheb}(0, z(x)) + \dots + a_p(y) \text{ cheb}(p, z(x)) \quad (27)$$

и СЛАУ – определение коэффициентов дополнительного многочлена

$$a_i(D[V^s[u_p] + y_{s-1}] + G, [a, b]) + \tau_{i-p} = 0 \quad (u_p \in P_p), \quad i = p+1, \dots, m. \quad (28)$$

Доказательство. Согласно условия теоремы, первое слагаемое уравнения (16) является многочленом порядка m (17). По определению метода 1, дополнительный многочлен уравнения (16) имеет порядок m . Поэтому аппроксимация (16) уравнения (14) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов u_p , $E_{m,p}(z(x))$

$$a_i(D[V^s[u_p]+y_{s-1}]+G + E_{m,p}(z(x)), [a,b]) = 0, \quad i = 0, \dots, m. \quad (29)$$

Для коэффициентов Фурье - Чебышева многочлена имеет место тождество

$$a_i(c_0 \text{ cheb}(0,z(x)) + \dots + c_i \text{ cheb}(i,z(x)) + \dots, [a,b]) = c_i.$$

Поэтому имеют место тождества

$$\begin{aligned} a_i(E_{m,p}(z(x)), [a,b]) &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ a_i(E_{m,p}(z(x)), [a,b]) &= \tau_{i-p}, \quad i = p+1, \dots, m, \end{aligned}$$

первые $p+1$ уравнения системы (29) имеют вид

$$a_i(D[V^s[u_p]+y_{s-1}]+G, [a,b]) = 0, \quad i = 0, \dots, p, \quad (30)$$

и остальные уравнения системы (29) имеют вид (28).

Оператор $S_p [D[V^s[u_p] + y_{s-1}] + G]$ уравнения (26) преобразует пространство P_p в это же пространство. Поэтому и согласно определения (27) оператора S_p , уравнение (26) эквивалентно СЛАУ (30).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоремы 4, 5 и основная теорема сходимости проекционных методов обосновывают применение метода 1 для решения задачи Коши для ЛДУМКО (1) – (3) – доказывают существование аппроксимирующего многочлена метода 1 и сходимость метода 1. Эти теоремы и теоремы 1 и 2 обосновывают применение процедуры 1 для решения задачи Коши для ЛДУМКО (1) – (3). Теоремы 1 – 3 и процедура 1 доказывают полиномиальную сложность реализации алгоритма 1 в системах компьютерной алгебры.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1957 – 584 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988 – 387 с.
3. Денисенко П.Н., Летичевский А.А. Алгебраическое программирование. Кировоград: КННПК, 2002 – 120 с.

ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І.Г. Завізіон

Одержана умова існування і єдиності періодичного розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра. Використовуючи системи інтегро-диференціальних рівнянь з параметром будуються збіжні періодичні ітерації. Подаються оцінки швидкості збіжності розв'язку і точного розв'язку систем.

We obtain conditions for existence and uniqueness of periodic solution system integro-differential Volterr's equations. By using system integro-differential equations with parameter converged periodic iterations are constructed. Estimates of the speed of convergence of solution and sharp solution of system are given.

Вступ.

В працях [1-4] розроблені методи конструктивного аналізу періодичних розв'язків різних класів лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь. На основі запропонованих ідей, в [5] одержані достатні умови існування та єдиності, стійкості періодичних розв'язків та вказані конструктивні методи побудови періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, які зручні для практичного застосування. Методи розроблені в [5] застосовують в [6] до знаходження періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, а також в [7] до слабонелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, у випадку коли межі інтегрування періодичні функції. Коли ж межі інтегрування не є періодичними функціями, система інтегро-диференціальних рівнянь не завжди має періодичний розв'язок. Тому в даній статті знаходяться необхідні і достатні умови існування і єдиності періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, коли межі інтегрування не періодичні функції.

Використовуючи результати [5], про застосування матричної функції $(E - B(t))^{-1}$ для дослідження лінійних диференціальних рівнянь, в статті пропонується підхід до побудови періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь. За допомогою інтегро-диференціальних рівнянь з параметром побудоване аналітичне представлення періодичних розв'язків.

Існування та єдиність періодичного розв'язку.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

де $n \times n$ матриця $Q(t)$, вектор $f(t)$, $n \times n$ матриця $\bar{\Gamma}(t,s)$ неперервні і ω -періодичні по змінним t і s .

Знайдемо умову існування періодичних періоду ω розв'язків рівняння (1).

Нехай $x(t)$ задовольняє рівняння (1), тоді

$$\frac{dx(t)}{dt} = Q(t)x(t) + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Замінивши в цій рівності t на $t + \omega$ маємо

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt} = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Запишемо рівняння (1), якщо $x(t + \omega)$ є його коренем. Для цього замінемо $x(t)$ на $x(t + \omega)$

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt} = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds.$$

Доведемо, що останні дві рівності рівні. Для цього ввівши заміну $s = s_1 + \omega$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dx(t+\omega)}{dt} &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_{-\omega}^t \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_{-\omega}^0 \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds. \end{aligned}$$

Отже $x(t)$ та $x(t + \omega)$ є розв'язками інтегро-диференціального рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds = \\ = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds. \end{aligned}$$

Звідси маємо, що $x(t + \omega)$ є розв'язком рівняння (1) якщо виконується наступна умова

$$\int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds = 0. \quad (2)$$

Нехай $B(\omega) = 0$, де $B(t) = \int_0^t Q(\tau)d\tau$, $B(t + \omega) = B(t)$ і $\det\|E - B(t)\| \neq 0, \forall t \in R$, якщо $\beta\omega < 1$, де $\beta = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|Q(t)\|$, E – одинична матриця. Зробимо в (1) заміну

$$x = (E - B(t))^{-1} y.$$

Тоді отримаєм систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(t) + \int_0^t \Gamma(t,s)y(s)ds, \quad (3)$$

де $A(t) = -B(t)Q(t)(E - B(t))^{-1}$, $\Gamma(t,s) = (E - B(t))\bar{\Gamma}(t,s)(E - B(t))^{-1}$, $g(t) = (E - B(t))f(t)$.

Записавши до (3) еквівалентне інтегральне рівняння і скориставшись умовою ω -періодичності $y(t)$ маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau = -\int_0^\omega g(\tau)d\tau - \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds. \quad (4)$$

Проінтегрувавши ліву частину (4) за частинами маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau = \Phi(\omega)y(t) - \int_0^t \Phi(\tau)y(\tau)d\tau + \int_t^\omega \Phi_1(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau. \quad (5)$$

де $\Phi(\tau) = \int_0^t A(\tau)d\tau$, $\Phi_1(t) = \int_t^\omega A(\tau)d\tau$, $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt}$.

Підставляючи (5) в (4) і враховуючи (3) отримаємо наступне рівняння

$$y(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)(A(\tau)y(\tau) + g(\tau))d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds - \\ - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds, \quad (6)$$

де $K(t,\tau) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\omega)\Phi(\tau), & \text{при } 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ \Phi^{-1}(\omega)\Phi_1(\tau), & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \leq \omega. \end{cases}$

Позначимо

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, j = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \max_{s,t} \|\Gamma(t,s)\| = \Gamma,$$

$$\|y\| = \max_t \|y(t)\|, q = j\omega^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha\omega\Gamma}{3} + \frac{\Gamma}{2} \right).$$

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови

$$1) \quad q < 1, \quad (7)$$

$$2) \quad \int_0^\omega \bar{\Gamma}(t,s)(E - B(t))^{-1}y(s)ds = 0, \quad (8)$$

Тоді система (3) має єдиний ω -періодичний розв'язок.

Доведення. Рівняння (6) одержано з умови періодичності рівняння (3). Тому, якщо рівняння (6) буде мати єдиний розв'язок, то цей розв'язок буде періодичним. Запишемо (6) у вигляді $y = Ry$, де R – інтегральний оператор в (6). Тоді

$$Ry(t) - Rz(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)(y(\tau) - z(\tau))d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s) - \\ - z(s))ds - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s) - z(s))ds.$$

Скориставшись останньою рівністю оцінимо норму

$$\|Ry - Rz\| \leq (\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau + \Gamma \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau + \frac{j\omega^2 \Gamma}{2}) \max_t \|y(t) - z(t)\|.$$

Оцінимо такі інтеграли

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau &= \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \|K(t, \tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau \right) \leq \\ &\leq j \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \|\Phi(\tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \|\Phi_1(\tau)\| d\tau \right) \leq j\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \left(t^2 + \frac{\omega^2}{2} - t\omega \right) = \frac{j\alpha\omega^2}{2}, \\ \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau &= \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \tau \|K(t, \tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau \right) \leq \\ &\leq j\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \left(\frac{2t^3}{3} + \frac{\omega^3}{6} - \frac{\omega t^2}{2} \right) = \frac{j\alpha\omega^3}{3}. \end{aligned}$$

Використовуючи попередні оцінки маємо

$$\|Ry - Rz\| \leq q \|y - z\|. \quad (9)$$

З (7), (9), умови існування періодичного розв'язку (8) та принципу стиснутих відображень слідує існування єдиного розв'язку рівняння (6).

Побудова періодичного розв'язку системи з параметром. Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь з параметром

$$\frac{dy}{dt} = \lambda A(t)y + \lambda \int_0^{\tau} \Gamma(t, s)y(s, \lambda) ds + g(t). \quad (10)$$

Інтегральне рівняння еквівалентне (10) має вигляд

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \lambda \int_0^t A(\tau)y(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^t g(\tau) d\tau + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \quad (11)$$

Підставляючи в (11) $t = \omega$ і із ω -періодичності функції $y(t, \lambda)$ маємо

$$\lambda \int_0^{\omega} A(\tau)y(\tau, \lambda) d\tau = - \int_0^{\omega} g(\tau) d\tau - \lambda \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \quad (12)$$

Підставивши (5) в (12) та спростивши одержимо

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) &= \int_0^{\omega} K(t, \tau)(\lambda A(\tau)y(\tau, \lambda) + g(\tau)) d\tau + \lambda \int_0^{\omega} K(t, \tau) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds - \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) g(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (13) у вигляді

$$y(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} y_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k(t). \quad (14)$$

Застосовуючи до рівняння (13) метод малого параметра, одержимо

$$y_{-1}(t) = - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) g(\tau) d\tau - \Phi^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y_{-1}(s) ds, \quad (15)$$

$$y_0(t) = \int_0^\omega K(t, \tau)(A(\tau)y_{-1} + g(\tau))d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{-1}(s)ds - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_0 ds, \tag{16}$$

$$y_k(t) = \int_0^\omega K(t, \tau)A(\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{k-1}(s)ds - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau y_k(s)ds, k = 1, 2, \dots \tag{17}$$

Скориставшись раніше приведеними оцінками інтегралів оцінемо формулу (17)

$$\|y_k\| \leq \bar{q}\|y_{k-1}\|, \tag{18}$$

де $\bar{q} = \frac{q - \frac{j\Gamma\omega^2}{2}}{1 - \frac{j\Gamma\omega^2}{2}}$.

З (17) маємо

$$\|y_k\| \leq \bar{q}^k \|y_0\|, k = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Ряд (14) буде збіжним, коли

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\bar{q}}.$$

(20)

Врахувавши (7), маємо $\frac{1}{q} > 1$. Отже $\lambda = 1$ задовольняє нерівність (20).

Поклавши $\lambda = 1$ в (14), отримаємо збіжний ряд

$$y(t) = y(t, 1) = y_{-1} + \sum_{k=0}^\infty y_k(t), \tag{21}$$

де $y_{-1}(t), y_k(t) (k = 1, 2, \dots)$ – ω -періодичні функції. Знайдемо оцінку збіжності ряду (21) і точного розв'язку рівняння (3).

$$\|y(t) - \bar{y}_m(t)\| \leq \frac{\bar{q}^{m+1} \|y_0\|}{1 - \bar{q}},$$

$$\|y(t)\| \leq \|y_{-1}\| + \frac{\|y_0\|}{1 - \bar{q}},$$

де $\bar{y}_m(t) = y_{-1} + \sum_{k=0}^m y_k(t)$. Тоді для рівняння (1) має місце оцінка

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{(1 - \beta\omega)} (\|y_{-1}\| + \frac{\|y_0\|}{1 - \bar{q}}), \tag{22}$$

$$\|x - x_m\| \leq \frac{\bar{q}^{m+1} \|y_0\|}{(1 - \bar{q})(1 - \beta\omega)}.$$

Вірною є теорема.

Теорема 2. Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і неперервність (7). Тоді ω -періодичний розв'язок системи (1) має вигляд

$$x = (E - B(t))^{-1}y, \quad (23)$$

де $y(t)$ визначається за формулами (17), (21) і справедливі оцінки (22). Періодичний розв'язок $y(t, \lambda)$ інтегро-диференціального рівняння з параметром (10) при $\lambda \rightarrow 0$ прямує до періодичного розв'язку відповідного незбуреного диференціального рівняння.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь з параметром іншого вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \lambda A(t)y + \lambda^2 \int_0^\tau \Gamma(t, s)y(s, \lambda)ds + g(t). \quad (24)$$

Записавши до (24) еквівалентне інтегральне рівняння та скориставшись ω -періодичністю розв'язку рівняння (24), а потім проінтегрувавши за частинами інтеграл в одержаній рівності маємо

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) = & \int_0^\omega K(t, \tau)(\lambda A(\tau)y(\tau, \lambda) + g(\tau))d\tau + \lambda^2 \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda)ds - \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda)ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Розв'язок рівняння (25) будемо шукати у вигляді (14). Підставивши (14) в (25) і застосувавши метод малого параметра отримаємо

$$y_{-1}(t) = -\Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega g(\tau)d\tau, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} y_0(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau)A(\tau)y_{-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)g(\tau)d\tau - \\ & - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{-1}(s)ds, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} y_k(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau)A(\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{k-2}(s)ds - \\ & - \Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{k-1}(s)ds, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Дослідимо на збіжність ряд (14), де $y_{-1}, y_k, k = 0, 1, \dots$ визначаються за формулами (26) – (28). Оцінюючи рівність (28) прийдемо до такої рекурентної нерівності

$$\|y_k\| \leq q_1 \|y_{k-1}\| + q_2 \|y_{k-2}\|, \quad (29)$$

де $q_1 = \frac{\alpha^2 j\omega^2}{2} + \frac{j\Gamma\omega^2}{2}, q_2 = \frac{\Gamma j\alpha\omega^3}{3}$. Використовуючи (29) можна показати, що досліджуваний ряд буде збіжний, при виконанні наступної нерівності

$$|\lambda|q_1 + |\lambda|^2 q_2 < 1.$$

Звідси $0 < |\lambda| < \left[\frac{-q_1 + \sqrt{q_1 + 4q_2}}{2q_2} \right] = \lambda_0 > 1$. Покладемо в (14) $\lambda = 1$, отримаємо ω -періодичний розв'язок (21) системи (3). З (29) справедлива нерівність

$$\|y_{k+1}\| \leq a_1 \mu_1^k + a_2 \mu_2^k, \quad (30)$$

$$\text{де } \mu_{1,2} = \frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1}{4} + q_2}, a_1 = \frac{\|y_{-1}\| \mu_2 - \|y_0\|}{\mu_2 - \mu_1}, a_2 = \frac{\|y_{-1}\| \mu_1 - \|y_0\|}{\mu_1 - \mu_2}.$$

З нерівності (30) знайдемо оцінку швидкості збіжності ряду (21) і точного розв'язку рівняння (3):

$$\|y - \bar{y}_m(t)\| \leq \frac{a_1 \mu_1^m}{1 - \mu_1} + \frac{a_2 \mu_2^m}{1 - \mu_2}, \|y\| \leq \|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1 - \mu_1} + \frac{a_2}{1 - \mu_2}. \quad (31)$$

Тоді оцінка для рівняння (1) буде така:

$$\|x\| \leq \frac{1}{1 - \beta \omega} (\|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1 - \mu_1} + \frac{a_2}{1 - \mu_2}),$$

$$\|x - \bar{x}_m\| \leq \frac{1}{1 - \beta \omega} (\frac{a_1 \mu_1^m}{1 - \mu_1} + \frac{a_2 \mu_2^m}{1 - \mu_2}). \quad (32)$$

Вірною є теорема.

Теорема 3.

Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і нерівність (7). Тоді ω -періодичний розв'язок системи (1) має вид (23) та (21), де $y_k(t), k = -1, 0, 1, \dots$ визначаються за формулами (26) – (28). Оцінки швидкості збіжності і точного розв'язку системи (1) має вид (32).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. - № 9. – С. 1516 – 1521.
2. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем дифференциальных уравнений I. II // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, № 4. – С. 82 – 93.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. 270 с.
4. Лаптинский В.Н. К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – 19, № 8. – С. 1335 – 1343.
5. Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 220 с.
6. Завізіон Г.В. Періодичні розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наукові вісті. – 2005. - № 5. – С. 143 – 146.
7. Шкиль Н.И., Зивизион Г.В., Самойленко М.В. Периодические решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 553 – 573.

УДК 517.9

ЗАДАЧА КОШІ НЕЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Г.В.Завізіон, В.В.Ключник

Побудовано асимптотичний розв'язок нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням.

We construct asymptotic solution of a nonlinear of singularly perturbed system of differential equations with a delay.

Вступ.

Сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь із запізненням вивчаються в різних напрямках. Так в [1] пропонуються методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем із запізненням, а в [2] метод кроків з [1] застосовується до лінійних інтегродиференціальних систем рівнянь з сталим запізненням і виродженою матрицею при похідній. Питання існування розв'язку і обґрунтування методу усереднення для багаточастотних крайових задач з сталим запізненням для сингулярно збурених систем вивчалися в [3]. В [4] досліджуються питання існування інтегральних многовидів в лінійних сингулярно збурених диференціально-різницеви рівнянь. За допомогою примежових функцій в [5] інтегруються нелінійні диференціально-різницеві рівняння з малим запізненням. Самі проміжкові функції задовольняють автономну нелінійну систему диференціальних рівнянь або лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь.

В даній статті розглядається нелінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з змінним запізненням. Будуються асимптотичні розв'язки, вигляд яких залежить від кратності коренів характеристичного рівняння і метод дає можливість в явному вигляді записати потрібну кількість наближень розв'язку. Пропонується спосіб побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші нелінійної сингулярно збуреною системи диференціальних рівнянь із змінним запізненням у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

Асимптотичний розв'язок.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x(t, \varepsilon), x(t - \varepsilon \Delta(t), \varepsilon), \varepsilon), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$x(0, \varepsilon) = x_0 \quad (2)$$

де $\varepsilon (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ - малий параметр, $t \in [0; L]$, $\Delta(t)$ - скалярна функція, $f(t, x, y, \varepsilon), x(t, \varepsilon), y = x(t - \varepsilon \Delta(t), \varepsilon), x_0 - n$ - вимірні вектори. Припускаємо виконання умов:

1) вектор $f(t, x, y, \varepsilon)$ має розвинення

$$f(t, x, y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(t, x, y),$$

і вектори $f(t, x, y) (i = 0, 1, \dots)$ мають нескінченну кількість частинних похідних за змінними t, x, y і функція $\Delta(t) \geq 0, t - \varepsilon\Delta(t) \geq 0, \forall t \in [0; L]$;

2) існує ізольований корінь $\vec{x}(t)$ рівняння

$$f_0(t, \vec{x}(t), \vec{x}(t)) = 0,$$

при цьому функція $\vec{x}(t)$ нескінченно-диференційовна на відрізку $[0; L]$ і $x_0 - \vec{x}(0) = \varepsilon\beta(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ обмежена при $\varepsilon \rightarrow 0$, а також $f'_{oy}(t, \vec{x}(t), \vec{x}(t)) \equiv 0$;

3) корені $\lambda_i(t) (i = \overline{1, n})$ характеристичного рівняння

$$\det \|f'_{ox}(t, \vec{x}(t), \vec{x}(t)) - \lambda \cdot E\| = 0$$

різні і ненульові, а також виконується нерівності $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < -\beta < 0, \forall t \in [0; L]$, де $E - n \times n$ одинична матриця; $f'_{ox}(t, \vec{x}(t), \vec{x}(t)), f'_{oy}(t, \vec{x}(t), \vec{x}(t)) (\alpha = 0, 1, \dots)$ матриці, які складені з частинних похідних від компонент вектора $f_\alpha(t, x, y)$ по компонентам відповідно векторів x і y , при $x = \vec{x}(t), y = \vec{y}(t)$.

Вірною є теорема.

Теорема. Якщо виконуються умови 1-3, то формальний розв'язок задачі Коші (1),(2) має вигляд

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n u_i(t, \varepsilon) \Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon) \quad (3)$$

де $v(t, \varepsilon, \varepsilon), u_i(t, \varepsilon)$ - n - вимірні вектори, $\Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon)$ - скалярні функції, які мають розвинення

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} u_{is}(t), \quad \Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_{is}(t, \varepsilon), \quad v(t, \varepsilon, \varepsilon) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \sum_{s=2}^{\infty} \varepsilon^s v_s(t, \varepsilon), \quad (4)$$

де $\Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\varepsilon \Pi'_{is}(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) \Pi_{is}(t, \varepsilon) + \xi_{is}(t, \varepsilon), \quad (5)$$

$\lambda_i(t), \xi_{is}(t, \varepsilon)$ - скалярні функції.

