УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ДИСТРИБУТИВНО МОДУЛЬНОГО ТИПУ.

Ю. В. ЯРЕМЕНКО, О. О. ШЕСТЕРНІНА

Описаны миноры второго и третьего порядка нетеровых полусовершенных колец дистрибутивно модульного типа.

The minors of orders 2 and 3 of noetherian semi-perfect rings of distributive module type are described.

Розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо $K \cap (L+N)=K \cap L+K \cap N$ для будь-яких підмодулів K, L, N.

Модуль називається *напівдистрибутивним,* якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів.

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва)* якщо воно є правим (лівим) модулем над собою.

Кільце, яке напівдистрибутивне справа і зліва називають *напівдистрибутивним.*

Модуль M називається *скінчено зображуваним*, якщо існує точна послідовність $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$, де P_1 і P_0 скінченопороджені модулі.

Кільце A з радикалом Джекобсона R називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала R [1].

Напівдосконале кільце A називається кільцем *дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінчено зображуваний А-модуль напівдистрибутивний, тобто пряма сума дистрибутивних модулів.

Важливим прикладом кілець дистрибутивно модульного типу являються напівланцюгові кільця .

Отже, для того, щоб показати скінчену зображуваність модуля M над напівдосконалим кільцем, потрібно перевірити скінченопородженість модуля M і скінченопородженість модуля $Ker\Pi$, де Π – епіморфізм проективного накриття $P(M)$ модуля M на M. Скористаємся методом Ауслендера [2]:

Лема 1. *Якщо* $P \xrightarrow{\Pi} P_0 \xrightarrow{\Pi_0} M \longrightarrow 0$ *і* $Q \xrightarrow{f} Q_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ *– точні послідовності, де* Q_0 *і* P_0 *проективні накриття модуля* M*, а* P_1 *і* Q_1 *проективні накриття* $Ker\Pi_0$ *і* $Ker f_0$ *відповідно, то існує комутативна діаграма*

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{\Pi} & P_0 & \xrightarrow{\Pi_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi_0 & & \downarrow 1_M & & \\ Q & \xrightarrow{f} & Q_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

в якій φ *і* φ_0 *– ізоморфізми.*

Д о в е д е н н я. За означенням проективного модуля існує гомоморфізм φ_0 такий, що $\Pi_0 = f_0\varphi_0$. Покажемо, що φ_0 – ізоморфізм. Для довільного $g_0 \in Q_0$ існує елемент $p_0 \in P_0$ такий, що $f_0(g_0)=\Pi_0(p_0)$. Так як $g_0=g_0-$

$\varphi_0(p_0)+\varphi_0(p_0)$, де $g_0-\varphi_0(p_0)\in Kerf_0$, то $Q_0=Im\varphi_0+Ker\varphi_0$. За властивістю проективного накриття $Kerf_0\subset Q_0R$, де R – радикал Джекобсона кільця A. За лемою Накаями $Im\varphi_0=Q_0$. Тому $p_0\cong Im\varphi_0\oplus Ker\varphi_0$, і в силу єдиності проективного накриття $Ker\varphi_0=0$, тобто φ_0 – ізоморфізм. Позначимо $Y=Kerf_0$. Тоді $Im\varphi_0\Pi=Y$. Так як $Imf=Y$, то за означенням проективного модуля існує гомоморфізм φ: $P\to Q$ такий, що $\varphi_0\Pi=f\varphi$. Застосовуючи міркування, наведені вище, до модуля Y і враховуючи, що Q– проективне накриття Y, отримаємо, що φ – ізоморфізм. Лему доведено.