Доведення. Скориставшись (3),(4) розвинемо за степенями параметра ε вектор

$$\begin{aligned} f(t, v(t, \varepsilon, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n u_i(t, \varepsilon) \Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon), v(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n u_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) \Pi_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon, \varepsilon), \varepsilon) = \\ = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha (f_\alpha(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} (f'_{sx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) (v_{\alpha-s}(t) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha-1-s} u_{ij}(t) \Pi_{i, \alpha-1-s-j}(t, \varepsilon)) + f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) (v_{\alpha-s}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha-1-s} u_{ij}(t - \varepsilon\Delta(t)) \Pi_{i, \alpha-1-s-j}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon)) + g_{1\alpha}(t, \varepsilon) + g_{2\alpha}(t, \varepsilon)), \quad (6) \end{aligned}$$

Де $g_{1\alpha}(t, \varepsilon) = g_{1\alpha}(t, v_l(t), v_l(t - \varepsilon\Delta(t))), g_{2\alpha}(t, \varepsilon) = g_{2\alpha}(t, v_l(t), v_l(t - \varepsilon\Delta(t))), p_{l1}(t, \varepsilon), p_{l1}(t - \varepsilon\Delta(t))$ - многочлени степеня α відносно вказаних аргументів, причому другий многочлен не містить одночлена нульового степеня відносно аргументів $p_{l1}(t, \varepsilon), p_{l1}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) (l = \overline{1, \alpha}, \overline{1} = \overline{0, \alpha - 2})$; під $p_{l1}(t, \varepsilon)$ розуміють аргументи вигляду $u_{ij}(t) \Pi_{i, l-1-j}(t, \varepsilon) (j = \overline{0, l-1})$, а під $p_{l1}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon)$ розуміємо аргумент вигляду $u_{ij}(t - \varepsilon\Delta(t)) \Pi_{i, l-1-j}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon)$. Підставляючи (3)-(6) в (1) і зрівнюючи вирази, які містять $\Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon), \Pi_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon, \varepsilon)$, і які їх не містять, одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon v'(t, \varepsilon) &= f_1(t, v(t, \varepsilon)) + \sum_{i=1}^n u_i(t, \varepsilon) \Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon), v(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \\ &+ \sum_{i=1}^n u_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) \Pi_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sum_{i=1}^n ((f'_{\alpha x}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i0}(t) - u_{i0}(t) \lambda_i(t)) \Pi_{i0}(t, \varepsilon)) + \\ &\sum_{s=2}^{\infty} \varepsilon^s \left(\sum_{i=1}^n ((f'_{0x}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-1}(t) - u_{i, s-1}(t) \lambda_i(t) + \right. \\ &+ f'_{1x}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-2}(t) + u'_{i, s-2}(t) + \sum_{j=2}^{s-1} f'_{jx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-1-j}(t)) \Pi_{i0}(t, \varepsilon) + \\ &\left. + (f'_{1y}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-2}(t - \varepsilon\Delta(t)) + \right. \\ &+ \sum_{j=2}^{s-1} f'_{j, y}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-1-j}(t - \varepsilon\Delta(t)) \Pi_{i0}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \sum_{j=0}^{s-1} u_{ij}(t) \xi_{i, s-1-j}(t, \varepsilon)) + \\ &\left. + g_{2s}(t, \varepsilon) \right) + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon^s \left(\sum_{k=0}^{s-1-j} f'_{kx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-1-k-j}(t) + u'_{i, s-2-j}(t) \right) \Pi_{ij}(t, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=0}^{s-1-j} f'_{kx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) u_{i, s-1-k-j}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) \Pi_{ij}(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} &f_1(t, v(t, \varepsilon)) + \sum_{i=1}^n u_i(t, \varepsilon) \Pi_i(t, \varepsilon, \varepsilon), v(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \sum_{i=1}^n u_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) \Pi_i(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varepsilon^\alpha (f_\alpha(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} f'_{sx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) v_{\alpha-s}(t) + \\ &+ \sum_{s=1}^{\alpha-1} f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) v_{\alpha-s}(t - \varepsilon\Delta(t))) + \sum_{\alpha=2}^{\infty} \varepsilon^\alpha g_{1\alpha}(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Розвинемо за степенями параметра ε наступні функції

$$\begin{aligned} v_s(t - \varepsilon\Delta(t)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{v}_{sj}(t), u_{is}(t - \varepsilon\Delta(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{u}_{isj}(t), \\ \exp(\varepsilon^{-1} \int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_i(\tau) d\tau) &= \exp(-\Delta(t) \lambda_i(t)) (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \bar{\lambda}_{ij}(t)), \end{aligned} \tag{9}$$

$$f_s(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon\Delta(t))) = f_s(t, v_0(t), v_0(t)) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j (f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t)) \bar{v}_{0j}(t) + \bar{g}_{sj1}(t)),$$

де

$$\bar{v}_{s0}(t) = v_s(t), \bar{u}_{is0}(t) = u_{is}(t), \bar{v}_{sj}(t) = (-1)^j v_s^{(j)}(t) \Delta^j(t), \bar{u}_{isj}(t) = (-1)^j u_{is}^{(j)}(t) \Delta^j(t);$$

$$\bar{\lambda}_{i1}(t) = \Delta^2(t) \lambda'(t), \bar{\lambda}_{i2}(t) = \frac{\Delta^3(t)}{2!} \left(\frac{1}{4} \Delta'(t) (\lambda'(t))^2 - \frac{1}{3} \lambda''(t) \right); \bar{g}_{sj1}(t) = 0,$$

при $j = 0, 1$ і $\bar{g}_{sj1}(t) = \bar{g}_{sj}(t)$ при $j \geq 2$; $v_s^{(j)}(t)$ означає j похідну від $v_s(t)$; $\bar{g}_{sj}(t) = \bar{g}_{sj}(\bar{v}_{01}(t) \dots \bar{v}_{0j}(t))$ многочлен від вказаних аргументів. Позначимо

$$\bar{f}_{sx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t))) = \frac{1}{\varepsilon} (f'_{sx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t))) - f'_{sx}(t, v_0(t), v_0(t))),$$

$$\bar{f}_{sy}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t))) = \frac{1}{\varepsilon} (f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t))) - f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t))). \quad (10)$$

Підставляючи (4), (9), (10) в (7) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , маємо

$$f_0(t, v_0(t), v_0(t)) = 0, \quad (11)$$

$$v'_0(t) = f'_{0x}(t, v_0(t), v_0(t))v_1(t) + f_1(t, v_0(t), v_0(t)), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v'_{\alpha-1}(t) = & f_{\alpha}(t, v_0(t), v_0(t)) + \left(\sum_{s=1}^{\alpha-1} f'_{sy} \bar{v}_{0, \alpha-s}(t) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} \bar{g}_{s, \alpha-s, 1}(t) \right) + \\ & + f'_{0x}(t, v_0(t), v_0(t))v_{\alpha}(t) + \sum_{s=1}^{\alpha-1} f'_{sx}(t, v_0(t), v_0(t))v_{\alpha-s}(t) + \\ & + \sum_{s=0}^{\alpha-2} \bar{f}_{sx}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t)))v_{\alpha-1-s}(t) + \sum_{s=1}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\alpha-1-s} f'_{sy}(t, v_0(t), v_0(t)) \bar{v}_{\alpha-s, \alpha-1-s-j}(t) + \\ & + \sum_{s=1}^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\alpha-2-s} \bar{f}_{sy}(t, v_0(t), v_0(t - \varepsilon \Delta(t))) \bar{v}_{\alpha-s, \alpha-2-s-j}(t) + g_{1\alpha}(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Згідно умови 2, покладемо в (11)

$$v_0(t) = \bar{x}(t).$$

Тоді використовуюючи умову 3 з рівнянь (12), (13) знайдемо

$$\begin{aligned} v_1(t) = & (f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)))^{-1} (\bar{x}'(t) - f_1(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t))), \\ v_{\alpha}(t, \varepsilon) = & (f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)))^{-1} (v'_{\alpha-1}(t) - f_{\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) - \\ & - \left(\sum_{s=1}^{\alpha-1} f'_{sy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) \bar{v}_{0, \alpha-s}(t) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} \bar{g}_{s, \alpha-s, 1}(t) - \sum_{s=1}^{\alpha-1} f'_{sx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t))v_{\alpha-s}(t) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=0}^{\alpha-2} \bar{f}_{sx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t - \varepsilon \Delta(t)))v_{\alpha-1-s}(t) - \sum_{s=1}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\alpha-1-s} f'_{sy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) \bar{v}_{\alpha-s, \alpha-1-s-j}(t) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\alpha-2-s} \bar{f}_{sy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t - \varepsilon \Delta(t))) \bar{v}_{\alpha-s, \alpha-2-s-j}(t) - g_{1\alpha}(t, \varepsilon) \right), \alpha \geq 2 \end{aligned}$$

Із рівнянь (5) знайдемо, що

$$\begin{aligned} \Pi_{i0}(t, \varepsilon) = & \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0}, \\ \Pi_{is}(t, \varepsilon) = & \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{is} + \bar{\Pi}_{is}(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\bar{\Pi}_{is}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^t \exp(\varepsilon^{-1} \int_{t_1}^t \lambda_i(\tau) d\tau) \xi_{is}(t_1, \varepsilon) dt_1, s = 1, 2, \dots, i = \overline{1, n}.$$

Врахувавши (3),(4) і початкову умову (2) величини $c_{is}, i = \overline{1, n}, s = 0, 1, \dots$, однозначно знаходимо з рівнянь

$$v_0(0) + \varepsilon \sum_{i=1}^n u_{i0} \Pi_{i0}(0, \varepsilon) + \varepsilon v_1(0) = x_0, \quad (15)$$

$$v_s(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{s-1} u_{ir}(0) \Pi_{i,s-1-r}(0, \varepsilon) = 0, s = 2, 3, \dots$$

Підставивши (14) в (8) і зробивши спрощення маємо рівняння

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \varepsilon ((f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i0}(t) - u_{i0}(t) \lambda_i(t)) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0}) + \\ & + \varepsilon^2 ((f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i1}(t) - u_{i1}(t) \lambda_i(t) + f'_{1x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i0}(t) + u'_{i0}(t)) \times \\ & \times \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0} + f'_{1y}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i0}(t) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0}) + \\ & + \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^s (((f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-1}(t) - u_{i,s-1}(t) \lambda_i(t) + f'_{1x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-2}(t) + u'_{i,s-2}(t) + \\ & + \sum_{j=2}^{s-1} f'_{jx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-1-j}(t)) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0} + \\ & + (f'_{1y}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-2}(t) + \sum_{j=2}^{s-1} f'_{jy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-1-j}(t) + \\ & + \sum_{j=1}^{s-2} \sum_{l=1}^{s-2-j} f'_{jy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) \bar{u}_{i,s-2-j,l}) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0}) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon^s (((f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-l-1}(t) - u_{i,s-l-1}(t) \lambda_i(t) + f'_{1x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-l-2}(t) + \\ & + u'_{i,s-l-2}(t) + \sum_{j=2}^{s-1} f'_{jx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-1-j}(t)) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{il} + (f'_{1y}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-l-2}(t) + \\ & + \sum_{j=2}^{s-1} (f'_{jy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i,s-1-l-j}(t) + \sum_{j=1}^{s-2} \sum_{r=1}^{s-2-j} f'_{jy}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) \bar{u}_{i,s-2-j-l,r}) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_i(\tau) d\tau) c_{il}) + \\ & + \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 (u_{i0}(t) \xi_{i1}(t, \varepsilon) + g_{22}(t, \varepsilon) + \\ & + \bar{f}'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))) u_{i0}(t) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{i0} + (f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i0}(t) - \\ & - u_{i0}(t) \lambda_i(t)) \bar{\Pi}_{i1}(t, \varepsilon) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k (u_{i0}(t) \xi_{i,k-1}(t, \varepsilon) + \\ & + \sum_{j=1}^{k-2} u_{i,j}(t) \xi_{i,k-1-j}(t, \varepsilon) + g_{2k}(t, \varepsilon) + (f'_{0x}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t)) u_{i0}(t) - u_{i0}(t) \lambda_i(t)) \bar{\Pi}_{i,k-1}(t, \varepsilon) + \\ & + \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-s} f'_{sx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))) u_{i0}(t) \exp(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau) c_{is}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon\Delta)u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j} + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}f_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta))\bar{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j} \\
& + \sum_{s=2}^k(\sum_{j=0}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}(t) - u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t) + u'_{i,s-2})\bar{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon) + \\
& + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{l=1}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{isl}(t)\bar{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)) \tag{16}
\end{aligned}$$

Підставляючи розвинення функції $\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)$ в степеневий ряд по ε в рівняння (16) і в одержаному рівнянні згрупуємо вирази при степенях ε , маємо рівняння для знаходження функцій $u_{is}(t)(s=0,1,\dots)$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t) - u_{i0}(t)\lambda_i(t)) + \\
& + \varepsilon^2(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i1}(t) - u_{i1}(t)\lambda_i(t) + f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t) + u'_{i0}(t) + \\
& + f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))) + \\
& + \sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1}(t) - u_{i,k-1}(t)\lambda_i(t) + f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-2}(t) + u'_{i,k-2}(t) + \\
& + \sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)) + (f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-2}(t) + \\
& + \sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t) + \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,k-2-j,l}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)) + \\
& + \sum_{m=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{m-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,m-1-j}(t) + \sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,m-2-j,l}(t)) \times \\
& \times \exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\bar{\lambda}_{i,k-m}(t))) = 0 \tag{17}
\end{aligned}$$

З рівняння випливає, що $\xi_{is}(t,\varepsilon)(s=0,1,\dots)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2(g_{22}(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^n(u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon) + \\
& + f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0} + (f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t) - \\
& - u_{i0}(t)\lambda_i(t))\bar{\Pi}_{i1}(t,\varepsilon)) + \sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k(g_{2k}(t,\varepsilon) + \\
& + \sum_{i=1}^n(u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{k-2}u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon) + (f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t) - u_{i0}(t)\lambda_i(t))\bar{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon) + \\
& + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}f_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j} + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}f_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))\bar{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j} \\
& + \sum_{s=2}^k(\sum_{j=0}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}(t) - u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t) + u'_{i,s-2})\bar{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon) + \\
& + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{l=1}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{isl}(t)\bar{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon\Delta(t))\bar{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l}+\sum_{s=2}^k\left(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)))u_{i,s-1-j}(t)-\right. \\
 & \left.-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t)+u'_{i,s-2}(t)\right)\bar{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+ \\
 & +\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{isl}(t)\bar{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , в рівняннях (17),(18), одержимо рівняння

$$C(t,\lambda_i)u_{i0}(t)=0, \tag{19}$$

$$C(t,\lambda_i)u_{i1}(t)=-u'_{i0}(t)+F_i(t)u_{i0}(t), \tag{20}$$

$$C(t,\lambda_i)u_{i,k-1}(t)=-u'_{i,k-2}(t)+F_i(t)u_{i,k-2}(t)+F_{i1k}(t), i=\bar{1},n, k=3,4,\dots, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon) & = -\sum_{i=1}^n ((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\bar{\Pi}_{i1}(t,\varepsilon)+ \\
 & + F_{22}(t,\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon) & = -\sum_{i=1}^n ((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\bar{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+ \\
 & + F_{2k}(t,\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}
 C(t,\lambda(t)) & = f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-\lambda(t)E, \\
 F_i(t) & = -f'_{ix}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-f'_{iy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)), \\
 F_{i1k}(t) & = -\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)-\left(\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+\right. \\
 & +\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,k-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))-\sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{m-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,m-1-j}+\right. \\
 & \left.+\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,m-2-j,l}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\right)\bar{\lambda}_{i,k-m}(t),
 \end{aligned}$$

$$F_{22}(t,\varepsilon)=-g_{22}(t,\varepsilon)-\sum_{i=1}^n\bar{f}_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}),$$

$$\begin{aligned}
 F_{2k}(t,\varepsilon) & = -g_{2k}(t,\varepsilon)-\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^{k-2}u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s}f_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\times\right. \\
 & \times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}f_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t\varepsilon\Delta(t)))\bar{u}_{ijl}(t)\times \\
 & \times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l}+\sum_{s=0}^k\left(\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t))+\right. \\
 & \left.+u'_{i,s-2}(t)\right)\bar{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{isl}(t)\bar{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)=0
 \end{aligned}$$

Розглянемо метод розв'язування рівнянь (19)-(21). В зв'язку з умовою 3 покладемо в (19):

$$u_{i0}(t)=\alpha_{i0}(t)\varphi_i(t), i=\bar{1},n, \tag{24}$$

де $\varphi_i(t)$ власні вектора матриці $C(t, \lambda_i), \alpha_{i_0}(t)$ - довільні функції. Умова існування рівняння (20) прийме вигляд

$$(\varphi_i(t), \psi_i(t))\alpha'_{i_0}(t) + (\varphi'_i(t) + F_i(t)\varphi_i(t), \psi_i(t))\alpha_{i_0}(t) = 0, \quad (25)$$

де $\psi_i(t)$ власні вектора матриці $C^*(t, \lambda_i)$, спряженої до матриці $C(t, \lambda_i)$. При виконанні умови в [1], виберемо вектора $\varphi_i(t), \psi_i(t)$ так, щоб виконувалася рівність $(\varphi_i(t), \psi_i(t)) = 1, \forall t \in [0; L]$, що дає можливість однозначно знаходження $\alpha_{i_0}(t), u_{i_0}(t)$ відповідно з рівнянь (25), (24). Припустивши, що $u_{is}(t)$ знайдені при $s < k - 2$, і що

$$u_{is}(t) = \alpha_{i, k-2}(t)\varphi_i(t) + C^+(t, \lambda_i)(u'_{i, k-3}(t) + F_i(t)u_{i, k-3}(t) + F_{i1, k-1}(t)), i = \overline{1, n}, k = 3, 4, \dots \quad (26)$$

Враховуючи (26) умову існування розв'язку рівняння (21) функції $\alpha_{i, k-2}(t)$ однозначно знаходимо з рівняння

$$(\varphi_i(t), \psi_i(t))\alpha'_{i, k-2}(t) + ((\varphi'_i(t) + F_i(t)\varphi_i(t), \psi_i(t))\alpha_{i, k-2}(t) + \left(\frac{d}{dt}(C^+(t, \lambda_i)(u'_{i, k-3}(t) + F_i(t)u_{i, k-3}(t) + F_{i1, k-1}(t)) + F_{i1, k}(t), \psi_i(t))\right) = 0,$$

де $C^+(t, \lambda)$, узагальнено обернена матриця до матриці $C(t, \lambda), i = \overline{1, n}, k = 3, 4, \dots$ Рівняння (22), (23) перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n u_{i_0}(t)\xi_{i, k-1}(t, \varepsilon) = -\sum_{i=1}^n C(t, \lambda_i)u_{i_0}(t)\overline{\Pi}_{i, k-1}(t, \varepsilon) + F_{2k}(t, \varepsilon), k = 2, 3, \dots \quad (27)$$

Враховуючи рівняння (19) рівняння з (27) знайдемо

$$\xi_{k-1}(t, \varepsilon) = -U_0^{-1}(t)F_{2k}(t, \varepsilon), k = 2, 3, \dots$$

де $\xi_{k-1}(t, \varepsilon) - n$ вимірний вектор з координатами $\xi_{i, k-1}(t, \varepsilon), U_0(t) - n \times n$ матриця, стовбцями, якої є вектора $u_{i_0}(t) (i = \overline{1, n})$. Теорема доведена.

Таким чином, пропонується спосіб побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші сингулярно збуреної системи нелінійних диференціальних рівнянь із зміним запізненням.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - Киев: Наук. думка, 1981.-196с.
2. Завизион Г. В. Линейная система интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известие вузов.-2003.-Т.494, №7.-С.64-69.
3. Бігун Я. Й. Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн.-2004.-Т.56, №2.-С. 257-263.
4. Perestyuk M. O., Cherevko I. M. Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations.-2001.-Т.4, №3.-Р.345-353.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.- М.: Наука, 1973.-272с.

УДК 681.3.07

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ Д ЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА

С.Т.Кузнецов, Н.В.Столярчук

Широко розповсюджена думка про те, що будь-яка окремо взята проблема може бути вирішена комп'ютерним шляхом перевірки всіх варіантів і вибору кращого з них. Таким чином, вважається, що штучний інтелект знаходить кращий спосіб поведінки. У даній статті ми подаємо три приклади відносно нескладних задач, розв'язання яких зайняло б кілька десятиліть, навіть на комп'ютері у десять разів потужнішому, ніж ті, що існують зараз. Це означає, що повинна бути знайдена альтернатива даному методу.

There is wide-spread thought, that every discrete problem can be solved with a computer by checking all the variants and choosing the best one. So, the artificial intelligence is considered to find the best way of behavior also this way. But in this article we give three examples of not complicated problems, which solving would take several decades, even on a computer, ten times faster, than those which exist now. It means that an alternative to this method must be found.

Введение. Человеку, используя свой мыслительный аппарат, часто приходится решать так называемые задачи выбора.

Для задач выбора характерны следующие свойства:

- конечность множества вариантов выбора (ходы в игре, маршруты движения и т.п.);
- каждому варианту сопоставлена количественная характеристика;
- требуется выбрать вариант, который обладает тем свойством, что его числовая характеристика удовлетворяет некоторому заранее сформулированному условию, или ответить на вопрос о существовании такого варианта.

Наиболее очевидный метод их решения – поочередно пересмотреть все варианты и выбрать требуемый. Здесь применение компьютера кажется наиболее естественным и целесообразным. Ведь с его помощью можно обработать такое количество вариантов, которое нельзя обозреть вручную.

И всё же часто в решении интеллектуальных задач компьютеры выходят сущими тугодумами. Данное несоответствие возможностей компьютера реальному положению вещей удивляет лишь на первый взгляд. Окончательные выводы мы постараемся сделать после последовательного рассмотрения специально подобранных для этой цели трёх задач, которые успели, пожалуй, уже стать классическими.

1. Задача Эйнштейна.

Условие.

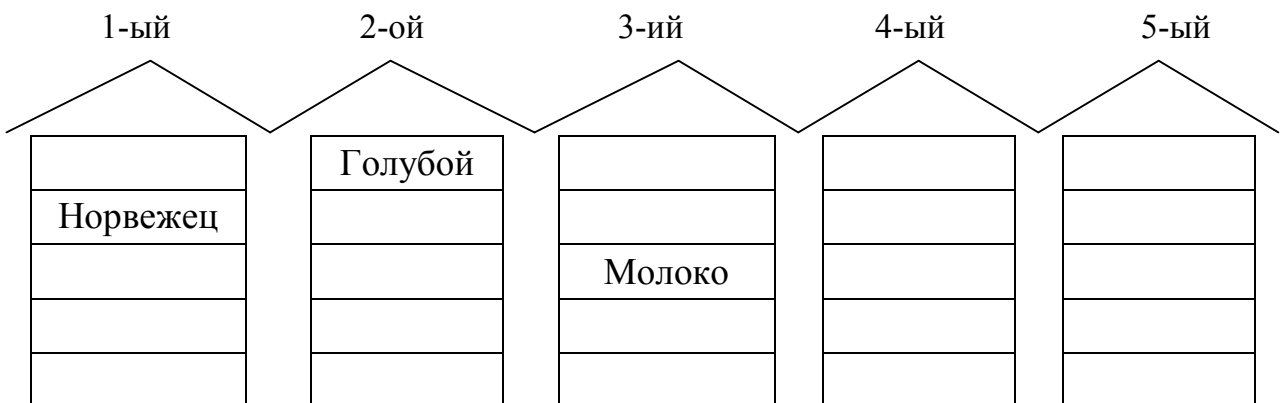
1. Есть 5 домов, стоящих в ряд.
2. В каждом доме живёт по одному человеку отличной от другой национальности.
3. Каждый жилец пьёт только один определённый напиток, курит определённую марку сигарет и держит животное.
4. Никто из пяти человек не пьёт одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Вопрос: Чья рыба?