Нехай P і P_0 – скінченопороджені проективні A-модулі і Π : $P\to P_0$ такий гомоморфізм, що $Im\Pi\subset P_0R$ і $Ker\Pi\subset PR$. Очевидно, що модуль $M_\Pi=P_0/Im\Pi$ є скінчено зображуваним модулем, причому P_0 – проективне накриття модуля M_Π, а P – проективне накриття модуля $Im\Pi$. Якщо φ_1 : $P\to Q$ і φ_0: $P_0\to Q_0$– ізоморфізми, то ясно, що $M_{\varphi_0\Pi\varphi_1^{-1}}\cong M_\Pi$. Навпаки, якщо Π : $P\to P_0$ – гомоморфізм, вказаний вище, а f : $Q\to Q_0$ – такий гомоморфізм, що $Imf=Q_0R$, $Kerf\subset QR$ і $M_\Pi\cong M_f$, то $f=\varphi_0\Pi\varphi_1^{-1}$.

Довільний скінченопороджений проективний модуль над напівдосконалим кільцем A однозначно розкладається в пряму суму головних. Нехай P і P_0 скінченопороджені проективні A-модулі, $P=P_1^{k_1}\oplus\ldots\oplus P_s^{k_s}$ і $P_0=P_1^{m_1}\oplus\ldots\oplus P_s^{m_s}$ – їх розклад в пряму суму головних A – модулів, Π : $P\to P_0$ – гомоморфізм.

Гомоморфізм Π записується у вигляді матриці $[\Pi]$ з елементами із $Hom_A\left(P_j^{k_j},P_i^{m_i}\right)$ $(i,j=1,\ldots,s)$, де кожний конкретний $Hom_A\left(P_j^{k_j},P_i^{m_i}\right)$ в свою чергу є матрицею розмірності $m_i\times k_j$ з елементами із $Hom_A\left(P_j,P_i\right)$. Нехай $e_1,\ldots,e_s$ – попарно ортогональні локальні ідемпотенти із розкладу $1\in A$. Тоді $P_i\cong e_iA,(i=1,\ldots,s)$ і $Hom_A(P_j,P_i)\cong e_iAe_j$. Отже, можна вважати, що $[\Pi]$ являється клітинною матрицею з елементами із e_iAe_j $(i, j=1,\ldots,s)$. Розділимо матрицю

$[\Pi]$ (переставляючи в разі необхідності рядки і стовпці) на s горизонтальних і s вертикальних смуг так, щоб в клітині на перетині i-ї горизонтальної смуги і j-тої вертикальної смуги стояли елементи із e_iAe_j.

Вияснимо, яким умовам повинна задовольняти матриця $[\Pi]$, щоб $P_0=P(M_\Pi)$, а $P=P(Im_\Pi)$. Із того, що $P_0=P(M_\Pi)$, випливає, що Π є клітинною матрицею з елементами із e_iRe_j $(i, j=1,\ldots,s)$.

Так як модулі $P_1,\ldots,P_s$ – попарно неізоморфні, то $e_iRe_j=e_iAe_j$ $(i\neq j)$. Так як нам відомо $Im\Pi$, то можна вважати, що $P=P(Im\Pi)$. Фактично, це зводиться до того, що із матриці $[\Pi]$ викидаються деякі стовпці.

Якщо скінчено зображуваний модуль M розкладний і $M=M_1\oplus M_2$, тоді $P_0=P(M_1)\oplus P(M_2)$ і $M=P(M_1)/X_1\oplus P(M_2)/X_2$, де $Ker\Pi_0=X_1\oplus X_2$. Отже, $Im\Pi=X_1\oplus X_2$ і $P(Im\Pi)=P(X_1)\oplus P(X_2)$, звідки і випливає, що матриця Π має клітинно-діагональний вигляд.

Лема 2. *Скінчено зображуваний модуль $M=M_\psi$ розкладний тоді і тільки тоді, коли для гомоморфізма $\psi:Q\to P$ скінченопороджених проективних модулів такого, що $Im\psi\subset PR$ і Q – проективне накриття $Im\psi$, існують автоморфізми α і β модулів Q і P такі, що $[\beta\psi\alpha]$ клітинно-діагональна матриця.*

Д о в е д е н н я. Нехай існують автоморфізми α і β модулів Q і P такі, що $[\beta\psi\alpha]$ клітинно- діагональна матриця. Тоді $M_\psi\cong M_{\beta\psi\alpha}$ і так як гомоморфізм $\beta\psi\alpha : Q\to P$ задовольняє ті ж умови, що й ψ, то очевидно, що модуль $M_{\beta\psi\alpha}$ розкладний у відповідності з розкладом матриці $[\beta\psi\alpha]$.

Нехай модуль M розкладний. Розглянемо комутативну діаграму :

$$\begin{array}{ccccccc}
Q & \xrightarrow{\psi} & P & \xrightarrow{\vartheta} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow 1_M & & \\
P(X_1)\oplus P(X_2) & \xrightarrow{\Pi} & P(M_1)\oplus P(M_2) & \xrightarrow{\tau} & M_1\oplus M_2 & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

Зафіксуємо ізоморфізми $\alpha_0 : Q \to P(X_1) \oplus P(X_2)$ і $\beta_0 : P \to P(M_1) \oplus P(M_2)$. Покладемо $Q_i = \alpha_0^{-1} P(X_i)$ і $P_i^{'} = \beta_0^{-1} P(M_i) (i=1,2)$. Так як $\Pi = \beta \psi \alpha^{-1}$, маємо $\beta_0^{-1} \Pi \alpha_0 = \beta_0^{-1} \beta \psi \alpha^{-1} \alpha_0$, де $\alpha^{-1} \alpha_0$ і $\beta_0^{-1} \beta$ – автоморфізми модулів Q і P, причому ясно, що гомоморфізм

$\beta_0^{-1} \beta \psi \alpha^{-1} \alpha_0 : \; Q_1 \oplus Q_2 \to P_i^{'} \oplus P_2^{'}$ клітинно-діагональний.

Із лем 1 і 2 випливає теорема.

Теорема 1. *Нехай A кільце дистрибутивно модульного типу .$e^2 = e \in A$. Тоді кільце eAe також є кільцем дистрибутивно модульного типу.*

Нехай A – напівдосконале кільце дистрибутивно модульного типу ,

$1 = e_1 + \ldots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$, $(i,j = 1, \ldots, n)$.

Теорема 2 [3]. *Нехай A – напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце. Тоді A_{ij} є лівим ланцюговим A_{ii} – модулем і правим ланцюговим A_{jj} – модулем $(i,j = 1, \ldots, n)$.*

Наслідок 1. *Напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.*

Твердження 1 [4]. *Локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим .*

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, $P_1, \ldots, P_s$ – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні модулі. Нехай проективне накриття $P(P_i R)$ модуля $P_i R$ має вигляд

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad (i,j = 1, \ldots, s).$$

Співставимо модулям $P_1, \ldots, P_s$ вершини (точки) $1, \ldots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Нехай A – напівдосконале кільце, для якого визначений сагайдак $Q(A)$. Визначимо сагайдак $RQ(A)$ кільця A, що пов'язаний з будовою модулів над ним [5], [6].

Нехай число вершин сагайдака $Q(A)$ дорівнює n і це вершини $1,\dots,n$, причому з вершини i у вершину j іде t_{ij} стрілок. Тоді новий сагайдак $RQ(A)$ складається з вершин $1,\dots,\ n$ та $\tau_1,\dots,\tau_n$, де вершини $\tau_1,\dots,\tau_n$ попарно різні. Сагайдак $RQ(A)$ є дводольним графом (стрілки ідуть тільки з вершин, що лежать у множині $\{1,\dots,n\}$ у вершини, що лежать у множині $\{\tau_1,\dots,\tau_n\}$, причому з вершини i у вершину τ_j йде t_{ij} стрілок).

Якщо в сагайдаці $RQ(A)$ опустити напрямок всіх стрілок, то одержимо неорієнтований граф, який позначимо $\overline{RQ(A)}$.