Подсказки:

1. Англичанин живёт в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьёт чай.
4. Зелёный дом стоит возле белого.
5. Жилец зелёного дома пьёт кофе.
6. Человек, который курит Pallmall, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьёт молоко.
8. Жилец из жёлтого дома курит Dunhill.
9. Норвежец живёт в первом доме.
10. Курильщик Marlboro живёт около того, кто держит кошку.
11. Человек, который держит лошадь, живёт около того, кто курит Dunhill.
12. Курильщик Winfield пьёт пиво.
13. Норвежец живёт около голубого дома.
14. Немец курит Rothmans.

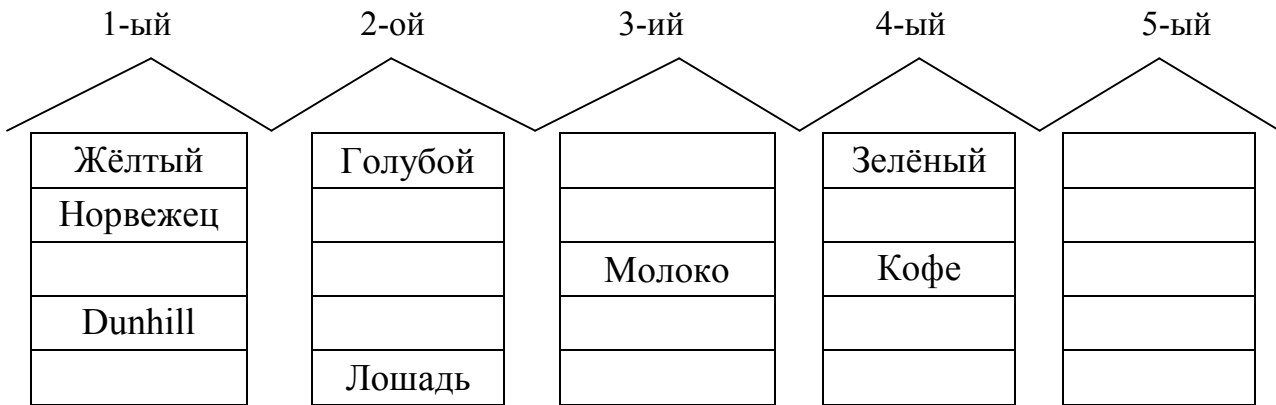
Решение.



Изобразим условно пять домов. В первой строке будем писать цвет дома, во второй – национальность жильца. В третьей – напиток, в четвёртой – марку сигарет, в пятой – животное.

Первые две записи делаем на основании подсказок «7» и «9». После этого на основании подсказки «13» однозначно указываем цвет второго дома.

Далее на основании сложившейся ситуации и подсказок «1» и «4» мы видим, что ни один цвет кроме жёлтого (его упоминание имеется в подсказке «8») для дома норвежца не подходит. Указываем его, а заодно, и марку сигарет, которые курит норвежец (подсказка «8»). Далее однозначно определяем, что лошадь содержит жилец голубого дома (подсказка «11»).



Теперь, не нарушая общности, мы можем предположить, что 4-й дом зелёный и его жилец, согласно подсказке «5» пьёт кофе. В этом случае белый дом, независимо от того 3-й это или 5-й окажется рядом. Здесь уместно заметить, что окажется красный дом 3-й (пока мы это не утверждаем и не опровергаем, то перемена местами 4-го (зелёного) и 5-го (белого) домов может не сказаться на ответе на вопрос задачи.

Пришло время обратить внимание на подсказки «3» и «12». Совершенно очевидно, что они относятся к жильцам второго и пятого домов. И если датчанин пьёт чай в пятом доме, то курильщик Winfield пьёт пиво во втором. Или наоборот? Давайте рассуждать. Любитель пива во втором доме. Кто он по национальности? Не норвежец и не датчанин. Не англичанин (см. подсказку «1»). Не швед (см. подсказку «2»). Не немец (см. подсказку «14»). А кто же тогда? Обнаруженное противоречие говорит о том, что однозначно датчанин пьёт чай во втором доме, а курильщик Winfield пьёт пиво в пятом.



Теперь ситуация проясняется. Ни владелец птицы, который курит Pallmall (см. подсказку «6»), ни немец, курящий Rothmans (подсказка «14») не могут жить в 5-ом доме. Следовательно один из них живёт в третьем доме, а другой в четвёртом. Владелец птицы безусловно англичанин, так как швед держит собаку (подсказка «2»). Англичанин живёт в красном доме (подсказка «1»), следовательно в 3-ем зелёном доме немец курит Rothmans, а швед держит собаку в пятом доме белого цвета.

1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
Жёлтый	Голубой	Красный	Зелёный	Белый
Норвежец	Датчанин	Англичанин	Немец	Швед
	Чай	Молоко	Кофе	Пиво
Dunhill		Pallmall	Rothmans	Winfield
	Лошадь	Птица		Собака

Далее обращаем внимание на подсказку «10». Совершенно очевидно, что Marlboro курит датчанин, а его сосед слева, норвежец, держит кошку, т.к. сосед справа, англичанин, держит птицу. И так, **ответ очевиден: «Рыбу держит немец».**

Интересно, что ответив на вопрос задачи мы не узнали двух вещей:

- какой напиток пьёт норвежец;
- правильно ли указано относительное расположение 4-го и 5-го домов.

Но ни об одном, ни о другом нас и не спрашивают.

2. Загадка жрецов бога Ра. По свидетельству С.Тымовского (г.Варшава) в 1912 году известный египтолог В.Т.Детрие при раскопках в дельте Нила обнаружил огромный египетский храм с отлично сохранившимися письменами на стенах [1]. Была там и любопытная математическая загадка. Текст её в вольном переводе египтолога Касперо следующий:

«Эти иероглифы выдолбили жрецы бога Ра. Это стена. За стеной находится колодец Лотоса, как круг Солнца; возле колодца положен один камень, одно долото, две тростинки. Одна тростинка имеет три меры, вторая имеет две меры. Тростинки скрещиваются всегда на поверхности воды колодца Лотоса и эта поверхность является одной мерой выше дна. Кто сообщит числа наидлиннейшей прямой, содержащейся в ободке колодца лотоса, возьмёт обе тростинки и будет жрецом бога Ра...»

Детрие, не сумев решить задачу в одиночку, обратился к математикам. Математики задачу решили, сформулировав её в метрической системе следующим образом.

Колодец – это прямой цилиндр (см. рис.1). Два жёстких прута: один длиной 3 м, второй – 2 м – приставлены к основанию цилиндра и его поверхности таким образом, что их проекции на основание цилиндра – диаметр основания цилиндра. Пруты скрещиваются всегда на уровне зеркала поверхности воды, от которой до дна колодца – один метр. Требуется сообщить диаметр колодца с точностью до 1 см.

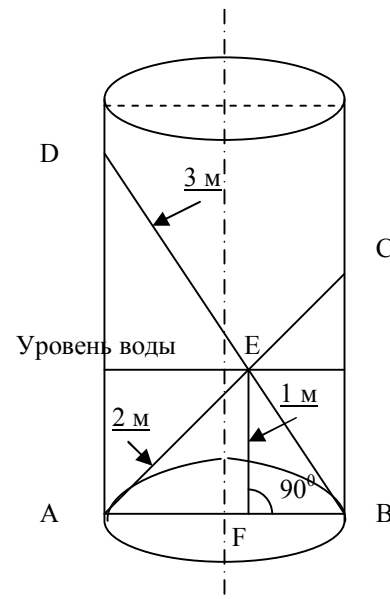


Рис. 1

$$AB = 2 \text{ м}$$

$$BD = 3 \text{ м}$$

$$EF = 1 \text{ м}$$

$$AB = 2R = ?$$

Интересно (и жутко одновременно), что не решивший задачу кандидат в жрецы бога Ра платил за неудачную попытку жизнью. Войдя за стену, он замуровывался в комнате построенной из гранитных глыб и должен был, решив задачу подать выдолбленные на камне цифры числа выражающего диаметр колодца наружу через небольшое окошко. Если ответ оказывался правильным, испытуемый размуровывался и выходил на свободу жрецом бога Ра. А если нет? Подать можно было только один камень: «...если же голод победит твое тело, не выйдешь жрецом Ра. ...Сквозь стену колодца Лотоса прошли многие, но немногие стали жрецами бога Ра. Думай, цени свою жизнь. Так советуют тебе жрецы Ра.»

А что считать правильным ответом задачи? Это вовсе не простой вопрос. А цена его, без преувеличения, жизнь человека.

Сегодня у нас есть абсолютная уверенность в том, что древние египтяне считали, что «... Числа наидлиннейшей прямой содержащейся в ободу колодца Лотоса» есть дробь $\frac{16}{13}$. А в стиле древних египтян она имеет вид

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}$$

На самом деле математикам XX века не трудно было догадаться, что диаметр колодца есть положительный корень уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{h},$$

где h – расстояние от поверхности воды до дна колодца.

В нашем случае $h = 1$; а $x = 1,2311857237786690\dots$

Разумеется, последнее число иррациональное. Мы можем его вычислить с любой точностью, но никогда, никаким способом не можем выразить его точно при помощи цифр. Вот почему по свидетельству С.Тымовского математики долго удивлялись, как могли древние египтяне решить такую задачу. Тем более, что формула для нахождения корней уравнения четвёртой степени была получена лишь в XVI веке (итальянским математиком Феррари – учеником Кардано).

Но как оказалось, основная трудность для наших современников, заключается в том, чтобы отойти от привычной математической модели в виде алгебраического уравнения четвёртой степени и поставить себя на место необременёного математическими знаниями древнего египтянина.

Можно воспроизвести Рис.1 на тетрадном листе в клеточку (сторона клетки 0,5 см.). За единицу выберем 13 клеток, а диаметр АВ возьмём равным 16 клеткам. Таким образом, AC равно 26 клеток, BD равно 29 клеток. Мы видим, что EF равно точно 13 клеткам (?!). На самом деле EF длиннее 13 клеток приблизительно на 0,01 мм. Разумеется, такую погрешность мы не замечаем. Даже если взять за единицу 1 метр (1000 мм.), то теоретически рассчитанная погрешность не превысит 0,16 мм. Для справки: толщина тонкой карандашной линии 0,5 мм.

Вообще говоря, никакие геометрические построения не могут обнаружить разницу между числами 1, 231... и 16/13. Таким образом, египетские жрецы, безусловно, были уверены в *абсолютной* правильности полученного результата. Кроме того этот результат легко получить если правильно взглянуть на вещи. Делая засечки на отрезке, равном диаметру колодца, поделим этот отрезок на четыре части. *Теперь легко увидеть, что в одной мере уместается три четверти и ещё четверть оставшейся четверти диаметра.*

Все эти четверти находятся при помощи деления отрезка пополам. Древние египтяне, безусловно, умели производить такую операцию «на глаз» с довольно высокой точностью. Исторические факты говорят о том, что это явно их стиль. Можно, также, представить себе вполне реальную картину того, как жрецы могли спроектировать такой колодец.

3. Компьютерный замок XXI века. Эта головоломка возникла на рубеже веков. В отличие от известных игры в «15» и кубика Рубика, головоломка «Компьютерный замок XXI века» не может, очевидно, существовать в механическом варианте, а существует только на экране компьютера. Представив себе матрицу из шести строк и восьми столбцов, элементами которой являются либо «звёздочки», либо «точки».

•	*	*	•	•	•	•	*
*	•	•	*	•	•	*	*
•	•	•	*	•	*	•	*
•	•	*	•	•	•	•	*
•	*	•	•	•	•	•	*
*	*	*	*	•	•	•	*

Рис. 2

Это матрица состояний «замка». «Звездочки» в данном случае изображают число 21. Указатель мыши можно установить на элемент, который мы будем инвертировать. Если это «звездочка», то она заменится на «точку», а если «точка», то на «звездочку». Вместе с инверсией указанного элемента инвертируются ещё двенадцать элементов, которые расположены в одной строке и в одном столбце с выбранным. Таким образом, в результате одного хода, своё состояние меняют на противоположное тринадцать элементов. Хотя сделать ход – это значит указать один ключевой элемент. Всё остальное происходит автоматически. Задача заключается в том, чтобы все элементы стали «точками». В этом случае замок считается открытым. Разумеется, задачу интересно решить за наименьшее число ходов.

Было бы естественным представить математическую модель задачи как систему ограничений и целевую функцию задачи булевого линейного программирования.

Между тем существует неожиданно простой матричный способ, который позволяет найти решение данной задачи. Способ легко обобщается на любую матрицу состояний «замка», если числа строк и столбцов чётные. Решение в данном случае существует и оно единственное. В нашей матрице строк шесть, а столбцов восемь. Оба числа чётные. Построим так называемую матрицу зарядов (рис.3).

5	5	5	6	3	4	4	8
5	7	7	6	4	5	4	9
5	6	6	5	3	3	4	8
4	5	4	5	2	3	3	7
4	4	5	5	2	3	3	7
6	7	7	7	5	6	6	10

Рис.3

Для этого в качестве каждого элемента матрицы будем записывать общее число звёздочек в тринадцати элементах строки и столбца соответствующей матрицы состояний (рис.2), пересечение которых образуют данный элемент.

Далее, отмечая единицами в новой матрице нечётные элементы матрицы зарядов получаем состоящую из нулей и единиц матрицу ходов (рис.4).

1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0

Рис.4

Теперь выполняем в любой последовательности двадцать семь ходов и «замок» откроется. В этом легко убедиться, если взглянуть на матрицу результатов (рис.5), в которой будем отмечать число поворотов для каждого соответствующего элемента матрицы состояний (рис.1).

6	7	7	8	6	8	6	7
7	8	8	9	8	8	7	7
6	8	8	7	6	7	6	7
8	8	9	8	8	8	6	7
8	9	8	8	8	8	6	7
7	7	7	7	6	8	6	7

Рис.5

Мы видим, что матрица состояний в результате будет содержать только «точки», так как сопоставление рис.2 и рис.5 позволяет заметить, что все «звёздочки» повернутся *нечетное* число раз, а все «точки» - *чётное*.

Почему алгоритм такой простой? Почему он всегда даёт единственное решение? Конкретный пристальный взгляд на вариант замка с матрицей 6x8 элементов позволяет понять всё. Пусть замок имеет начальное состояние такое как на рис. 2. Выберем по одному разу для хода каждый из 13 элементов третьей строки и четвёртого столбца. Можно убедиться, что после этого просто исчезнет одна «звёздочка», находящаяся на пересечении третьей строки и четвертого столбца. Между тем эта «звездочка» повернулась 13 раз, остальные 7 элементов строки по 8 раз, а остальные 5 элементов столбца по 6 раз. Каждый из 35-ти элементов матрицы не вошедших в строку и столбец повернулся по 2 раза. Теперь ясно, почему в матрице зарядов стоят числа,

дающие в сумме $19 \times 13 = 247$. Такое число ходов нужно для «поэлементного» открытия замка. Совершенно очевидно, что *систему ходов можно минимизировать, заменив чётные числа нулями, а нечётные единицами*. В результате получаем матрицу ходов (рис.4).

Выводы. Если бы при решении первой задачи мы стремились для построения математической модели использовать аппарат формальной логики, который здесь кажется очень уместным, то, наверное, в конце концов и достигли бы успеха, применив компьютер. Однако, «естественный» интеллект оказался куда более эффективным. Говорят, что именно Эйнштейн заметил: «не всё, то что вычисляется можно учесть, и не всё то, что учитывается можно вычислить». На наш взгляд тренировка в решении подобных задач должна стать частью профессионального образования авиационных (да и не только авиационных) менеджеров.

Между постановкой второй и третьей задачами разница во времени 3-4 тысячелетия. Однако обе они показывают, что построение адекватной математической модели ещё не залог лучшего решения. И если для уравнения задачи египетских жрецов существуют общие численные методы решения, то не известно дали бы общие методы решения о компьютерном «замке» намного более эффективный результат, чем при полном переборе. А при полном переборе нужно опробовать, как минимум, $2^{48} - 1 = 2814749767\ 10655$ вариантов, что бы быть уверенным, что задача имеет действительно единственное (уже найденное нами) решение. На тех компьютерах, которыми мы сейчас пользуемся, полный перебор занял бы несколько лет. Эта задача на наш взгляд очень полезна всем тем, кто по той или иной причине изучает приложение методов *системного анализа*.

Основной вывод, который мы теперь можем сделать, заключается в том, что при самой тщательной математической формализации интеллектуальных задач всегда остаётся широкое поле деятельности для интеллекта человека.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. С.Тымовский. Загадка жрецов бога Ра. Журнал «Наука и жизнь», 1'66, стр.136-137; 2'66, стр.127.
2. И.М.Яглом. Алгебры Буля. В кн. О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. Из-во «Просвещение». Москва. 1965г.
3. О.П.Бондарь, С.Т.Кузнецов, Н.В.Столярчук. Задача о назначениях, критерии совместимости работников и справедливости назначений. В научно-теретическом журнале «Искусственный интеллект». 4' 2005.

УДК 532.59

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ФАКТОРІВ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ ТА ЛІКВІДНОСТІ У КОМЕРЦІЙНИХ БАНКАХ

В.А.Кушнір, В.П. Кравченко, Г.А.Кушнір

Розглянуто вплив факторів на платоспроможність та ліквідність комерційного банку. Кластерним аналізом здійснено ранжирування факторів по ступеню їх впливовості.

Influence of factors is considered on solvency and liquidity of commercial bank. A cluster analysis is carrying out ranging of factors on the degree of their influential ness.

Ліквідність – важлива якісна характеристика діяльності банку, яка свідчить про його надійність і стабільність. Без ліквідності банк не може виконувати свої функції і проводити операції з обслуговування клієнтів, тому вирішення проблем ліквідності повинно мати найвищий пріоритет у роботі банку. Ліквідність банку впливає на його платоспроможність. В банківській практиці ліквідність є одним із основних і найбільш важких факторів, який визначає його фінансову стійкість. За допомогою математичної оцінки факторів платоспроможності та ліквідності можна виявити їх стійкість, визначити тенденції розвитку, та звернути увагу на слабкі місця і посилити розвиток ефективних напрямів роботи. Тож оцінка платоспроможності та ліквідності банку є потрібною як для керівництва банку, щоб знати результати своєї роботи, так і для клієнта.

Метою даної роботи є застосування кластерного аналізу для встановлення впливу факторів на платоспроможність та ліквідність банку.

Платоспроможність та ліквідність банку оцінюється шляхом розрахунку спеціальних показників:

- норматив адекватності регулятивного капіталу/платоспроможності Н2;
- норматив адекватності основного капіталу Н3;
- норматив миттєвої ліквідності Н4;
- норматив поточної ліквідності Н5;
- норматив строкової ліквідності Н6.

Дані показники включають наступні групи факторів табл.1

Таблиця 1

Групи факторів платоспроможності та ліквідності

Показник	Фактори показника	Нормативне значення (вимоги НБУ)
Норматив адекватності регулятивного капіталу Н2 (платоспроможності)	x_1 - Регулятивний капітал; x_2 - Грошові кошти та залишки в НБУ; x_3 - Кошти в інших банках; x_4 - Цінні папери у портфелі банку;	Не менше, 8%

	x_5 - Кредитний портфель; x_6 - Необоротні активи.	
Норматив адекватності основного капіталу Н3	x_1 - Статутний капітал; x_2 - Резерви та фонди; x_3 - Емісійні різниці; x_4 - Загальні активи;	Не менше, 4%
Норматив миттєвої ліквідності Н4	x_1 - Високоліквідні активи (кошти у касі та на кореспондентських рахунках); x_2 - Кошти НБУ; x_3 - Кошти банків (поточні рахунки); x_4 - Кошти бюджету та позабюджетних фондів; x_5 - Поточні кошти фізичних осіб.	Не менше 20 %
Норматив поточної ліквідності Н5	x_1 - Високоліквідні активи (кошти до запитання, готівкові кошти, банківські метали, строкові депозити розміщені в НБУ, кошти на кореспондентських рахунках в НБУ, надані кредити); x_2 - Боргові цінні папери, що рефінансуються та емітовані НБУ; x_3 - Цінні папери на продаж; x_4 - Цінні папери власного боргу; x_5 - Кошти банків (до запитання); x_6 - Кошти бюджету.	Не менше 40%

Для визначення впливовості факторів за допомогою кластерного аналізу використовували статистичні данні банків Києва (табл.2). [1]

Таблиця 2

Норматив адекватності регулятивного капіталу Н2, млн. грн.

Фактори	2002 р.	2003 р.	2004 р.	2005 р.
x_1 - Регулятивний капітал	268,690	594,500	891,400	1254,000
x_2 - Грошові кошти та залишки в НБУ	517,936	497,752	654,828	1058,608
x_3 - Кошти в інших банках	535,611	482,990	1164,632	909,940
x_4 - Цінні папери у портфелі банку	1579,863	322,509	310,991	330,185
x_5 - Кредитний портфель	2156,000	4670,057	7500,000	8600,000
x_6 - Необоротні активи	302,076	463,666	651,044	920,483

Норматив адекватності основного капіталу Н3, млн.грн

Фактори	2002 р.	2003 р.	2004 р.	2005 р.
x_1 - Статутний капітал	210,000	500,000	800,000	1000,000
x_2 -Резерви та фонди	7,521	14,425	90,348	102,054
x_3 -Емісійні різниці	0	0	2,898	2,508
x_4 -Загальні активи	5095,042	5978,275	9929,038	11859,442

Норматив адекватності миттєвої ліквідності Н4, млн. грн.

Фактори	2002 р.	2003 р.	2004 р.	2005 р.
x_1 -Високоліквідні активи	440,449	609,353	1473,883	1779,955
x_2 -Кошти НБУ	31,870	74,217	421,073	637,822
x_3 - Кошти банків(поточні рахунки)	99,644	224,215	999,262	1053,073
x_4 - Кошти бюджету та позабюджетних фондів	863,646	553,620	158,795	207,877
x_5 -Поточні кошти фізичних осіб	370,748	716,258	1150,916	1206,780

Норматив адекватності поточної ліквідності Н5, млн. грн.