Теорема 3. [7]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого кільця A, квадрат радикала Джекобсона якого дорівнює нулю:

(а) A – кільце дистрибутивно модульного типу ;

(б) A – бірядне і $\overline{RQ(A)}$ є незв'язним об'єднанням неорієнтованих ланцюгів.

Слідуючи роботі [8] *мінором n-го порядку* кільця A називаємо кільце B ендоморфізмів скінченопородженого проективного A-модуля, який може бути розкладений в пряму суму n нерозкладних модулів. З теореми 1 випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Будь-який мінор нетерового напівдосконалого кільця дистрибутивно модульного типу є нетеровим напівдосконалим кільцем дистрибутивно модульного типу* .

Згідно твердження 1 локальне дистрибутивно модульного типу кільце є ланцюговим.

Наслідок 2 [9]. *Нетерове ланцюгове кільце A є дискретно нормованим кільцем (можливо некомутативним) або однорядним кільцем Кете, тобто ланцюговим артиновим кільцем.*

Ми опишемо зведені мінори другого і третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу. Розглянемо список всіх можливих, з точністю до ізоморфізму, сагайдаків Q з двома чи трьома точками таких, що задовольняють умову теореми 3. Такі сагайдаки називатимемо *допустимими*.

Твердження 3. *Допустимий сагайдак Q для $n=2$ визначається, з точністю до ізоморфізму, наступними матрицями.*

$$\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \zeta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Описуючи зведені мінори другого порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу ми використовуватимо позначення : $1=e_1+e_2$ – розкладом $1\in B$ в суму двох локальних ідемпотентів , $B_i=e_iB_ie_i$, R_i – радикал Джекобсона кільця B_i $(i=1,2)$ R – радикал Джекобсона кільця B, $X=e_1Be_2$, $Y=e_2Be_1$, $R=\begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$, так як B-нетерове, то $XR_2=R_1X$, $YR_1=R_2Y$.

Твердження 4. *Наступний список містить всі зведені мінори другого порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу B. Навпаки, всі кільця з приведеного списку є нетеровими напівдосконалими кільцями дистрибутивно модульного типу.*

(1) $B=T_2(D)$, кільце верхніх трикутних матриць другого порядку над тілом D.

(2) $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де $B_2=D$ – тіло, B_1 є або дискретно нормованим кільцем або однорядним кільцем Кете, $R_1X=XR_2=0$, X є одновимірним правим D-простором та одновимірним лівим B_1/R_1-простором.

(3) $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де $B_1=D$ – тіло, B_2 або дискретно нормовані кільце або однорядне кільце Кете, $R_1X=XR_2=0$, X-одновимірний правий B_2/R_2-простір та одновимірний лівий D-простір.

(4) $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 та B_2 або дискретно нормовані кільця або однорядні кільця Кете, $R_1X=XR_2=0$, X – одновимірний правий B_2/R_2-простір та одновимірний лівий B_1/R_1-простір.

(5) B – ланцюгове кільце. В неартиновому випадку $B=H_2(\vartheta)=\begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta \\ \mu & \vartheta \end{pmatrix}$, де ϑ-дискретно нормоване кільце, μ його єдиний максимальний ідеал.

(6) $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 та B_2 дискретно нормовані кільця чи однорядні кільця Кете; $YX=R_2$, $R_1X=XR_2$, $YR_1=R_2Y$, $R_2^2=0$; X – одновимірний правий B_1/R_1-простір та одновимірний лівий B_2/R_2-простір.

Доведення.

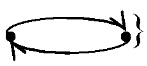
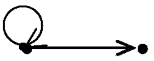
За теоремою Моріти досить розглянути зведені мінори. Таким чином за теоремою 3 отримаємо, з точністю до ізоморфізму, шість сагайдаків мінорів другого порядку нетерових напівдосконалих напівдистрибутивних кілець дистрибутивно модульного типу з матрицями суміжності вершин:

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ 3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ 4)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ 5)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ 6)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Їм відповідає кільце B, двосторонній пірсовський розклад якого $B=\begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}$, де так як B– напівдистрибутивне, X– ланцюговий правий B_2-

модуль та ланцюговий лівий B_1-модуль, а кільця B_1 та B_2 є або дискретно нормованими кільцями або однорядними кільцями Кете.

Радикал Джекобсона кільця B має вигляд: $R=\begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}$, $R^2=\begin{pmatrix} R_1^2+XY & R_1X+XR_2 \\ YR_1+R_2Y & R_2^2+YX \end{pmatrix}$, де R_1 та R_2 - радикали Джекобсона кілець B_1 та B_2.

Кільця з матрицями суміжності 1) та 2), яким відповідають сагайдаки $Q(B)$: {  } {  } є напівланцюговими, так як з кожної точки цих сагайдаків виходить не більше однієї стрілки і в кожну точку входить не більше однієї стрілки. Кільце з матрицею суміжності 3) має сагайдак $Q(B)=$ {  }. Так як з точки 2 не виходить стрілка, то нерозкладний проективний модуль $P_2 = (\ Y_1\ R_2\ )$, що відповідає цій точці, простий. Тому $Y=0$, $R_1X=XR_2$ та $R_2=0$, тобто $B_2 = D$ –тіло. Так як B-нетерове, то за наслідком 1.7 [18] $R_1X=XR_2=0$.

4) $Q(B) = \{$  $\}$. Модуль $Q_1=\begin{pmatrix} R_1 \\ X \end{pmatrix}$ – простий, отже $Y=0$ та $R_1=0$, $B_1=D$ та $XR_2=R_1X=0$.

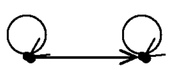
5) $Q(B) = \{$  $\}$. Так як в точці 1 є петля, а в точці 2 немає петлі, маємо $R_1^2 \supseteq XY$, $R_2=YX$. Як і раніше $R_1X=XR_2$ та $YR_1=R_2Y$. Розглянемо випадки

а) $XY=0$, маємо $XYX= XR_2=0= R_1X$, $YXY= R_2Y=0= YR_1$;

б) $XY\neq 0$, тоді $XY=R_1^n (n\geq 2)$, $XYX= XR_2=R^nX=XR_2^n$.

Тому $XR_2=0= R_1X$. Аналогічно $YXY= R_2Y= YR_1=YR_1^n$ та $YR_1=0=R_2Y$.

Отже, в кільці B з сагайдаком 5) $R_1X=XR_2=0$ та $YR_1=R_2Y=0$.

6) $Q(B) = \{$  $\}$. Так як в $Q(B)$ є обидві петлі, то $R_1\neq 0$ та $R_2\neq 0$. B-кільце дистрибутивно модульного типу, тому скінчено зображуваний B-модуль напівдистрибутивний. Обчислення скінчено зображуваних модулів еквівалентне зведенню блочних матриць. Нехай $R_2^2\neq 0$.

Розглянемо фрагмент $\begin{pmatrix} R_1 & & & X & X \\ & R_1^2 & & X & X \\ & & 0 & r_1 xE & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & R_2 \end{pmatrix}$, він приводить до тріади $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причому B-модулі, побудовані за цією матрицею нерозкладні та недистрибутивні, чого не може бути для кільця дистрибутивно модульного типу. Тому $R_1^2 = 0$. Антисиметрично $R_2^2 = 0$. В цьому випадку кутова матриця зводиться до мономіального вигляду. Отже, кільце B з сагайдаком вигляду 6) – артинове кільце дистрибутивно модульного типу.

Розглянемо зведені мінори третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу.