Фактори	2002 р.	2003 р.	2004 р.	2005 р.
x_1 -Високоліквідні активи	440,449	609,353	1473,883	1779,955
x_2 -Боргові цінні папери, що рефінансуються та емітовані НБУ	31,870	74,217	421,073	637,822
x_3 -Цінні папери на продаж	99,644	224,215	999,262	1053,073
x_4 -Цінні папери власного боргу	863,646	553,620	158,795	207,877
x_5 - Кошти банків (до запитання);	370,748	716,258	1150,916	1206,780
x_6 Кошти бюджету	3194,488	2377,130	2365,747	2635,240

На основі наведених факторів за допомогою кластерного аналізу визначався їх вплив на об'єкт дослідження. Вихідним статистичним матеріалом багатомірного впорядкування факторів є матриця x , у якій строками є фактори, а стовпчиками – роки, які характеризують:

$$\begin{aligned} & x_{11}x_{12}\dots x_{1n}; \\ & x_{21}x_{22}\dots x_{2n}; \\ & \dots\dots\dots; \\ & x_{m1}x_{m2}\dots x_{mn}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

де x_{ij} - значення j – го показника, який вимірюється в i – му році: $i=1,2,\dots, m, j=1,2,\dots, n, n$ - кількість виміряних кількісно параметрів; m - роки, які аналізуються.

На основі матриці формували матрицю багатомірних відстаней між парами факторів, які були включені до упорядкування. Оскільки фактори

мають різні одиниці виміру, у цьому випадку для подальшої реалізації алгоритму приводили їх у безрозмірний вигляд за допомогою формули:

$$z_y = \frac{x_y}{\bar{x}_j} \quad (1.2)$$

де z_y - нормована ознака j для i - го року; x_y - вихідні значення j - го фактора на i - му році, \bar{x}_j - середньоарифметичне значення j - го фактора.

У результаті перетворення (1.1) визначаємо матрицю:

$$\begin{array}{l} z_{11} z_{12} \dots z_{1n}; \\ z_{21} z_{22} \dots z_{2n}; \\ \dots\dots\dots; \\ z_{m1} z_{m2} \dots z_{mn}. \end{array} \quad (1.3)$$

На основі матриці (1.3) формуємо матрицю багатомірних відстаней між парами об'єктів, які включені до упорядкування. В подальшому визначалась багатомірна евклідова відстань кожного фактору до еталону:

$$d_{io} = \left[\sum_{j=1}^n (z_{y} - z_{oj})^2 \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Сукупність відстаней між парами факторів має вигляд симетричної матриці розміром $m * n$:

$$\begin{array}{l} d_{11} d_{12} \dots d_{1m}; \\ d_{21} d_{22} \dots d_{2m}; \\ \dots\dots\dots; \\ d_{m1} d_{m2} \dots d_{mm}. \end{array} \quad (1.5)$$

Оскільки матриця симетрична, то відстань буде $d_{kp} = d_{pk}; i = 1, 2, \dots, m$.

На основі матриці відстаней (1.5) використовували наступний алгоритм багатомірного впорядкування факторів.

1. Вибираємо з матриці мінімальний елемент (крім діагональних).
2. Поєднуємо найбільш близькі фактори в одну групу і надаємо їй номер групи з найменшим значенням.
3. Перераховуємо відстань до знов відтвореного фактора до інших факторів:

$$d_{ir} = 1 / (n_i + n_r) [(n_i + n_p) d_{ip} + (n_i + n_q) d_{iq} - n_i d_{pq}], \quad (1.6)$$

де $n_r = n_p + n_q$, n_i - кількість об'єктів у групі i , від якої визначаємо відстань знов відтвореної групи.

Таким чином, розраховуємо алгоритм доти поки дві групи факторів не поєднуються в один клас. Результати впорядкування надаємо графічно у вигляді дендограми. На осі відкладаємо евклідові відстані d_{io} між факторами, під нею будуємо дендограми. Зліва - номери факторів, які поєднуються. Виділяємо групи факторів і визначаємо типового представника даної групи. Типового представника, тобто найбільш розвиненого фактора у банках визначали за допомогою побудови матриці усіх парних відстаней між

факторами які увійшли у групи. Далі визначали суми відстаней по строкам і по мінімальній встановлювали типового представника групи.

Розраховуємо середнє значення евклідової відстані до усіх факторів за формулою:

$$\bar{d}_o = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m d_{io} \quad (1.7)$$

Середньоквадратичне відхилення багатомірних відстаней визначалося за формулою:

$$s_o = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (d_{io} - \bar{d}_o)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.8)$$

та параметр d_o :

$$d_o = \bar{d}_o + 2s_o \quad (1.9)$$

Таксономічний коефіцієнт рівня кожного фактору розраховуємо за формулою:

$$\eta_i = 1 - \frac{d_{io}}{d_o}, \quad (1.10)$$

за допомогою якого встановлюється ступінь розвиненості факторів.

Ступінь розвиненості впливових факторів на платоспроможність і ліквідність та їх взаємодія визначалося кластерним аналізом, шляхом побудови матриці багатомірних відстаней між факторами.

Фактори оцінювались по евклідовій відстані за одержаними розрахунками і будувались дендрограми упорядкування факторів з визначенням груп та їх типових представників, шляхом поділу дендрограми на класи.

Після проведення розрахунків за вище викладеною методикою були отримані наступні результати які наведені у таблиці 3.

Типовий представник першої групи Н2 (нормативу адекватності регулятивного капіталу) є x_1 – регулятивний капітал, оскільки розрахункові дані показали що він знаходиться найближче до осі серед усіх показників, тобто це підтверджується тим, що регулятивний капітал є найважливішим фактором даного показника серед інших факторів. До другої групи факторів слід віднести x_3 – кошти в банках. Найвіддаленішим фактором від осі є кредитний портфель, це значить, що банк регулятивним капіталом здатний покрити негативні наслідки ризику неповернення кредитів.

Типовий представник першої групи Н3 (норматив адекватності основного капіталу) є x_2 –резерви та фонди, так як даний кластер має найменше значення серед інших кластерів і на евклідовій відстані знаходиться найближче до осі. Представником другої групи є x_4 –загальні активи. Це підтверджується тим, що загальні резерви, які створюються під невизначений ризик при проведенні банківських операцій відіграють важливу роль у

спроможності банку захистити кредиторів від непередбачуваних ризиків, яких може зазнати банк у процесі своєї діяльності.

Таблиця 3

Показник	Середнє значення евклідової відстані до усіх факторів	Середньо-квдратичне відхилення багатомірних відстаней	Таксономічні коефіцієнти рівня факторів	Типовий представник:
Норматив адекватності регулятивного капіталу Н2	$d_0 = 228,37$	$S_0 = 367.9$	$\eta_{16} = 0,98;$ $\eta_{12} = 0,95;$ $\eta_{23} = 0,97;$ $\eta_{14} = 0,77;$ $\eta_{15} = -0,1;$	- першої групи x_1 – регулятивний капітал; - другої групи x_3 – кошти в інших банках.
Норматив адекватності основного капіталу Н3	$d_0 = 291,6$	$S_0 = 367.9$	$\eta_{23} = 0,99;$ $\eta_{12} = 0,93;$ $\eta_{14} = -0,08$	-першої групи x_2 – резерви та фонди; -другої групи x_4 – загальні активи.
Норматив адекватності миттєвої ліквідності Н4	$d_0 = 207,57$	$S_0 = 251$	$\eta_{15} = 0,92;$ $\eta_{16} = -0,1;$ $\eta_{23} = 0,91;$ $\eta_{12} = 0,75$ $\eta_{24} = 0,78;$	-першої групи x_1 – високоліквідні активи; -другої групи x_3 – кошти банків (поточні рахунки)
Норматив адекватності поточної ліквідності Н5	$d_0 = 260,3$	$S_0 = 251$	$\eta_{34} = 0,92;$ $\eta_{15} = 0,83;$ $\eta_{26} = 0,75;$ $\eta_{21} = -0,03;$ $\eta_{23} = 0,43$	-першої групи x_3 – цінні папери на продаж; -другої групи x_5 – кошти банків (до запитання);

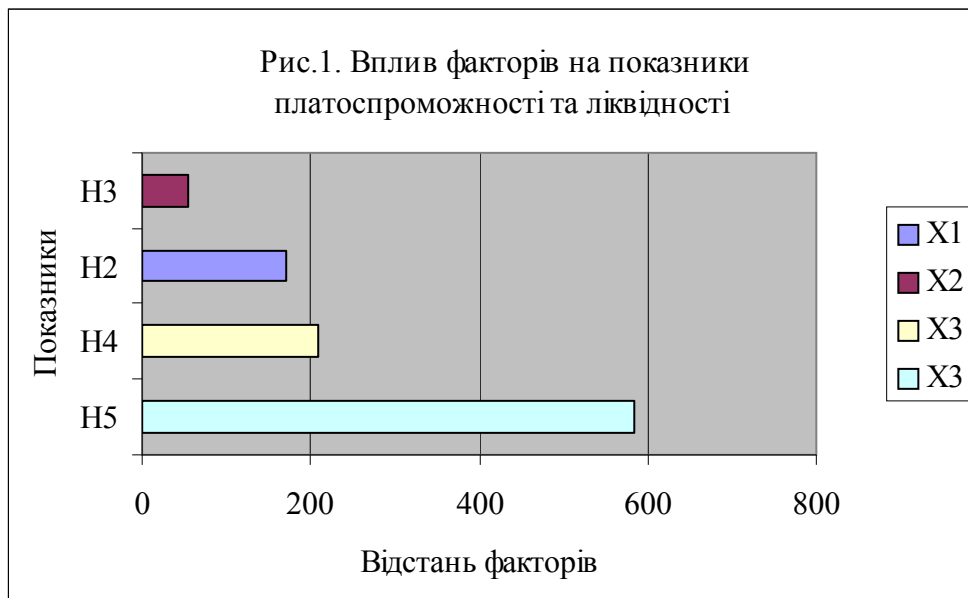
Типовий представник першої групи Н4 (норматив адекватності миттєвої ліквідності) є x_1 -високоліквідні активи, другої x_3 -кошти банків (поточні рахунки). Найближчим фактором до осі є високоліквідні активи, найвіддаленішим – поточні кошти юридичних осіб. А це значить, що банк здатний забезпечити своєчасне виконання своїх грошових зобов'язань за рахунок високоліквідних активів.

Типовий представник першої групи Н5 (норматив адекватності поточної ліквідності) є x_3 - цінні папери на продаж, другої x_5 - кошти банків (до запитання). Найближчим фактором до осі є цінні папери на продаж, найвіддаленішим – високоліквідні активи. Таким чином, банк здатний

визначити збалансованість строків і сум ліквідних активів та зобов'язань банку.

Таксономічні коефіцієнти показують значення наближені до осі, тобто наведені фактори кожного показника позитивно впливають на нормативи платоспроможності та ліквідності.

За ступенем ранжирування можна відобразити найбільш впливові фактори на показники платоспроможності та ліквідності банку (рис.1)



До першої групи слід віднести показник N3 (основного капіталу) із впливовим фактором x_2 - резерви та фонди.

До другої групи відноситься показник N2 (регулятивний капітал) із впливовим фактором x_1 - регулятивний капітал.

До третьої групи відноситься показник N4 (миттєва ліквідність) із впливовим фактором x_3 - кошти банків.

До четвертої групи відноситься показник N5 (поточна ліквідність) із впливовим фактором x_4 - цінні папери на продаж.

Отже, виходячи з вище розглянутого, можна зробити висновок, що кластерний аналіз дає можливість виявити найбільш впливові фактори та виміряти їх кількісний вплив на ліквідність комерційного банку, а також прийняти важливі рішення щодо покращення управління ліквідністю.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Інструкція про порядок регулювання діяльності банків в Україні, затверджена постановою Правління НБУ від 28.08.2001 №368.
2. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 356 с. – (Серия «Высшее образование»).
3. <http://banker.kiev.ua>

УДК 532.59

ВИЗНАЧЕННЯ ВИГЛЯДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОРИСНОСТІ ВІД ЗАТРАТ НА ПЕВНІ ПРОЕКТИ ШЛЯХОМ МАШИННОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Г.А. Кушнір, В.А. Кушнір, А.В. Тороп

У статті розглядається моделі підтримки прийняття рішень у вигляді лінійної й нелінійних задач програмування.

In the article the support models of taking decisions in the kind of linear and non-linear programming problems are considered.

Як у житті окремої людини, так і в житті суспільства можуть виникати серйозні проблеми, пов'язані з невдалим рішенням, яке не можливо виправити. Одними із аспектів прийняття правильного рішення є врахування можливих наслідків, перспектива розвитку, наявність необхідних коштів, політичне становище тощо.

Прийняття економічних рішень є важливою проблемою повсякденної діяльності людини. Виступаючи як споживач, людина повинна вирішити, які товари їй необхідно купувати й за якою ціною. Виступаючи як виробник, людина повинна вирішити, які кошти їй потрібно вкладати в різні проекти, акції, види продукції, що виготовляє тощо.

Для того щоб прийняти рішення виділяють декілька підходів. Це економіко-математичний, інженерно-економічний, комп'ютерний, психологічний.

Економіко-математичний підхід говорить про те, що людина, яка виступає як споживач, повинна вирішити, які товари й за якою ціною їй необхідно купувати. Оскільки у кожній партії товару є своя корисність для споживача, закон граничної корисності каже, що гранична корисність зменшується. Тобто наступні партії товару менш цінні, для споживача, ніж перші. Отже, якщо корисність товару більша, то і кошти, затрачені на нього, повинні бути більшими.

Інженерно-економічний. Основними способами розв'язання задач в дослідженні операцій є побудова кількісної моделі, вибір критерію оптимальності і знаходження оптимального розв'язку. Класичні методи дослідження операцій і насамперед, математичне програмування були зорієнтовані на знаходження оптимального розв'язку при достатньо надійній математичній моделі. Спроби подальшого розповсюдження дослідження операцій привели до необхідності розв'язання групи практичних проблем розподілення капіталовкладень, де моделі бувають суб'єктивними, а критеріїв декілька. Був запропоновано метод «вартість - корисність» [2].

Розглянемо задачу лінійного програмування, де побудована математична модель з використанням Excel-технології, [1].

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

При обмеженнях

$$0 \leq x_1 \leq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad (3)$$

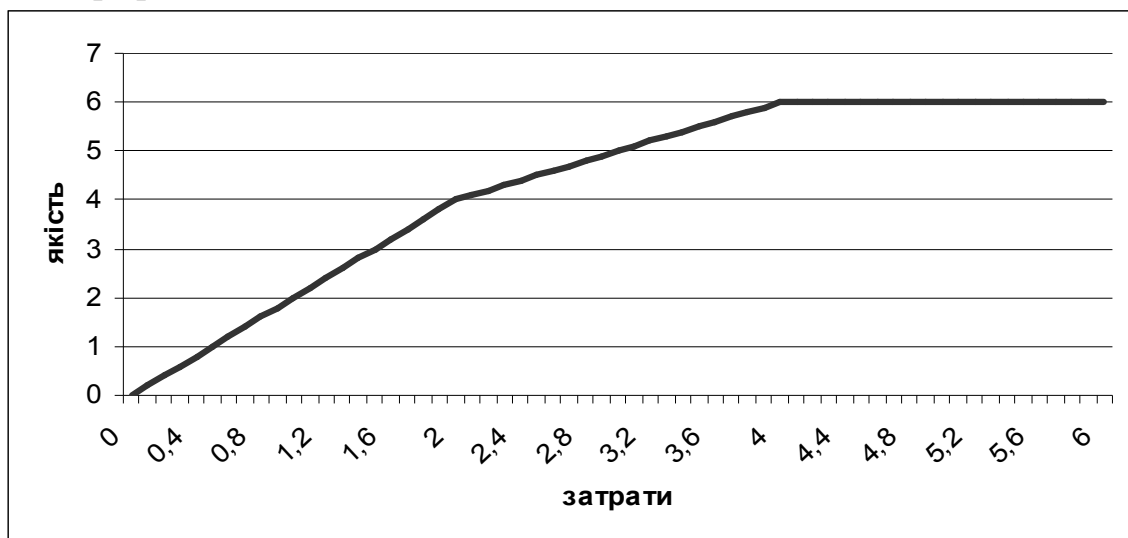
Якби не було обмеження (3), то математичною моделлю була б задача знайти $\max Z$, при обмеженнях (2). Однак обмеження (3) існує, вважаючи, що це обмеження на затрати, які існують завжди. Отже (1),(2) і (3) є математичною моделлю оптимізації функції Z , при обмеженнях (2) і (3). Дана модель за допомогою інформаційної Excel-технології дозволяє побудувати у програмованому режимі функціональну залежність між можливими затратами і корисністю Z у табличному вигляді [3,4].

У таблиці 1 відображена математична модель у Excel-технології, розв'язана задача лінійного програмування при початкових умовах.

Таблиця 1.

ім'я значення	змінні			Обмеження		Вид	
	x1	x2					
НГ	0	0					
ВГ	2	2					
ЦФ	2	1	5				
	1	1	3	Менше		3	
				Рівно			

У програмованому режимі в Excel отримали таблицю за якою і побудуємо графік.



Малюнок 1.

Розглянемо задачу квадратичного програмування, де побудована математична модель використання Excel-технології.[1]

$$z = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 \rightarrow \max \quad (4)$$

При обмеженнях

$$0 \leq x_1 \leq 5 \quad 0 \leq x_2 \leq 6 \quad 0 \leq x_3 \leq 7 \quad (5)$$

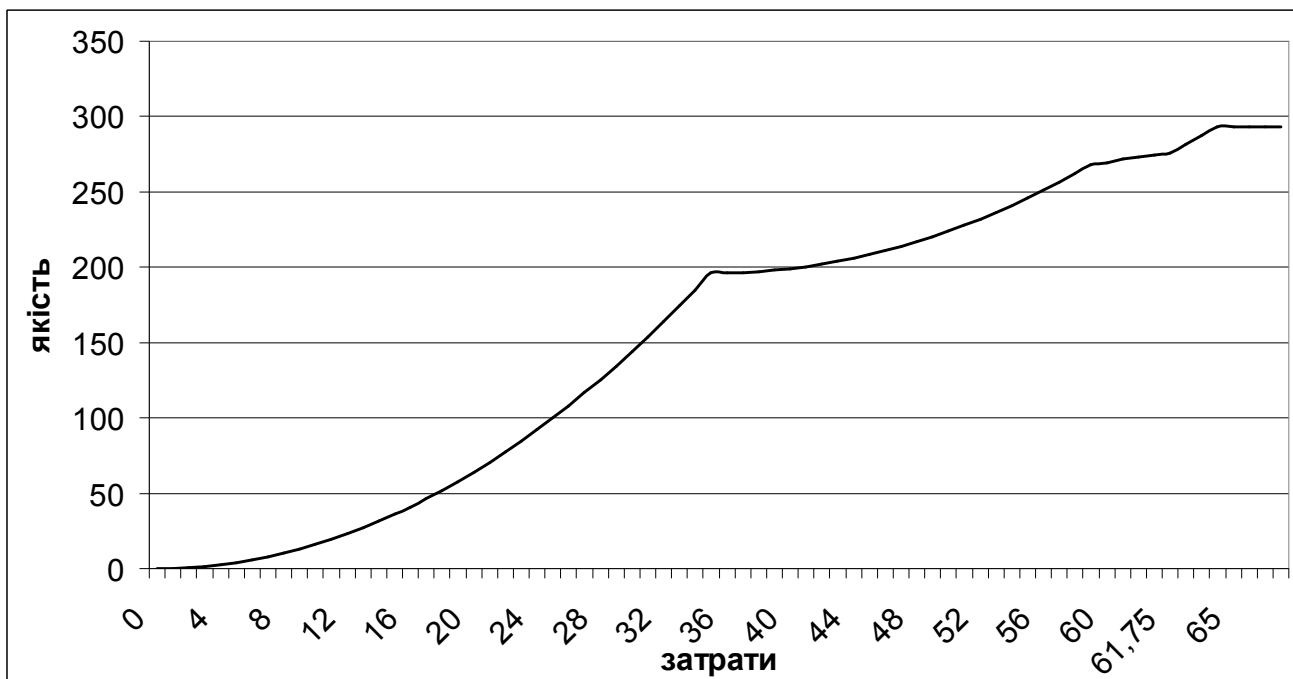
$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 63 \quad (6)$$

Таблиця 2.

ім'я	x1	x2	x3	x1x2	x2x3	x1x3	x1^2	x2^2	x3^2	
значення	5	5,75	7	28,75	40,25	35	25	33,0625	49	
НГ	0	0	0							
ВГ	5	6	7							
ЦФ	0	0	0	0	0	0	1	2	4	287,125

обмеження

1 4 5 63 рівно 63



Малюнок 2.

Аналогічно до задачі лінійного програмування ми побудували математичну модель за допомогою Excel-технології. Як бачимо модель відрізняється від попередньої. Оскільки в першому випадку була лінійна модель, то в цьому випадку ми отримали графік нелінійної неперервної, але не диференційованої функції.

Побудуємо функціональну залежність для багатокритеріальної оптимізації, при двох функціях цінності.

$$\text{Нехай дано } z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \quad (7)$$

$$z_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \max \quad (8)$$

$$\text{І визначена загальна функція якості за формулою } z = 2z_1 + z_2 \rightarrow \max \quad (9)$$

$C\lambda = 2$, коефіцієнт важливості змінної, що встановлюється експертами.

$$\text{З обмеженням } 0 \leq x_1 \leq 5 \quad 0 \leq x_2 \leq 6 \quad 0 \leq x_3 \leq 7 \quad (10)$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 63$$

Зробивши перетворення і врахувавши коефіцієнти важливості отримаємо таку кінцеву цільову функцію $z = 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \max [3,4]$. Будуємо відповідно математичну модель, використовуючи Ексел-технологію.

Таблиця 3.