Твердження 4. *Допустимий сагайдак Q для n=3 визначається, з точністю до ізоморфізму, наступними матрицями*:

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 6)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 8)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 11)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 12)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 13)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 14)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 16)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 17)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 18)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 19)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

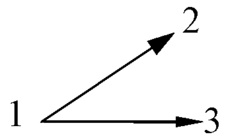
$$20)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad 21)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad 22)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad 23)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad 24)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$25)\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad 26)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad 27)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad 28)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad 29)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$30)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad 31)\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad 32)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

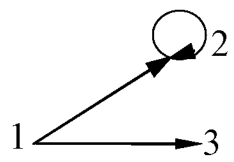
За твердженням 4 будемо мати, з точністю до ізоморфізму, 32 допустимих сагайдаки , а отже і 32 мінори третього порядку нетерових напівдосконалих кілець дистрибутивно модульного типу з умовами, які накладаються на їх компоненти:

1. $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$



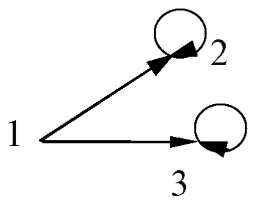
$$\begin{pmatrix}D&D&D\\0&D&0\\0&0&D\end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$



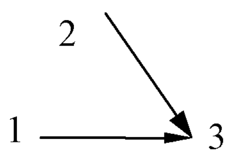
$$\begin{pmatrix}D&A_{12}&D\\0&\vartheta_2&0\\0&0&D\end{pmatrix}.$$

3. $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$



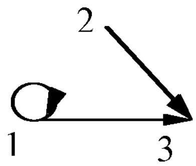
$$\begin{pmatrix}D_1&A_{12}&A_{13}\\0&\vartheta_2&0\\0&0&\vartheta_3\end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$



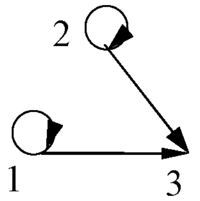
$$\begin{pmatrix}D&0&D\\0&D&D\\0&0&D\end{pmatrix}.$$

5. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$



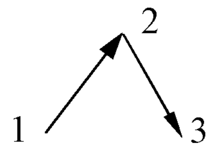
$$\begin{pmatrix}\vartheta_1&0&A_{13}\\0&D&D\\0&0&D\end{pmatrix}.$$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



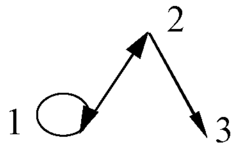
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



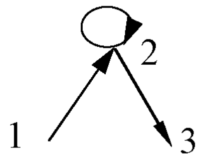
$$\begin{pmatrix} D & D & D \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} D & D & 0 \\ 0 & D & D \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



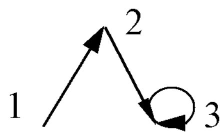
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



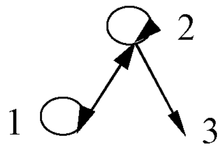
$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



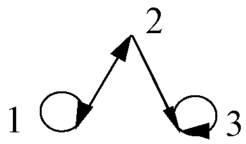
$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



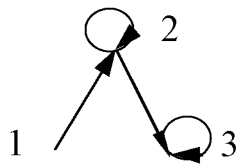
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



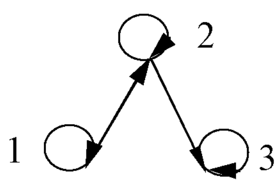
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



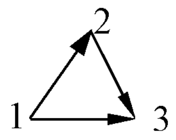
$$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



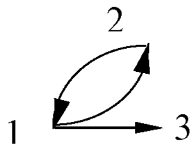
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}, \text{ де } A_{13} = A_{12}A_{23}.$$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & D_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, де $A_{12}A_{23} = 0$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

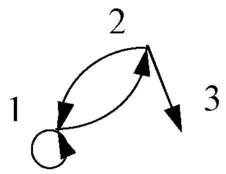


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{12}A_{21}$;

2). $R_2=A_{21}A_{12}$; 3). $A_{23}=A_{21}A_{13}$; 4). $R_2=0$, або $A_{23}=0$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

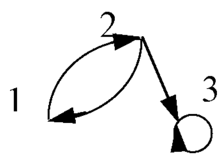


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{21}A_{12}$;

2). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 3). $A_{12}A_{21}=0$, абоA_{13}=0.

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

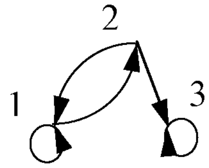


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{12}A_{21}$;

2). $R_2=A_{21}A_{12}$; 3).$A_{13}=A_{12}A_{23}$; 4).$R_1=0$, або $A_{13}=0$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

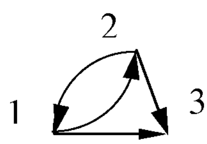


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{21}A_{12}$;

2). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 3). $A_{12}A_{21}=0$, або A_{13}=0.

20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

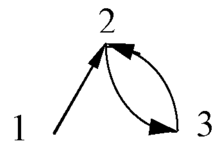


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{12}A_{21}$;

2). $R_2=A_{21}A_{12}$; 3). $A_{12}A_{23}=0$; 4).$A_{21}A_{13}=0$.

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

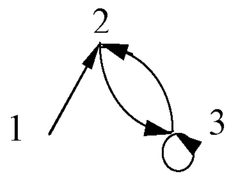


$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{23}A_{32}$;

2). $R_3=A_{32}A_{23}$; 3). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 4). $R_3=0$, або $A_{13}=0$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

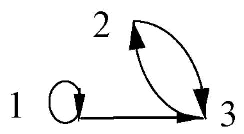


$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{23}A_{32}$;

2). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 3). $A_{32}A_{21}=0$, або $A_{13}=0$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

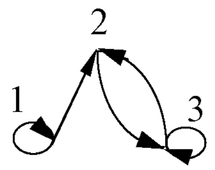


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{23}A_{32}$;

2). $R_3=A_{32}A_{23}$; 3). $A_{12}=A_{13}A_{32}$; 4). $R_2=0$, або $A_{12}=0$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

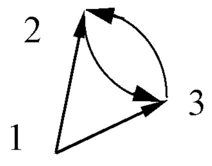


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{23}A_{32}$;

2). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 3). $A_{32}A_{23}=0$, або $A_{13}=0$.

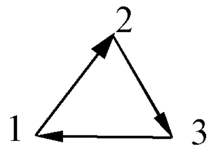
25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} D_1 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{23}A_{32}$; 2). $R_3=A_{32}A_{23}$; 3). $A_{13}A_{32}=0$; 4). $A_{12}A_{23}=0$.

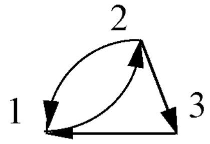
26. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{12}A_{21}=A_{13}A_{31}$; 2). $R_2=A_{21}A_{12}=A_{23}A_{32}$; 3). $R_3=A_{31}A_{13}=A_{32}A_{23}$; 4).$A_{13}=A_{12}A_{23}$; 5).$A_{21}=A_{23}A_{31}$; 6). $A_{32}=A_{31}A_{12}$;

27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

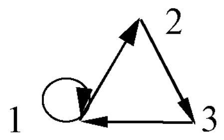


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{12}A_{21}$; 2). $R_2=A_{21}A_{12}$; 3). $R_3=A_{31}A_{13}=A_{32}A_{23}$; 4).$A_{13}=A_{12}A_{23}$;

5). $A_{32}=A_{31}A_{12}$; 6).$A_{13}=0$, або $R_1=A_{23}A_{31}=0$; 7). $A_{32}=0$, або $R_2=A_{23}A_{31}=0$.