ім'я	x1	x2	x3	x1x2	x1x3	x2x3	x1^2	x2^2	x3^2		
значення	3	3,75	3	11,25	11,25	9	9	14,0625	9		
НГ	0	0	0								
ВГ	3	4	3								
КФ	6	2	2	0	0	0	1	1	2	72,5625	
				обмеження							
	x1	x2	x3								
	1	4	5	33	рівно	33					

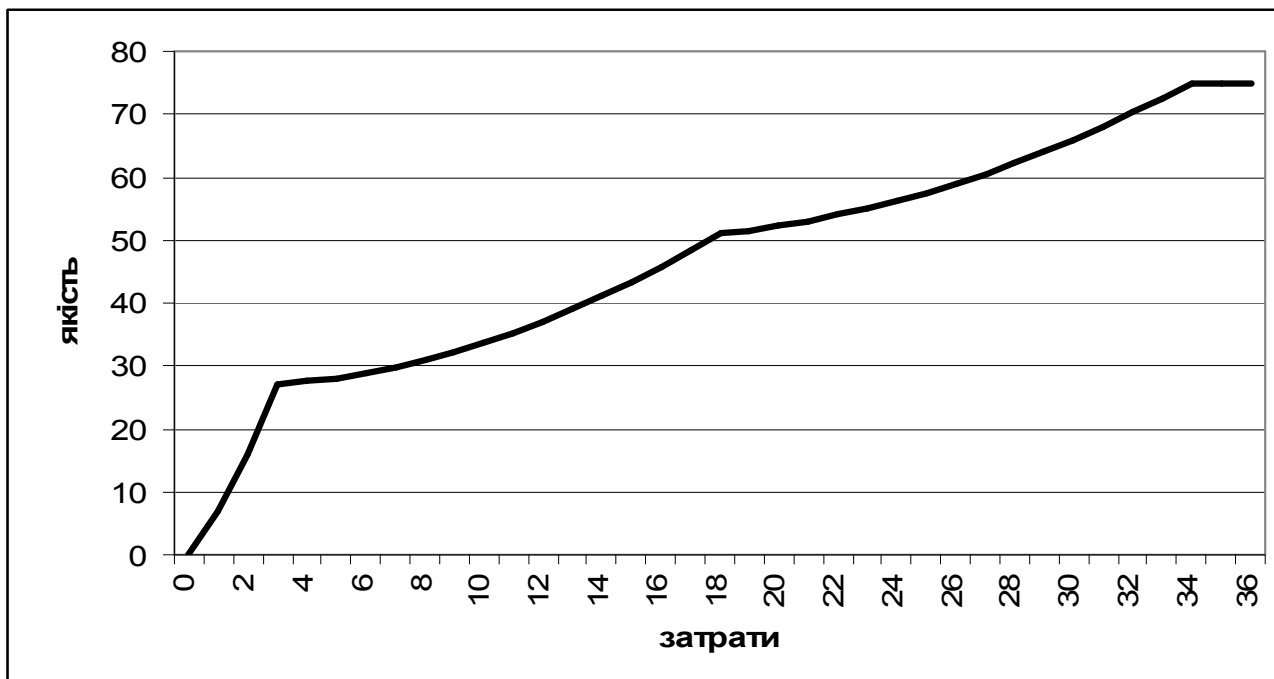
У програмованому режимі в Ексел отримали таку таблицю 4, що виражає залежність значень цільової функції від затрат:

Таблиця 4.

x1	x2	x3	x1x2	x2x3	x1x3	x1^2	x2^2	x3^2	якість	затрати
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	7	1
2	0	0	0	0	0	4	0	0	16	2
3	0	0	0	0	0	9	0,00	0	27	3
3	0,25	0	0,75	0	0	9	0,0625	0	27,5625	4
3	0	0,4	0	0	1,20	9	0	0,16	28,12	5
3	0	0,6	0	0	1,8	9	0	0,36	28,92	6
3	0	0,8	0	0	2,40	9	0	0,64	29,88	7
3	0	1	0	0	3	9	0	1	31	8
3	0	1,2	0	0	3,6	9	0	1,44	32,28	9
3	0	1,4	0	0	4,2	9	0	1,96	33,72	10
3	0	1,6	0	0	4,80	9	0	2,56	35,32	11
3	0	1,8	0	0	5,40	9	0	3,24	37,08	12
3	0	2	0	0	6,00	9	0	4,00	39	13
3	0	2,2	0	0	6,60	9	0	4,84	41,08	14
3	0	2,4	0	0	7,2	9	0	5,76	43,32	15
3	0	2,6	0	0	7,8	9	0	6,76	45,72	16
3	0	2,8	0	0	8,4	9	0	7,84	48,28	17
3	0	3	0	0	9	9	0	9	51	18
3	0,25	3	0,75	0,75	9	9	0,0625	9	51,5625	19

3	0,5	3	1,5	1,5	9	9	0,25	9	52,25	20
3	0,75	3	2,25	2,25	9	9	0,5625	9	53,0625	21
3	1	3	3	3	9	9	1	9	54	22
3	1,25	3	3,75	3,75	9	9	1,5625	9	55,0625	23
3	1,5	3	4,5	4,5	9	9	2,25	9	56,25	24
3	1,75	3	5,25	5,25	9	9	3,062501	9	57,5625	25
3	2	3	6	6	9	9	4	9	59	26
3	2,25	3	6,75	6,75	9	9	5,062501	9	60,5625	27
3	2,5	3	7,5	7,5	9	9	6,25	9	62,25	28
3	2,75	3	8,25	8,25	9	9	7,562501	9	64,0625	29
3	3	3	9	9	9	9	9	9	66	30
3	3,25	3	9,75	9,75	9	9	10,5625	9	68,0625	31
3	3,5	3	10,5	10,5	9	9	12,25	9	70,25	32
3	3,75	3	11,25	11,25	9	9	14,0625	9	72,5625	33
3	4	3	12	12	9	9	16	9	75	34
3	4	3	12	12	9	9	16	9	75	35
3	4	3	12	12	9	9	16	9	75	36

У таблиці 4 видно динаміку змін оптимального розподілу затрат та залежність цільової функції від затрат. Оптимізація задачі з декількома функції набуває вигляду задачі нелінійного програмування, що є зображеним вище. Як бачимо оптимізація відбувається у послідовному використанні x_1 , x_2 , x_3 , що впливає з таблиці 4, але на певному етапі все ж необхідно і понести певні затрати на два критерії одночасно. Можна побудувати у середовищі Excel графік функції якість(затрати) за точками з таблиці 4.



Малюнок 3.

Отримана крива відображає загальну тенденцію розвитку природних, економічних, соціальних процесів, тобто із зростанням затрат користь не

зростає у прямій пропорції, а зростання уповільнюється, а не певному етапі взагалі не зростає і майже припиняється[1].

Наведена математична модель за допомогою інформаційної Excel-технології допомагає приймати рішення для знаходження найкращого розв'язку планування розвитку підприємств, бізнес-плану, інженерних проектів, задач оптимізації. Проаналізувавши дані які отримані в результаті використання даної математичної моделі спрощують прийняття рішення і є більш наочними в порівнянні з використанням таблиць. Дана модель показує не тільки, те що можна отримати при вкладенні коштів в розвиток, а й показує конкретно який критерій потрібно покращувати, щоб отримати найкращий прибуток, а на який краще не витратити кошти.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Кравченко В.В. Визначення вигляду функціональної залежності між економічними показниками експериментальним шляхом. // Наукові записки. Серія: Математичні науки випуск 65., 2006 с. 76-82.
2. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений: Вербальный анализ решений. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 208 с.
3. Мур Д., Уэдерфорд Л.Р. Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Перевод с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 7-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

УДК 519.1

THE COMPONENT REALIZABILITY OF CUBIC DECOMPOSITIONS OF ORDER 10, THAT HAVE ORDER TYPE 1021

L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk

Продовжено дослідження кубічних розкладів порядку 10. Для типу 1021 розрізнено реалізовані та нереалізовані компонентні типи. Для кожного реалізованого компонентного типу побудовано реалізуючий розклад.

More than ten years ago there was done the partition of the set of cubic decompositions of the complete graph of order 10 into 14 types [1]. Under the type of the cubic decomposition R of the graph K_n we understand the vector $a(R) = (a_4, a_6, \dots)$, where a_i means the number of components of order i in the decomposition R . The type is an invariant with regard to isomorphism in the set of cubic decompositions of order n . Such types we call the *order types*.

The above mentioned order types for the decompositions of K_{10} are
 1.0003 2.0130 3.0211 4.0500 5.1021 6.1102 7.1310
 8.2120 9.2201 10.3011 11.3300 12.4110 13.5001 14.6100.

It is proved in [2] that all these order types except for 6100 are realizable. The next step in the solution of the existence problem of the cubic decomposition is the introduction of *component types*. For the decomposition R of order type 1021, the component type has the ‘chemical’ formula G_iXYK_4 . Here G_i means the canonical form of the eldest component in the decomposition R , and X, Y are the canonical forms of components of order 8. The component types of the other order types are defined in the similar way.

We take the canonical graphs G_i ($i=1, \dots, 19$) from [3], and the graphs G_{20}, G_{21} have the edge lists

G_{20} : 12 13 14 23 24 34 56 57 58 67 69 7A 89 8A 9A,
 G_{21} : 12 13 14 23 24 34 56 59 5A 68 69 6A 78 79 7A.

Further we denote A–E the connected cubic graphs of order 8 as it is shown in Fig.1. We write F instead of $2K_4$.

It is easy to count that the set of cubic decompositions of order 10 with order type 1021 is divided into $21 \cdot (6 + C_7^2) = 567$ different component types. The *deep* existence problem of cubic decompositions of order 10 is that to indicate those component types for which the corresponding decomposition sets are nonempty. The component types that have such a quality we call *realizable*.

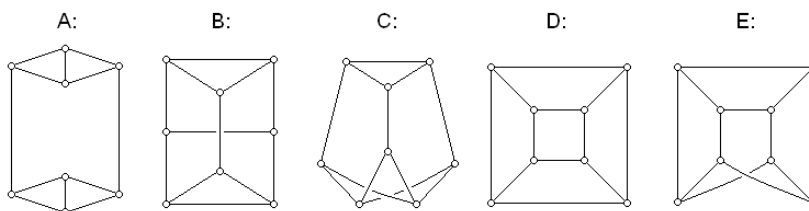


Fig.1. Denotation of the cubic graphs of order 8

The authors have compiled the computer program to compose the cubic decompositions of a given component type. With the help of the program they have obtained the solution for the above formulated problem for order type 1021. The result is in the next theorem.

Theorem. *From all the component types for order type 1021 only these are realizable:*

G_1ABK_4 G_1ACK_4 G_1ADK_4 G_1BBK_4 G_1BDK_4 G_1BEK_4 G_1CDK_4 ;
 G_2AAK_4 G_2ABK_4 G_2BBK_4 G_2CCK_4 G_2DDK_4 ;
 G_3ABK_4 G_3ACK_4 G_3BBK_4 G_3BCK_4 G_3BDK_4 G_3BEK_4
 G_3CCK_4 G_3CDK_4 G_3DEK_4 G_3EEK_4 ;
 G_4ABK_4 G_4BBK_4 G_4BCK_4 G_4BDK_4 G_4BEK_4 G_4DEK_4 ;
 G_5ACK_4 G_5AEK_4 G_5BBK_4 G_5BCK_4 G_5BDK_4 G_5BEK_4 G_5CCK_4
 G_5CDK_4 G_5CEK_4 ;
 G_6AAK_4 G_6ABK_4 G_6ACK_4 G_6ADK_4 G_6AEK_4 G_6BBK_4 G_6BCK_4
 G_6BDK_4 G_6BEK_4 G_6BFK_4 G_6CCK_4 G_6CDK_4 G_6CEK_4 G_6EEK_4 ;
 G_7ABK_4 G_7ACK_4 G_7AEK_4 G_7BBK_4 G_7BCK_4 G_7BDK_4 G_7BEK_4 G_7CCK_4
 G_7CDK_4 G_7CEK_4 G_7DDK_4 G_7DEK_4 ;
 G_8ABK_4 G_8ACK_4 G_8ADK_4 G_8AEK_4 G_8BBK_4 G_8BCK_4 G_8BDK_4 G_8BEK_4
 G_8CCK_4 G_8CEK_4 G_8CFK_4 ;
 G_9AAK_4 G_9ABK_4 G_9BBK_4 G_9BCK_4 G_9BEK_4 G_9CDK_4 G_9CEK_4 G_9EEK_4 ;
 $G_{10}ABK_4$ $G_{10}BBK_4$ $G_{10}BCK_4$ $G_{10}BEK_4$ $G_{10}CCK_4$;
 $G_{11}ABK_4$ $G_{11}ACK_4$ $G_{11}AEK_4$ $G_{11}BBK_4$ $G_{11}BCK_4$ $G_{11}BDK_4$ $G_{11}BEK_4$
 $G_{11}CDK_4$ $G_{11}CEK_4$ $G_{11}DEK_4$;
 $G_{12}ACK_4$ $G_{12}BBK_4$ $G_{12}BCK_4$ $G_{12}BEK_4$ $G_{12}CEK_4$;
 $G_{13}AAK_4$ $G_{13}ABK_4$ $G_{13}ACK_4$ $G_{13}BBK_4$ $G_{13}BCK_4$ $G_{13}BDK_4$ $G_{13}BEK_4$
 $G_{13}CCK_4$ $G_{13}CDK_4$ $G_{13}CEK_4$ $G_{13}ACK_4$ $G_{13}EEK_4$;
 $G_{14}AAK_4$ $G_{14}ABK_4$ $G_{14}ACK_4$ $G_{14}ADK_4$ $G_{14}BBK_4$ $G_{14}BCK_4$
 $G_{14}BEK_4$ $G_{14}CCK_4$ $G_{14}CEK_4$ $G_{14}DFK_4$;
 $G_{15}ABK_4$ $G_{15}ACK_4$ $G_{15}ADK_4$ $G_{15}AEK_4$ $G_{15}BBK_4$ $G_{15}BCK_4$ $G_{15}BDK_4$
 $G_{15}BEK_4$ $G_{15}EFK_4$;
 $G_{16}AAK_4$ $G_{16}ABK_4$ $G_{16}ACK_4$ $G_{16}ADK_4$ $G_{16}AEK_4$ $G_{16}BBK_4$ $G_{16}BCK_4$
 $G_{16}BDK_4$ $G_{16}BEK_4$ $G_{16}BFK_4$ $G_{16}CCK_4$ $G_{16}CDK_4$;
 $G_{17}ABK_4$ $G_{17}AEK_4$ $G_{17}BBK_4$ $G_{17}BCK_4$ $G_{17}BDK_4$ $G_{17}BEK_4$ $G_{17}CCK_4$
 $G_{17}CEK_4$ $G_{17}EEK_4$;
 $G_{18}AAK_4$ $G_{18}ABK_4$ $G_{18}ADK_4$ $G_{18}AFK_4$ $G_{18}BBK_4$ $G_{18}BCK_4$ $G_{18}BEK_4$
 $G_{18}CCK_4$ $G_{18}CEK_4$ $G_{18}DEK_4$;
 $G_{19}AAK_4$ $G_{19}BBK_4$;
 $G_{21}CDK_4$.

It should be remarked, that there are no cubic decomposition with the eldest component isomorphic to G_{20} .

To confirm the theorem we give the realization for each realizable component type.

The eldest component is $G_1 = 1-234$ $2-34$ $3-5$ $4-5$ $5-6$ $6-78$ $7-9X$ $8-9X$ $9-X$

G_1ABK_4 : 1-579 2-67X 3-69X 5-79 6-X; 1-68X 2-589 4-69X 5-8X 6-9;[3478];
 G_1ACK_4 : 1-59X 2-789 3-78X 5-9X 7-8; 1-678 2-56X 4-78X 5-78 6-X;[2569];
 G_1ADK_4 : 1-579 2-57X 3-69X 5-7 6-9X; 1-68X 2-689 4-69X 5-89X;[3478];
 G_1BBK_4 : 1-567 2-689 3-789 5-78 6-9; 1-89X 2-57X 4-789 5-9X 7-8;[346X];
 G_1BDK_4 : 1-579 3-47X 4-67 5-9X 6-9X; 1-68X 2-69X 3-689 4-89A;[2578];
 G_1BEK_4 : 1-79X 2-69X 3-467 4-79 6-X; 1-568 3-89X 4-68X 5-9X 6-9;[2578];
 G_1CDK_4 : 1-567 3-479 4-7X 5-9X 6-9X ; 1-89X 2-69X 3-68X 4-689;[2578];

The eldest component is $G_2 = 1-234 2-34 3-5 4-6 5-67 6-8 7-9X 8-9X 9-X$

G_2AAK_4 : 1-589 2-58X 3-69X 5-8 6-9X; 1-67X 2-679 4-59X 5-9X 6-7;[3478];
 G_2ABK_4 : 1-589 2-68X 3-69X 5-89 6-X; 1-67X 2-579 4-59X 5-X 6-79;[3478];
 G_2BBK_4 : 1-568 2-89X 3-69X 5-89 6-X; 1-79X 2-567 4-59X 5-X 6-79;[3478];
 G_2CCK_4 : 1-568 2-89X 4-59X 5-8 6-9X; 1-79X 2-567 3-69X 5-9X 6-7;[3478];
 G_2DDK_4 : 1-569 2-56X 3-69X 4-59X; 1-78X 2-678 5-89X 6-79X;[3478];

The eldest component $G_3 = 1-234 2-34 3-5 4-6 5-78 6-79 7-X 8-9X 9-X$

G_3ABK_4 : 1-789 2-79X 3-48X 4-8X 7-9; 2-568 3-679 4-579 5-9 6-8 7-8;
 [156X];

G_3ACK_4 : 1-59X 2-689 3-68X 5-9X 6-8; 1-678 2-57X 4-58X 5-6 6-X 7-8;
 [3479];

G_3BBK_4 : 1-567 2-78X 4-58X 5-6 6-X 7-8; 1-89X 2-569 3-68X 5-9X 6-8;
 [3479];

G_3BCK_4 : 1-567 2-79X 4-59X 5-6 6-X 7-9; 1-89X 2-568 3-69X 5-9X 6-8;
 [3478];

G_3BDK_4 : 1-569 3-468 4-57 5-9 6-8 7-89; 1-78X 2-789 3-79X 4-89X;[256X];

G_3BEK_4 : 1-789 2-689 3-467 4-79 6-8; 2-57X 3-89X 4-58X 5-9 7-89;[156X];

G_3CCK_4 : 1-679 2-789 3-468 4-79 6-8; 1-58X 3-79X 4-58X 5-9 7-89;[256X];

G_3CDK_4 : 1-569 3-467 4-58 5-9 6-8 7-89; 1-78X 2-789 3-89X 4-79X;[256X];

G_3DEK_4 : 1-589 2-89X 4-59X 5-6 6-8X; 1-67X 2-567 3-69X 5-9X 7-9;[3478];

G_3EEK_4 : 1-578 2-789 3-489 4-57 5-9; 1-69X 3-67X 4-89X 6-8 7-89;[256X];

The eldest component is $G_4 = 1-234 2-34 3-5 4-6 5-78 6-9X 9-X 7-89 8-X$

G_4ABK_4 : 1-569 2-79X 3-67X 5-69 7-X; 1-78X 2-568 4-57X 5-X 6-78;[3489];

G_4BBK_4 : 1-579 2-69X 3-67X 5-69 7-X; 1-68X 2-578 4-57X 5-X 6-78;[3489];

G_4BCK_4 : 1-578 2-58X 3-67X 5-X 6-78; 1-69X 2-679 4-57X 5-69 7-X;[3489];

G_4BDK_4 : 1-569 2-679 3-67X 5-9X 7-X; 1-78X 2-58X 4-57X 5-6 6-8 7-X;

[3489];

G_4BEK_4 : 1-578 2-568 3-67X 5-X 6-8 7-X; 1-69X 2-79X 4-57X 5-69 6-7;

[3489];

G_4DEK_4 : 1-567 2-56X 3-67X 4-57X ; 1-89X 2-789 5-69X 6-78 7-X;[3489];

The eldest component is $G_5 = 1-234 2-34 3-5 4-6 5-78 6-9X 7-9X 8-9X$

G_5ACK_4 : 1-569 2-789 3-678 5-69 7-8; 1-78X 2-56X 4-578 5-X 6-78;[349X];

G_5AEK_4 : 1-57X 2-59X 3-479 4-79 5-X; 1-689 3-68X 4-58X 5-69 9-X;[2678];

G_5BBK_4 : 1-579 2-689 3-678 5-69 7-8; 1-68X 2-57X 4-578 5-X 6-78;[349X];

G_5BCK_4 : 1-578 2-568 3-467 4-78 5-6; 1-69X 2-79X 3-89X 6-78 7-8;[459X];

G_5BDK_4 : 1–57X 2–59X 3–479 4–7X 5–9; 1–689 3–68X 4–89X 5–69X;[2678];

G_5BEK_4 : 1–57X 2–59X 3–479 4–7X 5–9; 1–689 3–68X 4–589 5–6X 9–X;[2678];

G_5CCK_4 : 1–689 2–689 3–479 4–78 6–7; 1–57X 2–57X 3–68X 5–6 6–8 7–8;[459X];

G_5CDK_4 : 1–579 2–57X 3–49X 4–57 9–X; 1–68X 2–689 4–89X 5–69X;[3678];

G_5CEK_4 : 1–578 3–789 4–78X 5–9X 9–X; 1–69X 2–59X 3–46X 4–59 5–6;[2678];

The eldest component is G_6 : 1–234 2–35 3–6 4–57 5–8 6–79 7–X 8–9X 9–X

G_6AAK_4 : 1–789 2–49X 3–48X 4–X 7–8 7–9; 2–678 3–579 4–689 5–79 6–8;[156X];

G_6ABK_4 : 1–567 3–489 4–89 5–67 6–8 7–9; 1–89X 2–789 3–57X 5–9X 7–8;[246X];

G_6ACK_4 : 1–567 3–489 4–89 5–67 6–8 7–9; 1–89X 2–789 3–57X 5–9X 7–8;[246X];

G_6ADK_4 : 1–789 2–48X 3–79X 4–8X 7–9; 2–679 3–458 4–69 5–79 6–8 7–8;[156X];

G_6AEK_4 : 2–48X 3–59X 4–8X 5–79 7–89; 1–789 2–678 3–478 4–69 6–8;[156X];

G_6BBK_4 : 1–568 2–46X 3–48X 4–8 5–6X; 1–79X 2–789 4–69X 6–8X 7–8;[3579];

G_6BCK_4 : 1–567 2–79X 3–59X 5–6 6–X 7–9; 1–89X 3–478 4–9X 5–79X 7–8;[2468];

G_6BDK_4 : 2–469 3–458 4–6 5–79 6–8 7–89; 1–789 2–78X 3–79X 4–89X;[156X];

G_6BEK_4 : 1–567 2–789 3–589 5–6 6–8 7–9; 1–89X 3–47X 4–89 5–79X 7–8;[246X];

G_6BFK_4 : 1–789 2–79X 3–48X 4–9X 7–8; 2–468 4–68 6–8 3–579 5–79 7–9;[156X];

G_6CCK_4 : 1–567 2–789 3–789 5–69 6–8; 1–89X 3–45X 4–89 5–7X 7–89;[246X];

G_6CDK_4 : 1–569 3–457 4–89 5–6 6–8 7–89; 1–78X 2–789 3–89X 5–79X;[246X];

G_6CEK_4 : 1–567 2–79X 3–79X 5–69 6–X; 1–89X 3–458 4–9X 5–7X 7–89;[2468];

G_6EEK_4 : 1–578 2–789 3–457 4–89 5–9; 1–69X 3–89X 5–67X 6–8 7–89;[246X];

The eldest component is G_7 : 1–234 2–35 3–6 4–57 5–8 6–9X 7–89 8–X 9–X

G_7ABK_4 : 1–567 3–49X 4–9X 5–69 6–7 7–X; 1–89X 2–79X 3–578 5–7X 8–9;[2468];

G_7ACK_4 : 1–569 3–47X 4–9X 5–69 6–7 7–X; 1–78X 2–79X 3–589 5–7X 8–9;[2468];

G_7AEK_4 : 1–569 2–468 3–489 4–8 5–69; 1–78X 2–79X 4–69X 6–78 8–9;[357X];

G_7BBK_4 : 1–56X 2–49X 4–8X 5–69 6–8 8–9; 1–789 2–467 3–489 4–69 6–7;[357X];

G_7BCK_4 : 1–569 2–67X 3–79X 5–9X 6–7; 1–78X 3–458 4–6X 5–67 6–8 7–X;[2489];

G_7BDK_4 : 1–578 2–79X 3–89X 5–7X 8–9; 1–69X 3–457 4–9X 5–69 6–7 7–X;[2468];

G_7BEK_4 : 1–568 2–469 3–489 4–8 5–69; 1–79X 2–78X 4–69X 6–78 8–9;[357X];

G_7CCK_4 : 1–569 2–79X 3–79X 5–6X 6–7; 1–78X 3–458 4–9X 5–79 7–X 8–9;[2468];

G_7CDK_4 : 1–569 3–479 4–6X 5–9X 6–7 7–X; 1–78X 2–67X 3–58X 5–67 6–8;[2489];

G_7CEK_4 : 1–569 3–479 4–6X 5–9X 6–7 7–X; 1–78X 2–67X 3–58X 5–67 6–8;[2489];

G_7DDK_4 : 1–578 3–458 4–6X 5–X 6–78 7–X; 1–69X 2–67X 3–79X 5–679;[2489];

G_7DEK_4 : 1–679 2–67X 3–79X 5–69X; 1–58X 3–458 4–6X 5–7 6–78 7–X;[2489];

The eldest component is G_8 : 1–234 2–35 36 4–57 58 6–9X 7–9X 8–9X

G_8ABK_4 : 1–569 2–678 3–789 5–69 7–8; 1–789 3–45X 4–68 5–7X 6–78 ;[249X];

G_8ACK_4 : 1–567 2–468 3–478 4–8 5–67; 1–89X 2–79X 4–69X 6–78 7–8;[359X];

G_8ADK_4 : 1–59X 2–48X 3–458 4–8 5–9 9–X; 2–679 3–79X 4–69X 5–67X ;[1678];

G_8AEK_4 : 1–579 2–49X 3–47X 4–X 5–79; 1–68X 3–589 4–689 5–6X 6–8;[2678];

G_8BBK_4 : 1–569 2 79X 3–57X 5–6 6–7 9–X; 1–78X 3–489 4–9X 5–79X 7–8;[359X];

G_8BCK_4 : 1–568 2–467 3–478 4–8 5–67; 1–79X 2–89X 4–69X 6–78 7–8;[3459X];

G_8BDK_4 : 1–569 2–49X 3–45X 4–6 5–6 9–X; 1–78X 3–789 4–89X 5–79X;[2678];

G_8BCK_4 : 1–569 2–479 4–89 5–67 6–8 7–8; 1–78X 2–68X 3–478 4–6X 6–7;[359X];

G_8CCK_4 : 1–568 2–478 3–478 4–6 5–67; 1–79X 2–69X 4–89X 6–78 7–8;359X];

G_8CEK_4 : 1–59X 2–47X 3–47X 4–9 5–79; 2–689 3–89X 4–68X 5–6 9–X;[1678];

G_8CFK_4 : 1–89X 2–79X 3–478 4–9X 7 8; 2–468 4–68 6–8 3–59X 5–9X 9–X;[1567];

The eldest component is G_9 : 12 13 14 23 25 36 47 48 57 58 69 6A 79 8A 9A

G_9ABK_4 : 1–569 2–678 3–789 5–69 7–8; 1–78X 2–49X 4–69 6–78 7–X 8–9;[345X];

G_9BBK_4 : 1–567 2–689 3–789 5–69 7–8; 1–89X 2–47X 4–69 6–78 7–X 8–9;[345X];

G_9BCK_4 : 1–567 2–68X 3–78X 5–6X 7–8; 1–89X 2–479 4–6X 6–78 7–X8–9;[3459];

G_9BEK_4 : 1–567 2–478 4–69 5–69 7–8 8–9; 1–89X 2–69X 3–789 6–78 7–X;[345X];

G_9CDK_4 : 1–69X 2 69X 3–789 6–8 7–8X; 1–578 2–478 4–69 5–69 6–7 8–9;[3459];

G_9DEK_4 : 1–59X 2–48X 3–48X 4–5 5–9 8–9; 2–679 3–579 4–69X 5–6X7–X;[1678];

G_9EEK_4 : 1–59X 2–479 3–579 4–5X 7–X; 2–68X 3–48X 4–69 5 69X 8–9;[1678];

The eldest component is G_{10} : 1–234 2–35 3–6 4–78 5–79 6–7X 8–9X 9–X

$G_{10}ABK_4$: 1–568 2–679 3–589 5–68 7–9; 1–79X 2–48X 4–69 6–89 7–8X;[345X];

$G_{10}BBK_4$: 1–567 2–78X 3–58X 5–6 6–8 7–X;1–89X 3–479 4–5X 5–8X 7–89;[2469];

$G_{10}BCK_4$: 1–2–467 3–59X 4–56 5–X 6–9 7–9X;1–79X 2–89X 3–478 4–9X 7–8; [1589];

$G_{10}BEK_4$: 1–79X 2–459 3–57X 4–59 5–X; 2–68X 3–489 4–6X 6–9 7–89X;[1568];

$G_{10}CCK_4$: 1–567 2–789 3–789 5–68 6–9; 1–89X 2–46X 4–69 6–8 7–89X;[345X];

The eldest component is G_{11} : 1–234 2–35 3–6 4–78 5– 79 6– 89 7–X 8–X 9–X

$G_{11}ABK_4$: 1–568 2–479 4–69 5–68 7–89; 1–79X 2–68X 3–789 6–7X 8–9;[345X];

- $G_{11}ACK_4$: 1–56X 3–89X 5–6X 6–7 7–89 8–9; 1–789 2–789 3–457 4–59 5–8; [246X];
 $G_{11}AEK_4$: 1–568 2–46X 3–48X 4–X 5–68; 1–79X 3–579 4–569 5–X 6–7X; [2789];
 $G_{11}BBK_4$: 1–569 2–789 3–578 5–X 5–6 6–7 8–9; 1–789 3–49X 4–59 5–8X; [246X];
 $G_{11}BCK_4$: 1–567 2 689 3–789 5–68 7–9; 1–89X 2–47X 4–69 6–7X 7–8 8–9; [345X]; $G_{11}BDK_4$: 1–568 2–46X 3–48X 4–6 5–8X; 1–79X 3–579 4–59X 5–6 6–7X; [2789];
 $G_{11}BEK_4$: 1–56X 2–47X 3–457 4–X 5–6 6–7; 2–689 3–89X 4–569 5–8X 6–X; [1789];
 $G_{11}CDK_4$: 1–68X 2–68X 4–59X 5–8X 6–X; 1–57X 2–47X 3–45X 56 6–7; [3789];
 $G_{11}CEK_4$: 1–56X 2–47X 3–457 4–6 5–X 6–7; 2–689 3–89X 4–59X 5–68 6–X; [1789];
 $G_{11}DDK_4$: 1–57X 2–79X 3–59X 5–8 8–9; 1–79X 3–579 4–569 5–X 6–7X; [456X];
 The eldest component is G_{12} : 1–234 2–35 3–6 4–78 5–9X 6–79 7–8 8–X 9–X
 $G_{12}ACK_4$: 1–568 2–789 3–579 5–6 6–8 7–9; 1–79X 3–48X 4–59 5–78 7–X 8–9; [246X];
 $G_{12}BBK_4$: 1–567 2–789 3–589 5–6 6–8 7–9; 1–89X 3–47X 4–59 5–78 7–X 8–9; [246X];
 $G_{12}BCK_4$: 1–679 3–478 4–59 5–68 6–87–9; 1–58X 2–789 3–59X 5–7 7–X 8–9; [246X];
 $G_{12}BEK_4$: 1–58X 3–47X 4–59 5–8 7–9X 8–9; 1–679 2–789 3–589 5–67 6–8; [246X];
 $G_{12}CEK_4$: 1–567 3–478 4–59 5–6 6–8 7–9 8–9; 1–89X 2–789 3–59X 5–78 7–X; [246X];
 The eldest component is G_{13} : 1–234 2–35 3–6 4–78 5–79 6–8X 7–X 8–9 9–X
 $G_{13}AAK_4$: 1–679 2–46X 3–469 4–X 6–7 7–9; 2–789 3–578 4–569 5–6 6–9 7–8; [158X];
 $G_{13}ABK_4$: 1–568 2–679 3–789 5–68 7–9; 1–79X 2–48X 4–69 6–79 7–8 8–X; [345X];
 $G_{13}ACK_4$: 1–568 2–479 4–69 5–68 7–89; 1–79X 2–68X 3–789 6–79 8–X; [345X];
 $G_{13}BBK_4$: 1–567 2–469 3–479 4–5 5–6 7–9; 1–89X 2–78X 4–69X 6–79 7–8; [358X];
 $G_{13}BCK_4$: 1–58X 2–478 3–47X 4–5 5–X 7–8; 2–69X 3–589 4–69X 5–68 8–X; [1679];
 $G_{13}BDK_4$: 1–679 2–468 3–489 4–6 7–89; 2–79X 3–57X 4–59X 5–6 6–79; [158X];
 $G_{13}BEK_4$: 1–567 3–478 4–6X 5–6X 7–8 8–X; 1–89X 2–48X 3–59X 4–59 5–8; [2679];
 $G_{13}CCK_4$: 1–578 2–48X 3–47X 4–5 5–X 8–X; 1–69X 3–589 4–69X 5–68 8–X; [2679];
 $G_{13}CDK_4$: 1–567 2–479 3–479 4–5 5–6 6–9; 1–89X 2–68X 4–69X 6–7 7–89; [358X];
 $G_{13}CEK_4$: 1–58X 2–47X 3–47X 4–5 5–8 7–8; 2–689 3–589 4–69X 5–6X 8–X; [1679];

$G_{13}DDK_4$: 1–579 3–79X 4–59X 5–8 7–8 8–X; 1–68X 2–48X 3–458 4–6 5–6X;[2679];

$G_{13}EEK_4$: 1–57X 2–48X 3–47X 4–5 5–8 7–8; 1–689 3–589 4–69X 5–6X 8–X;[2679];

The eldest component is G_{14} : 1–234 2–56 3–56 4–78 5–9 6–X 7–9X 8–9X

$G_{14}AAK_4$: 1–57X 2–49X 4–69 5–7X 6–79; 1–689 3–49X 4–5X 5–68 6–8 9–X;[2378];

$G_{14}ABK_4$: 1–567 2–49X 4–5X 5–7 6–79 9–X; 1–89X 3–49X 4–69 5–68X 6–8;[2378];

$G_{14}ACK_4$: 1–69X 2–78X 5–678 6–9 7–8 9–X; 1–578 3–78X 4–56X 5–X 6–78;[2349];

$G_{14}ADK_4$: 1–56X 2–38X 3–78 5–6X 6–7 7–8; 1–789 2–479 4–56 5–78 6–89;[349X];

$G_{14}BBK_4$: 1–579 2–478 4–69 5–78 6–89; 1–68X 3–478 4–5X 6–7 7–8;[239X]

$G_{14}BCK_4$: 1–57X 2–478 4–6X 5–6X 6–8 7–8; 1–689 3–478 4–59 5–78 6–79;[239X]

$G_{14}BEK_4$: 1–57X 2–789 5–6X 6–89 7–89–X; 1–689 3–789 4–569 5–78 6–7;[234X]

$G_{14}CCK_4$: 1–569 2–49X 3–49X 4–6 5–6X; 1 78X 4–59X 5–78 6–789 9–X;[2378]

$G_{14}CEK_4$: 1–67X 2–347 3–79 4–6X 9–X; 1–589 2–89X 3–48X 4–59 5–X;[5678]

$G_{14}DFK_4$: 1–79X 2–49X 4–56 5–7X 6–79; 1568 3–49X 4–9X 5–68 6–8 9–X;[2378]

The eldest component is G_{15} : 1–234 2–56–3–57 4–68 5–9–6–X 7–89 8–X 9–X

$G_{15}ABK_4$: 1–568 2–489 3–469 4–9 5–68; 1–79X 2–38X 3–8X 6–789 8–9;[457X]

$G_{15}ACK_4$: 1–568 2–348 3–49 4–9 5–68 6–9; 1–79X 2–79X 3–68X 6–78 8–9;[457X];

$G_{15}ADK_4$: 1–568 2–349 3–46 4–9 5–68 8–9; 1–79X 2–78X 3–89X 6–789;[457X];

$G_{15}AFK_4$: 1–567 2–47X 3–46X 4–X 5–67; 1–89X 4–579 5–8X 6–789 7–X;[2389];

$G_{15}BBK_4$: 1–569 2–489 3–468 4–9 5–68; 1–78X 2–37X 3–9X 6–789 8–9;[457X]

$G_{15}BCK_4$: 1–569 2–49X 4–79 5–6X 6–7 7–X; 1–78X 2–378 3–4X 4–5X 5–78;[3689];

$G_{15}BDK_4$: 1–567 2–47X 3–46X 4–5 5–6 –7–X; 1–89X 4–79X 5–78X 6–789;[2389]

$G_{15}BEK_4$: 1–567 2–47X 3–46X 4–7 5–6X; 1–89X 4–59X 5–6X 6–79 7–X;[2389]

$G_{15}EFK_4$: 1–57X 2–78X 3–68X 5–68 6–7; 1–689 4–57X 5–7X 6–89 7–X 8–9;[2349]

The eldest component is G_{16} : 1–234 2–56 3–57 4–68 5–9 6–X 7–8X 8–9 9–X

$G_{16}AAK_4$: 1–57X 3–469 4–9X 5–7X 6–79; 1–689 2–479 4–57 5–68 6–8 7–9;[238X]

$G_{16}ABK_4$: 1–567 2–479 3–469 4–9–5–67; 1–89X 4–57X 5–8X 6–789 7–9; [238X]

$G_{16}ACK_4$: 1–56X 2–479 4–7X 5–6X 6–9 7–9; 1–789 3–469 4–59 5–78 6–78;[238X]

$G_{16}ADK_4$: 1–58X 4–79X 5–8X 6–789 7–9; 1–679 2–479 3–469 4–5 5–67;[238X]

$G_{16}AEK_4$: 1–57X 3–689 5–7X 6–89 7–9 8–X; 1–689 2–789 4–579 5–68 6–7;[234X]

$G_{16}BBK_4$: 1–567 2–789 3–689 5–68 7–9; 1–89X 4–579 5–7X 6–789 8–X;[234X]

$G_{16}BCK_4$: 1–57X 2–789 5–6X 6–89 7–9 8–X; 1–689 3–689 4–579 5–78 6–7;[234X]

$G_{16}BDK_4$: 1–567 2–479 3–469 4–5 5–6 7–9; 1–89X 4–79X 5–78X 6–789;[238X]

$G_{16}BEK_4$: 1-789 3-68X 5-67X 6-9 7-9 8-X; 1-56X 2-78X 4-57X 5-8 6-78;[2349]

$G_{16}BFK_4$: 1-79X 3-469 4-5X 5-7X 6-79; 1-568 2-479 4-79 5-68 6-8 7-9;[238X]

$G_{16}CCK_4$: 1-589 3-469 4-57 5-8 6-78 7-9; 1-67X 2-479 4-9X 5-67X 6-9;[238X]

$G_{16}CDK_4$: 2-478 3-89X 4-59 5-7X 7-9 8-X; 1 79X 2-39X 3-46 4-7X 6-79;[1568]

The eldest component is G_{17} : 1-234 2-56 3-57 4-68 5-9 6-X 7-9X 8-9X

$G_{17}ABK_4$: 1-56X 2-378 3-8X 5-6X 6-7 7-8; 1-789 3-469 4-57 5-78 6-89;[249X]

$G_{17}AEK_4$: 1-56X 2-478 4-7X 5-6X 6-8 7-8; 1-789 3-468 4-59 5-78 6-79;[239X]

$G_{17}BBK_4$: 1-567 2-478 3-468 4-7 5-68; 1-89X 4-59X 5-7X 6-789 7-8;[239X]

$G_{17}BCK_4$: 1-567 2-78X 3-68X 5-7X 6-8; 1-89X 4-57X 5-68 6-79 7-8 9-X;[2349]

$G_{17}BDK_4$: 1-567 2-478 3-468 4-5 5-6 7-8; 1-89X 4-79X 5-78X 6-789;[239X]

$G_{17}BEK_4$: 1-567 2-478 3-468 4-5 5-7 6-8; 1-89X 4-79X 5-68X 6-79 7-8; [239X]

$G_{17}CCK_4$: 1-56X 2-37X 3-68 5-8X 6-7 7-8; 1-789 2-489 4-57 5-67 6-89; [349X]

$G_{17}CEK_4$: 1-568 2-378 3-46 4 57 5-8 6-7; 1-79X 3-89X 5-67X 6-89 7-8; [249X]

$G_{17}EEK_4$: 1-579 2-489 4-57 5-6 6-89 7-8; 1-68X 2-37X 3-68 5-78X 6-7;[349X]

The eldest component is G_{18} :1-234 2-56 3-57 4-89 5-8 6-9X 7-9X 8-X

$G_{18}AAK_4$:1-567 2-47X 3-46X 4-X 5-67;1-89X 4-567 5-9X 6-78 7-8 9-X; [2389]

$G_{18}ABK_4$:1-569 2-478 4-67 5-69 7-8; 1-78X 3-468 4-5X 5-7X 6-78; [239X]

$G_{18}ADK_4$:1-59X 4-67X 5-9X 6-78 7-8 8-9; 1-678 2-478 3-468 4-5 5-67; [239X]

$G_{18}AFK_4$:1-678 2-47X 3-46X 4-X 6-8 7-8;2-389 3-89 4-567 5-67 6-7 8-9; [159X]

$G_{18}BBK_4$: 1-567 2-478 3-468 4-5 5-6 7-8; 1-89X 4-67X 5-79X 6-78 8-9; [239X]

$G_{18}BCK_4$:1-569 3-469 4-67 5-79 7-8 8-9; 1-78X 2-478 4-5X 5-X 6-578;[239X]

$G_{18}BEK_4$:1-59X 2-48X 3-489 4-5 5-X 8-9; 2-379 3-6X 4-67X 5-679 9-X; [1678]

$G_{18}CCK_4$:1-59X 2-48X 3-48X 4-5 5-9 8-9; 2-379 3-69 4-67X 5-67X 9-X; [1678]

$G_{18}CEK_4$:1-569 3-468 4-57 5-9 6-7 7-8 8-9; 1-78X 2-478 4-6X 5-67X 6-8; [239X]

$G_{18}DEK_4$:1-69X 4-67X 5-79X 6-8 7-8 8-9; 1-578 2-478 3-468 45 5-6 6-7; [239X]

The eldest component is G_{19} : 1-234 2-56 3-78 4-9X 5-7X 6-89 7-9 8-X

$G_{19}AAK_4$: 1-568 2-39X 3-6X 5-68 8-9 9-X; 1-79X 3-459 4-56 5-9 6-7X 7-X; [2478]

$G_{19}BBK_4$: 1-568 2-789 5-89 6-7X 7-X 9-X; 1-79X 2-34X 3-9X 4-78 7-8 8-9; [3456]

The eldest component is G_{21} : 1-234 2-34 3-4 5-89X 6-89X 7-89X

$G_{21}CDK_4:1-589\ 2-689\ 3-789\ 5-67\ 6-7; 1-67X\ 2-57X\ 3-56X\ 4-567; [489X]$

Conclusions and perspectives

The order types 0003 and 0050 were completely investigated in [4, 5]. In [6] we had recently solved the enumeration problem for order types 3011, 4110, 5001. The deep existence problem in the cases of order types 1102 and 0211 is solved in [7, 8].

The possible continuation of the work is the investigation of the cubic decompositions of the graphs K_{13} , K_{16} etc. We can point out the papers [8, 9] which have begun to elaborate the direction. The other direction in developing the topic is to investigate the decompositions of complete graphs into regular graphs of degree $k > 3$. Finally, one may examine cubic decompositions of arbitrary regular graphs.