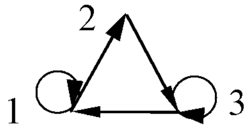
28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{21}A_{12}=A_{23}A_{32}$; 2). $R_3=A_{31}A_{13}=A_{32}A_{23}$; 3).$A_{13}=A_{12}A_{23}$; 4).$A_{21}=A_{23}A_{31}$; 5). $A_{32}=A_{31}A_{12}$; 6). $A_{12}R_2=0$; 7).$A_{13}R_3=0$; 8). $A_{21}R_1=0$; 9). $A_{31}R_1=0$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

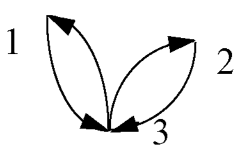


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_2=A_{21}A_{12}=A_{23}A_{32}$; 2). $A_{13}=A_{12}A_{23}$; 3).$A_{21}=A_{23}A_{31}$; 4). $A_{32}=A_{31}A_{12}$;

5). $A_{12}R_2=0$; 6).$A_{13}R_3=0$; 7). $A_{21}R_1=0$; 8). $A_{23}R_3=0$; 9). $A_{32}R_2=0$.

30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

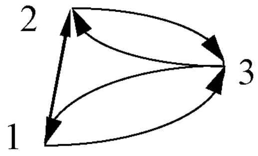


$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{13}A_{31}$; 2). $R_2=A_{23}A_{32}$; 3). $R_3=A_{31}A_{13}$, або $R_3=A_{32}A_{23}$; 4).$A_{12}=A_{13}A_{32}$;

5). $A_{21}=A_{23}A_{31}$; 6). $R_1=R_2=0$, або $A_{12}=A_{21}=0$.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



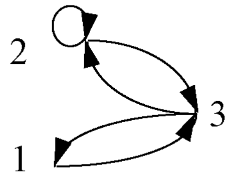
$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{13}A_{31}$; 2). $R_2=A_{23}A_{32}$; 3). $R_3=A_{31}A_{13}$, або $R_3=A_{32}A_{23}$;

4). $A_{21}=A_{23}A_{31}$;

6). $A_{12}R_2=A_{13}A_{32}=A_{31}A_{12}=A_{12}A_{23}=0$. 7). $R_1=R_2=0$, або $A_{21}=0$.

32. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}$, де

1). $R_1=A_{13}A_{31}$; 2). $R_3=A_{31}A_{13}$, або $R_3=A_{32}A_{23}$; 3). $A_{12}=A_{13}A_{32}$;

4). $A_{21}=A_{23}A_{31}$;

6). $R_1=A_{23}A_{32}=0$, або $A_{12}=A_{21}=0$.

Для доведення розглянемо, наприклад, мінор з сагайдаком 16. Він має

вигляд: $$A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

Але так як у вершинах 1 і 2 цього сагайдака немає петель, то $R_1=A_{12}A_{21}$ і $R_2=A_{21}A_{12}$. Із вершини 3 не виходить стрілка, тому модуль $P_3=(A_{31}A_{32}\vartheta_3)$ – простий, а значить $A_{31}=0$, $A_{32}=0$, $R_3=0$ і $\vartheta_3=D_3$ – тіло. Кожній стрілці σ_{ij} відповідає гомоморфізм φ_{ij}: $P_j \to P_i$, тобто підмодуль $Im\,\varphi_{ij}$, який має рівно один максимальний підмодуль і $Im\,\varphi_{ij}/(Im\,\varphi_{ij})R=U_i$. Розглянемо модуль $P_2=(A_{21}\ \vartheta_2\ A_{23})$, $P_2R=(A_{21}R_2A_{23})$, $P_2R^2=(A_{21}R_1R_2A_{23})$, $P_2R^3=(A_{21}R_1\ \ R_2^2\ \ A_{23}R_3)$. Якщо $R_2\neq 0$ і $A_{23}\neq 0$, то $P_2R^2/P_2R^3=U_2+U_3$, що суперечить попередньому. Отже, $R_2=0$, або $A_{23}=0$. Отримали мінор

$$A=\begin{pmatrix} \vartheta_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \vartheta_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix},$$

де