REFERENCES

1. A.J. Petrenjuk, On the enumeration of cubic decompositions of the complete graph $K(10)$ (Ukrainian). The Fifth International conference named after Academician M. Kravtchuk, Report Theses, Kyiv, 1996, p.332.
2. L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk, The realizability of types of cubic decompositions of the graph K_{10} (Ukrainian). The Third International Science and Practical Conference 'Mathematical and Programming Maintenance of Intellectual Systems (MPZIS-2005)'. November 16-18, 2005, Report Theses, Dnipropetrovs'k, 2005, 139-140.
3. A.M.Barajev, I.A.Faradjev, The construction and the computer investigation of regular and regular bipartite graphs (Russian). In: 'Algorithmic Investigations in Combinatorics', Moscow, 1978.
4. A.J.Petrenjuk, Enumerating decompositions of $K(10)$ into isomorphic cubic factors. In: 'Svitogl'ad', vyp.2, Kirovograd, 1996, 52-60.
5. L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk, On the enumeration of non-isomorphic decompositions of the graph $K(10)$ into cubic factors (Russian), The State Flight Academy of Ukraine, Kirovograd, 1996, 69 pp., Dep. to the State Scientific Library of Ukraine, October 24, 1996, № 2125-Uk96.
6. L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk, The existence of certain types of cubic decompositions of the graph K_{10} (Ukrainian). The Materials of the First Inter-High-Schools Seminar "Combinatorial Configurations and Their Applications", Kirovograd, April 19-20, 2006, 39-40.
7. L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk, The existence of cubic decompositions of order 10 (type 1102), The Materials of the Ninth International Science and Practice Conference "Science and Education - '2006", vol. 13, Physics and Mathematics. Dnipropetrovs'k, Science and Education, 2006, 64-68.
8. L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk, On the existence of cubic decompositions of the graph K_{10} with the type 2011 (Ukrainian). Scientific Notes, vyp.65, Mathematical Sciences. Kirovograd State Pedagogical University, 2006, 85-94.
9. D.A. Petrenjuk, The census of possible types of cubic decompositions of K_{13} (Ukrainian). The Third International Science and Practical Conference 'Mathematical and Programming Maintenance of Intellectual Systems (MPZIS-2005)'. November 16-18, 2005, Report Theses, Dnipropetrovs'k, 2005, 137-138.
10. D.A. Petrenjuk. On the cubic decompositions of the graph K_{13} . The Materials of the First Inter-High-Schools Seminar "Combinatorial Configurations and Their Applications". Kirovograd, April 19-20, 2006, 41-42.

ТОТАЛЬНО БАЗИСНЫЕ МЕРЫ

В.А. Романов

Введено понятия totally basic measure and it is solved a problem : Which measures in Frechet spaces are totally basic measures.

It is introduced a notion of totally basic measure and it is solved a problem : Which measures in Frechet spaces are totally basic measures.

1. **Введение.** Известно [1], что в бесконечномерном пространстве Фреше никакая конечная мера не может служить базисом в классическом смысле даже для семейства всех своих сдвигов, то есть не все её сдвиги могут быть заданы как произведения интегрируемых функций на саму меру. Поэтому представляет интерес нахождение такого обобщения понятия базисной меры, которое позволяет выражать все другие меры в данном пространстве через одну и ту же меру.

2. **Постановка задачи.** Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, Y - банахово пространство. Под Y -значной мерой в пространстве X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на всех борелевских подмножествах пространства X и принимает значения в пространстве Y .

Напомним, что последовательность векторных мер $\Phi(k)$ в пространстве X называется *слабо сходящейся* к векторной мере Φ , если для каждой заданной на X ограниченной непрерывной функции с числовыми значениями последовательность интегралов от неё по пространству X относительно разности мер $\Phi(k)$ и Φ сходится к нулю.

Определение 1. Неотрицательная мера M в пространстве X называется *слабым базисом* векторной меры Φ , если существует слабо сходящаяся к Φ последовательность таких векторных мер, которые представимы как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру M .

Определение 2. Неотрицательная мера M в пространстве X называется *тотально базисной* мерой, если для каждого банахова пространства Y и каждой Y -значной меры Φ в X мера M есть слабый базис для Φ .

Цель статьи состоит в том, чтобы установить критерий тотальной базисности меры.

3. Результаты работы.

Теорема 1. Пусть X - сепарабельное пространство Фреше, то есть полное сепарабельное метризуемое локально выпуклое пространство. Для того чтобы неотрицательная мера M в пространстве X была тотально базисной, необходимо и достаточно, чтобы ни на одном непустом открытом множестве она не принимала нулевого значения.

Доказательство. Предположим, что мера M принимает нулевое значение на некотором непустом открытом множестве. Пусть Φ - дискретная ненулевая векторная мера, сосредоточенная в точке x этого множества, $\Phi(k)$ -

произвольная последовательность векторных мер, представимых как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру M . Рассмотрим ограниченную непрерывную функцию, принимающую значение 1 в точке x и обращающуюся в нуль вне упомянутого открытого множества. Тогда последовательность интегралов от неё относительно разности мер Φ (κ) и Φ не сходится к нулю. Отсюда вытекает необходимость.

Остаётся доказать достаточность. Пусть M - фиксированная неотрицательная мера в пространстве X со строго положительными значениями на непустых открытых множествах, а Φ - произвольная векторная мера в X .

Поскольку вариация векторной меры есть неотрицательная мера и поскольку в полном сепарабельном метризуемом пространстве значение неотрицательной меры на произвольном измеримом множестве можно аппроксимировать её значениями на содержащихся в этом множестве компактах, то отсюда вытекает, что в пространстве X найдётся последовательность таких попарно непересекающихся компактов C (a), что для каждого натурального числа k значение вариации меры Φ на дополнении до X объединения первых k компактов этой последовательности меньше числа $1/k$.

Покроем теперь первый компакт C (1) конечным числом таких попарно непересекающихся борелевских множеств A (1, p , k) диаметра меньше $1/k$, внутренности которых пересекаются с компактом C (1). Множества этого покрытия отнесём к первому семейству. Обозначим через

V (1, k) их объединение.

Далее покроем разность компакта C (2) и множества V (1, k) конечным числом таких непересекающихся между собой и с множеством

V (1, k) борелевских множеств A (2, p , k) диаметра меньше $1/k$, внутренности которых пересекаются с компактом C (2). Множества этого покрытия отнесём ко второму семейству. Обозначим через V (2, k) объединение всех множеств первого и второго семейств.

Продолжим этот процесс далее. На a -том по счёту этапе покроем разность компакта C (a) и множества V ($a - 1$, k) конечным числом таких непересекающихся между собой и с V ($a - 1$, k) борелевских множеств A (a , p , k) диаметра меньше $1/k$, внутренности которых пересекаются с компактом C (a). Множества этого покрытия отнесём к

a -тому семейству. Обозначим через V (a , k) объединение всех множеств первых a семейств.

Процесс таких построений закончим для числа $a = k$ включительно.

Заметим, что для каждого семейства соответствующие множества

A (a , p , k) имеют непустые внутренности, а потому мера M принимает на них строго положительные значения. Пусть M (a , p , k) - вероятностные меры, получающиеся нормировкой произведений индикаторов указанных множеств

на меру M , а $U(a, p, k)$ - значения векторной меры Φ на упомянутых множествах.

Зададим теперь векторную меру $\Phi(k)$ как сумму произведений векторных констант $U(a, p, k)$ на соответствующие скалярные меры

$M(a, p, k)$, где в сумме учитываются все семейства до k -того включительно.

Ясно, что каждая из построенных векторных мер $\Phi(k)$ представима как произведение интегрируемой по Бохнеру векторной функции на меру M . Ясно также, что вариация векторной меры $\Phi(k)$ не превосходит вариации векторной меры Φ .

Теперь зафиксируем произвольную ограниченную непрерывную скалярную функцию T на пространстве X и положительное число c .

Без уменьшения общности можно считать, что функция T по модулю не превышает 1.

Далее зафиксируем такое натуральное число $k(0)$, что значение вариации векторной меры Φ на дополнении до X объединения первых

$k(0)$ компактов $C(a)$ строго меньше числа c .

Для всех k , не меньших числа $k(0)$, множество $B(k(0), k)$ включает в себя объединение первых $k(0)$ компактов $C(a)$, а потому для таких k значение вариации векторной меры Φ на дополнении до X множества $B(k(0), k)$ меньше числа c . Тем более это верно для вариаций векторных мер $\Phi(k)$, поскольку они мажорируются вариацией векторной меры Φ .

Рассмотрим теперь модуль непрерывности функции T на объединении первых $k(0)$ компактов $C(a)$. Под значением модуля непрерывности функции на подмножестве пространства X для данного положительного аргумента понимаем верхнюю грань модуля разности значений функции в точках подмножества и всего X , где верхняя грань берётся по всем парам таких точек, расстояние между которыми не превышает упомянутого аргумента.

Поскольку объединение конечного числа компактов снова есть компакт, то наш модуль непрерывности имеет нулевой предел, когда его аргумент стремится к нулю, а потому найдётся такое большее числа $k(0)$ число

$k(1)$, что при всех k , больших числа $k(1)$, значение модуля непрерывности для аргумента $1/k$ меньше числа c .

В каждом из множеств $A(a, p, k)$, входящих в первые $k(0)$ семейств, выберем по одной точке $x(a, p, k)$, принадлежащей компакту $C(a)$. Поскольку на указанном множестве векторные меры $\Phi(k)$ и Φ принимают одинаковое значение, то интеграл по этому множеству от функции T относительно разности векторных мер $\Phi(k)$ и Φ не изменится, если от подынтегральной функции отнять константу, равную значению функции T в точке $x(a, p, k)$.

Модуль новой подынтегральной функции не превосходит модуля непрерывности функции T от аргумента, равного диаметру множества

$A(a, p, k)$. Напомним, что этот диаметр меньше числа $1/k$.

Следовательно, при всех k , больших числа $k(1)$, модуль новой подынтегральной функции меньше числа c , а потому норма соответствующего интеграла не превосходит произведения числа c на сумму значений вариаций векторных мер $\Phi(k)$ и Φ на множестве

$A(a, p, k)$.

Поскольку множество $B(k(0), k)$ составлено из непересекающихся множеств $A(a, p, k)$, то норма интеграла по множеству $B(k(0), k)$ от функции T относительно разности векторных мер $\Phi(k)$ и Φ не превосходит произведения числа c на сумму значений вариаций векторных мер $\Phi(k)$ и Φ на множестве $B(k(0), k)$, а потому не превосходит произведения числа c на удвоенную полную вариацию меры Φ .

Поскольку же значения вариаций векторных мер $\Phi(k)$ и Φ на дополнении до X множества $B(k(0), k)$ меньше числа c , а функция T по модулю не превосходит 1, то норма интеграла по всему X от функции T относительно разности векторных мер $\Phi(k)$ и Φ не превосходит произведения числа c на константу $2(1 + \text{Var } \Phi)$.

Поскольку число c можно выбрать сколь угодно малым, то отсюда получаем, что последовательность интегралов по пространству X от функции T относительно разности векторных мер $\Phi(k)$ и Φ сходится к нулю, чем и завершается доказательство.

Доказанная теорема позволяет строить примеры тотально базисных мер.

Пример 1. Поскольку невырожденная гауссовская мера [2] в сепарабельном банаховом пространстве принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах, то она тотально базисна.

Пример 2. Если мера M в сепарабельном банаховом пространстве эквивалентна невырожденной гауссовской мере, то и она принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах, а потому также тотально базисна. Заметим, что мера M плотно непрерывна [3].

Замечание 1. Не каждая плотно непрерывная мера принимает строго положительные значения на всех непустых открытых множествах. Соответствующим примером может служить произведение индикатора единичного шара на невырожденную гауссовскую меру. Поэтому не каждая плотно непрерывная мера тотально базисна.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Гирсанов И.В., Митягин Б.С. Квазиинвариантные меры в топологических линейных пространствах // Научн. Докл. Высшей школы. – 1959. – 2. – С. 5 – 10.
2. Го Х. Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
3. Романов В.О. Неперервні міри. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2004. – 64 с.

УДК 519.6: 517

НЕКОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ТА НЕРІВНІСТЬ КОШІ – БУНЯКОВСЬКОГО

Проф. Залмен Філер, асист. Олександр Дреєв

Задача розкладання вектора по базису підпространства, не вмещаючого даний вектор, некорректна. Она заменяется задачей отыскания наилучшего приближения методом наименьших квадратов. Определяется проекция вектора на подпространство и расстояние до него. Попутно получается неравенство Коши – Буняковского.

The problem of decomposition of a vector in basis subspace not containing a vector, is incorrect. She is replaced with a problem the best approximation by a method of the least squares. The projection of a vector on subspace and distance up to him is determined. Inequality Cauchy - Bunyakovsky in passing turns out.

Вступ. Для колінеарних ненульових векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} рівняння $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ має єдиний розв'язок відносно λ . У евклідовому просторі його можна знайти, множачи скалярно рівняння на вектор \mathbf{b} . Це дає $\lambda = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / b^2$. Для не колінеарних векторів указане рівняння не має розв'язків. Задача розв'язання цього рівняння є *некоректною* (тобто, розв'язок або не існує, або не єдиний, або “дуже чутливий” до малих змін умов) й через те, що *мала* зміна напрямку одного з колінеарних векторів приводить її до задачі, яка не має розв'язку. Тому її треба переформулювати так, щоби вона мала єдиний розв'язок завжди. Такого типу задачі виникають й в математичній статистиці, коли навіть для лінійного детермінованого зв'язку між масивами – векторами $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ рівняння $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ не має розв'язків, бо теоретично пропорційні елементи a_k та b_k через наявність похибок вимірювання чи обчислення стають непропорційними. Для таких задач К.Гауссом та А.Лежандром був запропонований метод найменших квадратів, де шукається значення λ , яке мінімізує квадратичну нев'язку - відхил $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}, \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$.

1. Знаходження мінімальної нев'язки. Ми вже писали про доведення нерівності Коші – Буняковського за допомогою переходу до ортів векторів і дослідження нерівностей для модуля суми або різниці ортів. В цій статті ми використаємо дослідження функції – скалярного добутку

$$f(\lambda) = (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}, \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) = (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})^2. \quad (1)$$

За властивостями скалярного добутку $f(\lambda) > 0$ при всіх \mathbf{a} , \mathbf{b} і λ й дорівнює нулеві тільки при $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} = \mathbf{0}$, коли $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Таким чином, мінімум $f(\lambda) = 0$ при таких \mathbf{a} , \mathbf{b} і λ . Зараз ми пропонуємо дослідити функцію $f(\lambda)$ на мінімум й при не колінеарних векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Розглянемо найпростіший випадок евклідового простору для векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} й скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді, використовуючи та дистрибутивність скалярного добутку відносно різниці векторів та однорідність відносного скалярного множника, отримаємо

$$f(\lambda) = \lambda^2 b^2 - 2\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + a^2 \Rightarrow f'(\lambda) = 2\lambda b^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \text{ якщо } \lambda = \lambda_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / b^2. \text{ Тоді мінімальне значення функції } f(\lambda) = f(\lambda_0) = a^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 / b^2 = (a^2 b^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2) / b^2 \geq 0.$$

Звідси й випливає нерівність Коші Буняковського $a^2b^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \geq 0$. Для векторів на площині або у тривимірному просторі вектор $\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{b}$ перпендикуляр до вектора \mathbf{b} .

В ермітнитоному (унітарному) просторі з комплексними значеннями скалярного добутку (\mathbf{a}, \mathbf{b}) й числа λ , але невід'ємними значеннями скалярного квадрату – функції $f(\lambda)$ у (1), використовуючи антикомутативність скалярного добутку $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})^*$ (* - знак комплексного спряження) та винесення спряженого множника другого вектора у добутку $(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) = \lambda^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, отримаємо рівність $f(\lambda) = |\lambda|^2 b^2 - \lambda^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + a^2$. Підставивши сюди комплексне значення $\lambda = \alpha + i\beta$, отримаємо $f(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)b^2 - (\alpha - i\beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\alpha + i\beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* + a^2$. Частинні похідні f_α та f_β у точці мінімуму повинні дорівнювати нулеві, що дає критичні значення α_0 та β_0 : $\alpha_0 = \operatorname{Re}((\mathbf{a}, \mathbf{b})/b^2)$, $\beta_0 = -\operatorname{Im}(\mathbf{a}, \mathbf{b})/b^2 \Rightarrow \lambda_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^*/b^2$. Тоді мінімальне значення функції $f(\lambda) = f(\lambda_0) = a^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2/b^2 = (a^2b^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2)/b^2$. Це дає ту ж саму нерівність Коші – Буняковського $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2 \leq a^2b^2$. Рівність тут буде для комплексних векторів, коли комплексний множник λ зробить ці вектори “колінеарними”. Пояснимо прикладом: нехай маємо вектори $\mathbf{a} (3, 2)$ та $\mathbf{b} (4, -1)$. Вони не є колінеарними, бо їх координати не пропорційні, але, розглядаючи їх як комплексні числа $\mathbf{a} = 3+2i$ та $\mathbf{b} = 4-i$, знайдемо $\lambda = (3+2i)/(4-i) = (3+2i)(4+i)/17 = (10+11i)/17$. Таким чином, $\lambda = 10/17 + i11/17$ – єдиний розв'язок рівняння в \mathbb{C} . Він дає коефіцієнт розтягування $|\lambda|$ вектора \mathbf{b} та кут його повороту $\arg(\lambda)$ для отримання вектора \mathbf{a} .

2. Елементарний підхід без використання диференціального числення.

У підручниках алгебри зазвичай розглядається той самий квадратний тричлен $f(\lambda) = \lambda^2 b^2 - 2\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + a^2$ й використовується шкільне знання, що він приймає невід'ємні значення, а тому його дискримінант $4(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - 4a^2b^2 \leq 0$. Такий самий підхід використано в брошурі [1, с. 4]. Там для доведення пропонується розглянути функцію $y = \sum_{i=1}^n (x a_i + b_i)^2$. Чому? Такий само штучний підхід

уміщено в усіх підручниках лінійної алгебри та функціонального аналізу. Між тим, наш підхід пов'язаний із загальною ідеєю побудови регуляризуючого оператора для розв'язання некоректних задач, а мінімальна нев'язка вказує на відхилення отриманого “псевдо розв'язку” від неіснуючого розв'язку.

Точніше, ми отримаємо абсолютну квадратичну похибку $f(\lambda_0) = \frac{a^2b^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2}{b^2}$;

якщо вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} вважати рівноправними, то доцільно оцінювати точність відношенням

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a^2b^2 - |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|^2}{a^2b^2}. \quad (2)$$

Тут нев'язку дано й для комплексно-значних векторів в ермітовому просторі, де скалярний добуток є комплекснозначним; його модуль, як і модулі векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} , є дійсними числами.

У посібнику [2, с. 90, 105] пропонується доведення нерівності К.-Б. за допомогою підрахунку $f(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^* / b^2$. Чому береться таке значення, автор не вказує. Про справедливість нерівності К.-Б. в унітарному просторі сказано, що “доведення проводиться за тією ж схемою, як і в дійсному випадку”. Нагадаємо, що перше видання цієї книги вийшло у 1974 р., коли в масовій школі ще не вивчали диференціального числення. Та й мети дати мінімізуюче тлумачення указанного значення $\lambda_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^* / b^2$, автор не ставить.

Наш підхід переноситься на векторні рівняння з багатьма (n) скалярними невідомими x_k типу

$$\mathbf{b}_1 x_1 + \mathbf{b}_2 x_2 + \mathbf{b}_3 x_3 + \dots + \mathbf{b}_n x_n = \mathbf{a}. \quad (3)$$

Якщо вектор \mathbf{a} не лежить в оболонці, натягнутій на вектори $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, то задача не має розв'язку $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Регуляризація задачі досягається заміною розв'язання несумісної системи (3) задачею знаходження вектора \mathbf{x} , який мінімізує сумарне квадратичне відхилення (нев'язку) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{a})^2$. Це дає систему нормальних рівнянь, яка для лінійно незалежних рівнянь має єдиний розв'язок. При $n=2$ й не колінеарних $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ нев'язкою є квадрат відстані кінця вектора \mathbf{a} від площини векторів $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, тобто квадрат довжини перпендикуляра \mathbf{c} , опущеного на вказану площину, бо умови – рівняння для пошуку x_1 та x_2 , отримані диференціюванням по x_1 та x_2 ,

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 2(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}) \mathbf{b}_1 = 0, \quad f_{x_2}(x_1, x_2) = 2(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}) \mathbf{b}_2 = 0,$$

є умовами перпендикулярності вектора - нев'язки до векторів \mathbf{b}_1 та \mathbf{b}_2 . При $n > 2$ інші умови теж є умовами перпендикулярності вектора - нев'язки до векторів “базису” $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$: $(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n - \mathbf{a}) \mathbf{b}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$. В [1, с. 74-76] такий підхід проведено для кожної координати x_k , даючи їй приріст t , отримуючи квадратичну функцію від цього t , що веде до нормальної системи. Методами диференціального числення функції багатьох змінних, ці рівняння отримуємо миттєво.

Якщо вектори $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ взаємно ортогональні, то для кожного з x_k маємо одне рівняння $(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k) x_k = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_k)$, звідки $x_k = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_k) / b_k^2$.

У [1, с. 81] наводиться формула Гаусса для мінімального квадратичного відхилення $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{a})^2$ при (без виведення) при $n = 3$, але не вказується можливість узагальнення з неї нерівності К.-Б.

Величина нев'язки більш інформативна, ніж нерівність Коші – Буняковського. Формула (2) показує на скільки він відрізняється відносно добутку модулів цих векторів. Він оцінює коефіцієнт K кореляції між векторами – масивами \mathbf{a} та \mathbf{b} :

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a^2 b^2 - |(a, b)|^2}{a^2 b^2} = 1 - K, \quad K = \frac{(a, b)^2}{a^2 b^2} \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Якщо вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} *колінеарні*, тобто відповідні координати пропорційні, то $K=1$. При неколінеарності цих векторів за нерівністю Коші – Буняковського чисельник у виразі для $\delta(\mathbf{a},\mathbf{b})$ **додатний** й коефіцієнт $K<1$. Для незалежних випадкових значень елементів масивів \mathbf{a} і \mathbf{b} скалярний добуток $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 0$ й $K \approx 0$, що свідчить про відсутність суттєвого зв'язку між \mathbf{a} та \mathbf{b} .

Сучасні програмні засоби дозволяють автоматизувати розрахунки з використанням векторів та матриць. Наприклад, використовуючи MatLab, були згенеровані випадкові матриця \mathbf{B} розмірністю 4×2 та вектор стовпець \mathbf{a} розмірністю 4 ($\mathbf{B}=\text{rand}(4,2)$; $\mathbf{a}=\text{rand}(4,1)$):

$$\mathbf{a}^T=(0.8214; 0.4447; 0.6154; 0.7919), \mathbf{B}^T=\begin{pmatrix} 0.9501 & 0.2311 & 0.6068 & 0.4860 \\ 0.8913 & 0.7621 & 0.4565 & 0.0185 \end{pmatrix}.$$

Отримано за допомогою виразу $\mathbf{x}=(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{a}=(1.0697; -0.0212)^T$. Обчислено величину $K=(\mathbf{B}^T\mathbf{x}-\mathbf{a})'(\mathbf{B}^T\mathbf{x}-\mathbf{a})/(\mathbf{a}'\mathbf{a}*((\mathbf{B}^T\mathbf{x})'(\mathbf{B}^T\mathbf{x})))=0.0467$. Мале значення K можна (порівняно з одиницею) свідчить про відсутність тісного зв'язку вектора \mathbf{a} зі стовпцями матриці \mathbf{B} .

При дослідженнях залежних величин коефіцієнт K матиме значення близьке до 1. Як приклад було розраховано коефіцієнт кореляції K для вектора \mathbf{a} – чисел Вольфа та матриці \mathbf{B} , стовпці якої із запізненням на 8 діб містять швидкість сонячного вітру, його густину та значення напруженості міжпланетного магнітного поля (за 100 діб). Коефіцієнт $K=0.7913$, що свідчить про суттєвий зв'язок між цими величинами.

3. Лінійні регресії \mathbf{a} на \mathbf{b} та \mathbf{b} на \mathbf{a} . Якщо вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} не колінеарні, то їх можна представити у вигляді $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mathbf{a}_0$ або $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a} + \mathbf{b}_0$. Логічно, що пошук λ та μ з умов мінімізації модуля вектора $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$ чи $\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}$, дасть ті ж значення $\lambda_0 = (\mathbf{a},\mathbf{b})/b^2$, $\mu_0 = (\mathbf{a},\mathbf{b})/a^2$, які дає мінімізація модулів векторів - нев'язок. Очевидно, $\lambda_0\mu_0 = (\mathbf{a},\mathbf{b})^2/(a^2b^2)=K \in [0;1]$. Ці числа називають відповідно *коефіцієнтами регресії \mathbf{a} на \mathbf{b} та \mathbf{b} на \mathbf{a}* . Вони мають однаковий знак “+” при $(\mathbf{a},\mathbf{b})>0$ та “-” при $(\mathbf{a},\mathbf{b})<0$. Для геометричних векторів \mathbf{a} і \mathbf{b} гострий кут між ними дасть знак “+”, тупий – знак “-”. Вектори нев'язок \mathbf{a}_0 та \mathbf{b}_0 , як правило, різні й ортогональні відповідно векторам \mathbf{b} та \mathbf{a} .

Висновки

1. Аналізуються доведення нерівності Коші – Буняковського (К.-Б.) засобами алгебри та аналізу. Відмічений штучний характер цих методів.
2. Пропонується йти від квадратичного наближення одного вектора колінеарним другому з умови мінімізації нев'язки (відхилю) в евклідовому векторному просторі. Отримані відповідні коефіцієнти, які є коефіцієнтами регресії одного вектора – масиву на другий.
3. Метод і результати переносяться на вектори в ермітовому просторі.
4. Показано, що результати виражають загальну лінійну залежність між векторами виду $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mathbf{a}_0$ чи $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a} + \mathbf{b}_0$.

5. Дано статистичне тлумачення результатів. Показано за допомогою нерівності К.–Б., що коефіцієнт кореляції $(a,b)^2/(a^2 b^2)=:K \in [0;1]$.
6. Підходи, доступні студентам 1-го курсу ВНЗ, які вивчають вищу математику.
7. Існування розвинутого програмного забезпечення дозволяє, не проводячи складних аналітичних перетворень, отримувати вектор x , що мінімізує квадратичне відхилення $(a-Bx)^2$, та відносну оцінку мінімального відхилення наближення від заданого вектору a .

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Дринфельд Г.И. Интерполирование и способ наименьших квадратов. – К.: Вища школа, 1984. – 103 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1980. – 400 с.
3. Дринфельд Г.И. Вища математична освіта у Києві в роки 1927-1941// У світі математики, т.4, 1998, вип. 2. – С. 68 – 82.
4. Карнацевич В.Л. 100 знаменитых харьковчан. – Харьков: Фолио, 2005. – 510 с.
5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах MahCad 12, MATLAB 7, Maple 9. – М.: NT Press, 2006. – 496 с. (Самоучитель)

УДК 512.552.1

НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТИВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ

Ю. В. Яременко

Доведено, що напівдосконалі кільця дистрибутивно модульного типу є бірядними кільцями.

We prove that any noetherian semi-perfect ring of distributive module type is biserial.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Важливу роль в теорії кілець і модулів відіграють різноманітні умови скінченності, зокрема, умови обриву ланцюжків підмодулів та односторонніх ідеалів.

Нагадаємо, що модуль M називається *нетеровим (артиновим)*, якщо кожна непорожня множина його підмодулів містить максимальний (мінімальний) елемент.

Кільце A називається *артиновим (нетеровим) справа*, якщо воно, розглянуте як правий модуль над собою, являється артиновим (нетеровим).

Кільце цілих чисел являється, очевидно, нетеровим, але не артиновим.

Радикалом Джекобсона R кільця A називається перетин всіх його максимальних правих ідеалів [1].

Кільце A називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R кільця A [2].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R , якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент e в кільці A конгруентний з елементом u за модулем R).

Теорема 1 [2]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли $1 \in A$ розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a = 1a1 = (e_1 + \dots + e_n)a(e_1 + \dots + e_n) =$

$= \sum_{i,j=1}^n e_i a e_j$. Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму

абелевих груп $e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Елементи із $e_i A e_j$ ми будемо позначати через a_{ij} . Будь-який елемент $a \in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}) . Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij} = e_i A e_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається *двостороннім пірсовським розкладом кільця A* .

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [3] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивно модульного типу. В роботі [4] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо для будь-яких його підмодулів K, L, N виконується умова: $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Ясно, що підмодулі та фактор модулі дистрибутивного модуля також дистрибутивні.

Модуль називається *напівдистрибутивним*, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.

Ненульовий модуль M називається *простим*, якщо у нього рівно два підмодулі (сам M і нульовий підмодуль).

Модуль M називається *бірідним*, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + K_2 = M$, або найбільший власний підмодуль в M , а $K_1 \cap K_2 = 0$, або простий модуль [4].

Напівдосконале кільце A називається *бірідним кільцем*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірідний [4].

Теорема 2 [4]. Нехай e – довільний ідемпотент бірідного кільця A . Тоді eAe являється бірідним кільцем.

Теорема 3 [5, с.281]. Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно розпадається в пряму суму правих ідеалів, кожен з яких має рівно один максимальний підмодуль.

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається *зведеним*, якщо A/R є прямим добутком тіл.

Модуль P називається *проективним*, якщо для будь-якого ізоморфізму φ модуля M на модуль N ($\varphi: M \rightarrow N$) і для будь-якого гомоморфізму $\psi: P \rightarrow N$ існує гомоморфізм $h: P \rightarrow M$ такий, що $\psi = \varphi h$ [6, с.132].

Підмодуль N модуля M називається *косуттєвим*, якщо з рівності $N+X=M$ слідує, що $X=M$ для довільного підмодуля X модуля M .

Проективний модуль $P=P(M)$ називається *проективним накриттям* модуля M , якщо існує епіморфізм $\varphi: P \rightarrow M$ такий, що $\text{Ker } \varphi$ - косуттєвий підмодуль в P .

За теоремою Моріти [7] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалого кільця A в пряму суму головних A -модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проективних модулів: $A = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$

Нехай A – нетерова справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R . P_1, \dots, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A модулі. Позначимо $P(P_i R)$ – проективне накриття модуля $(P_i R)$. Тоді

$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}}$, $i, j = 1, \dots, s$. Поставимо у відповідність модулям P_1, \dots, P_s точки

$1, \dots, s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* (позначається $Q(A)$) нетерова справа напівдосконалого кільця A [8].

Аналогічно визначається лівий сагайдак $Q'(A)$ нетерового зліва напівдосконалого кільця A .

Відмітимо, що сагайдак напівдосконалого кільця не змінюється при переході до кілець, еквівалентних в сенсі Моріти. Очевидно, також, що $Q(A) = Q(A/R^2)$.

Модуль M називається *ланцюговим*, якщо структура його підмодулів лінійно впорядкована.

Пряма сума ланцюгових модулів називається *напівланцюговим модулем*.

Кільце A називається *напівланцюговим*, якщо воно являється напівланцюговим правим і напівланцюговим лівим модулем над собою.

Модуль M називається *скінченно зображуваним*, якщо існує точна послідовність $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$, де P_1 і P_0 скінченнопороджені модулі.

Напівдосконале кільце A називається *кільцем дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінченно зображуваний A -модуль напівдистрибутивний, тобто пряма сума дистрибутивних модулів.

Важливим прикладом кілець дистрибутивно модульного типу являються напівланцюгові кільця.

Отже, для того, щоб показати скінченну зображуваність модуля M над напівдосконалим кільцем, потрібно перевірити скінченнопородженість модуля M і скінченнопородженість модуля $\text{Ker}\Pi$, де Π – епіморфізм проективного накриття $P(M)$ модуля M на M .

Теорема 4 [9]. *Нехай A кільце дистрибутивно модульного типу. $e^2 = e \in A$. Тоді кільце eAe також є кільцем дистрибутивно модульного типу.*

Нехай A – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу,

$I = e_1 + \dots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$, ($i, j = 1, \dots, n$).

Теорема 5 [9]. *Нехай A – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу. Тоді A_{ij} є лівим ланцюговим A_{ii} – модулем і правим ланцюговим A_{jj} – модулем ($i, j = 1, \dots, n$).*

Для нетерових (артинових) кілець має місце теорема:

Теорема 6 [8]. *Якщо кільце A нетерове (артинове) справа, то кільце eAe і fAf – нетерові, (артинові) справа, fAf – модуль eAf та eAe – модуль fAe – скінченнопороджені. Навпаки, якщо ці умови виконані для деяких ідемпотентів $e, f \in A$ таких, що $e+f=1$, то кільце A – нетерове (артинове) справа.*

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва)*, якщо воно, розглянуте як правий (лівий) модуль над собою, є напівдистрибутивним.

Кільце, яке напівдистрибутивне справа і зліва називають *напівдистрибутивним*.

Враховуючи теорему 6, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.*

Кільце A називається *локальним*, якщо у нього всього один максимальний правий ідеал.

В цьому випадку цей ідеал є радикалом Джекобсона R кільця A . Тому у кільця A всього один максимальний лівий ідеал.

З наслідка 1 і теорем 4 та 6 одержуємо наступне твердження.

Твердження 1. *Локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим.*

Слідуючи роботі [10] *мінором n -го порядку* кільця A називаємо кільце B ендоморфізмів скінченнопородженого проективного A -модуля, який може бути розкладений в пряму суму n нерозкладних модулів. З теорем 4 випливає наступний результат.

Твердження 2. *Будь-який мінор нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу є нетеровим напівдосконалим кільцем дистрибутивно модульного типу.*

Згідно твердження 1 локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим. Отже:

Наслідок 2 [8]. *Нетерове ланцюгове кільце A є дискретно нормованим кільцем (можливо некомутативним) або однорядним кільцем Кете, тобто ланцюговим артиновим кільцем.*

Лема 1 [11]. *Якщо A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне кільце, $I = e_1 + \dots + e_n$ – розклад $I \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii} , то $R_i A_{ij} = A_{ij} R_j$ для всіх $i, j = 1, \dots, n$.*

Ідеал J кільця A називається *первинним*, якщо $J \neq A$ і для будь-яких ідеалів L і N кільця A з включення $LN \subset J$ випливає, що або $L \subset J$, або $N \subset J$.

Первинним радикалом I кільця A називається перетин усіх первинних ідеалів кільця A [12, с.399].

Кільце A називається *первинним*, якщо добуток будь-яких двох ненульових ідеалів не рівний нулю.

Введемо поняття первинного сагайдака напівдосконалого кільця.

Нехай $\bar{1} = \bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_t$ – розклад одиниці кільця \bar{A} в суму взаємно ортогональних ідемпотентів. Позначимо $V = I/I^2$. Поставимо у відповідність точкам $1, \dots, t$ ідемпотенти $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_t$ та проведемо стрілку з точки i в точку j , якщо $\bar{f}_i V \bar{f}_j \neq 0$. Отриманий граф називається *первинним сагайдаком* кільця A .

В роботах [9,13] описано зведені мінори другого і третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу, які використовуються при доведенні теореми:

Теорема 7. *Нетерове напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу – бірядне.*

Доведення. Розглянемо I – первинний радикал нетерового напівдосконалого дистрибутивно модульного типу кільця A . Тоді

$\bar{A} = A/I = \bar{A}_1 \times \dots \times \bar{A}_t$ – прямий добутком первинних кілець, які еквівалентні в сенсі Моріти або тілу D , або дискретно нормованому кільцю $H_S(\mathcal{G})$.

Вагою точки i первинного сагайдака називається кільце ендоморфізмів нерозкладного прективного \bar{A}_i -модуля тобто вага у нашому випадку може бути D або $H_S(\mathcal{G})$.

Якщо вага буде тільки D , то кільце A артинове і теорема доведена Колбі та Фулером [14].

Занумеруємо всі точки первинного сагайдака кільця A в такому порядку, щоб першими були точки з вагою $H_S(\mathcal{G})$: $1, \dots, m$, а вага точок $m+1, \dots, t$ була D (може бути, що $m=t$). Причому нумеруємо точки, вага яких є тілом D наступним чином:

- 1) першими будуть точки з $R_k^2 \neq 0$,
- 2) далі йдуть точки з $R_k^2 = 0$, але $R_k \neq 0$,
- 3) $R_k = 0$.

Отримаємо двосторонній пірсовський розклад кільця A :

$$A = \begin{pmatrix} H & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & B_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B_1 \end{pmatrix}.$$

Кільце H відповідає точкам з вагою $H_S(\mathcal{G})$, тобто m першим точкам. Воно буде мати двосторонній пірсовський розклад:

$$H = \begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & H_{S_2} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & H_{S_m} \end{pmatrix}.$$

Із опису мінорів другого порядку отримаємо лему:

Лема 2. Нехай e та f -локальні ідемпотенти кільця A і $eAf \subseteq I$. Тоді eAf є або нулем або одновимірним правим векторним простором над тілом ендоморфізмів правого простого модуля, який відповідає ідемпотенту f та або нулем або одновимірним лівим векторним простором над тілом ендоморфізмів лівого простого модуля, який відповідає ідемпотенту e .

Теорема 8 [11]. Тіла ендоморфізмів всіх простих модулів над нетеровими нерозкладними напівдосконалыми напівдистрибутивними кільцями ізоморфні між собою.

Враховуючи теорему 8, отримаємо наслідок

Наслідок 3. Всі компоненти A_{ij} в двосторонньому пірсовському розкладі кільця H є скінченновимірними векторними просторами.

Крім того, легко показати, що первинний сагайдак кільця H не містить орієнтованих циклів. В іншому випадку вага, по крайній мірі однієї точки в цьому циклі, була б тілом D . Таким чином, кільце H має верхній трикутний вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ 0 & H_{S_2} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_{S_m} \end{pmatrix}.$$

З опису мінорів другого та третього порядку слідує, що існує $k \in \mathbb{N}$, таке, що $A_{ij}R_j^k = R_i^k A_{ij} = 0$, де R_i – радикал Джекобсона кільця H_{S_i} ($i=1 \dots m$). Аналогічно, для кілець B_3, B_2, B_1 виконується умова $A_{ij}R_j^k = R_i^k A_{ij} = 0$. Отже, двосторонній пірсівський розклад нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} H_{S_1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} & A_{1,m+1} & A_{1,m+2} & A_{1,m+3} \\ 0 & H_{S_2} & \dots & A_{2,m} & A_{2,m+1} & A_{2,m+2} & A_{2,m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & H_{S_m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & A_{m,m+3} \\ A_{m+1,1} & \dots & \dots & A_{m+1,m} & B_3 & A_{m+1,m+2} & A_{m+1,m+3} \\ A_{m+2,1} & \dots & \dots & A_{m+2,m} & A_{m+2,m+1} & B_2 & A_{m+2,m+3} \\ A_{m+3,1} & \dots & \dots & A_{m+3,m} & A_{m+3,m+1} & A_{m+3,m+2} & B_1 \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}R_j^k = R_i^k A_{ij} = 0$.

Розглянемо множину:

$$I_n = \begin{pmatrix} R_1^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_m^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що I_n є двостороннім ідеалом кільця A для кожного $n \geq k$. Отже, факторкільце $A_n = A/I_n$ є артиновим кільцем дистрибутивно модульного типу, яке є бірядним за теоремою Колбі–Фуллера [14] для кожного натурального номера $n \geq k$.

Покажемо, що будь-який нерозкладний проективний A -модуль є бірядним. Розглянемо, наприклад, модуль $P_1 = (\vartheta, \vartheta, \dots, \vartheta, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Його найбільший підмодуль $P_1R = (\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Зрозуміло, що $K_1 = (\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, 0, \dots, 0)$ є ланцюговим модулем кільця A . Ланцюговим буде і A_n -модуль $V_n = K_1/K_1R_1^n$ ($n \in \mathbb{N}$), всі фактори якого вичерпуються простими модулями U_1, \dots, U_{s_1} [8]. Позначимо $K_2 = (0, \dots, 0, A_{12}, \dots, A_{1m+3})$. Він буде артиновим за лемою 2 та є A_n -модулем для кожного натурального номера $n \geq k$.

Нехай $P_1^{(n)}$ – перший нерозкладний проективний A_n -модуль. Так як A_n – бірядне кільце, то єдиний максимальний підмодуль в $P_1^{(n)}$ має вигляд $K_1^{(n)} + K_2^{(n)}$, де $K_i^{(n)}$ ($i=1,2$) – ланцюгові модулі.

Так як $P_1^{(n)}$ дистрибутивний модуль, то $(K_1^{(n)} + K_2^{(n)}) \cap V_n = K_1^{(n)} \cap V_n + K_2^{(n)} \cap V_n$, і $(K_1^{(n)} + K_2^{(n)}) \cap K_2 = K_1^{(n)} \cap K_2 + K_2^{(n)} \cap K_2$.

В композиційному ряді модуля K_2 немає фактормодулів ізоморфних U_1, \dots, U_{s_1} . З попередніх рівностей слідує, що $K_1^{(n)} \cap V_n$ та $K_2^{(n)} \cap V_n$ є підмодулі ланцюгового модуля V_n , тому можна вважати, що $K_1^{(n)} \cap V_n \supseteq K_2^{(n)} \cap V_n$, тобто $V_n = K_1^{(n)} \cap V_n$ та $V_n \subseteq K_1^{(n)}$. Ми одержали, що цоколь модуля $K_1^{(n)}$ співпадає з цоколем модуля V_n і рівний прямій сумі простих модулів U_1, \dots, U_{s_1} .

В розклад цокolia модуля K_2 входять прості модулі $U_{s_1+1}, \dots, U_{m+3}$. Нехай модулі $K_1^{(n)} \cap K_2$ та $K_1^{(n)} \cap K_2$ є одночасно ненульовими. Так як цоколь $K_1^{(n)}$ містить принаймні один з простих модулів U_k ($k=1, \dots, s_1$), отримаємо, що і K_2 містить цей модуль. Прийшли до протиріччя. Отже, $K_1^{(n)} \cap K_2 = 0$ і $K_2^{(n)} \cap K_2 = K_2$, тобто K_2 – ланцюговий модуль як підмодуль ланцюгового модуля $K_2^{(n)}$. Тому $P_1R = (\mu, \vartheta, \dots, \vartheta, 0, \dots, 0) \oplus (0, \dots, 0, A_{12}, \dots, A_{1m+3}) = K_1 \oplus K_2$.

Аналогічно доводиться, що будь-який нерозкладний проективний A -модуль – бірядний. Відмітимо, що нерозкладні проективні праві A -модулі $P_{m+1}, P_{m+2}, P_{m+3}$ та ліві $Q_{m+1}, Q_{m+2}, Q_{m+3}$ є бірядними автоматично, так як вони являються і A_n -модулями. Теорема 7 доведена.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Джекобсон Н. Теория колец. – М.: ИЛ, 1947. – 288 с.
2. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
3. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
4. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
5. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
6. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
7. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.
8. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.

9. Яременко Ю.В. Мінори нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 1998. - №2. – С. 159-168.
10. Drozd Yu. A. Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – V. 6. – P. 173-176.
11. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики, 1993. – С. 457-480.
12. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1979. – Т. 2. – 464 с.
13. Yaremenko Yu.V. Noetherian semiperfekt rings of distributive module type // Matematychni Studii. – 1997. – V. 8, №1. – P. 3-10.
14. Colby R.R., Fuller K.R. Modules over diserial rings // Comm. In Algebra. – 1981. – № 9. – P. 511-532.

ЗМІСТ

<i>О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий.</i> ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПАРАМЕТРУ БАГАТОМАСШТАБНОГО РОЗВИНЕННЯ.....	3
<i>Ю.И. Волков.</i> МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.....	6
<i>П. Н. Денисенко.</i> АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ПО τ -МЕТОДУ ЛАНЦОША	10
<i>І.Г. Завізіон.</i> ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	22
<i>Г.В.Завізіон, В.В.Ключник.</i> ЗАДАЧА КОШИ НЕЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ	29
<i>С.Т.Кузнецов, Н.В.Столярчук.</i> НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА	37
<i>В.А.Кушнір, В.П. Кравченко, Г.А.Кушнір.</i> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ФАКТОРІВ ПЛАТОСПРОМОЖНОСТІ ТА ЛІКВІДНОСТІ У КОМЕРЦІЙНИХ БАНКАХ.....	46
<i>Г.А. Кушнір, В.А. Кушнір, А.В. Тороп.</i> ВИЗНАЧЕННЯ ВИГЛЯДУ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОРИСНОСТІ ВІД ЗАТРАТ НА ПЕВНІ ПРОЕКТИ ШЛЯХОМ МАШИННОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	53
<i>L.P. Petrenjuk, A.J. Petrenjuk.</i> THE COMPONENT REALIZABILITY OF CUBIC DECOMPOSITIONS OF ORDER 10, THAT HAVE ORDER TYPE 1021	59
<i>В.А. Романов.</i> ТОТАЛЬНО БАЗИСНЫЕ МЕРЫ	68
<i>З. Філер, О. Дресєв.</i> НЕКОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧИ РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ТА НЕРІВНІСТЬ КОШИ – БУНЯКОВСЬКОГО	72
<i>Ю. В. Яременко.</i> НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТОВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ	77

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Випуск 66

Серія:

МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ,
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 10.04.2006. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офсет. Друк різнограф.
Ум. др. арк. 5,26. Тираж 300. Зам. № 4318.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Факс.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua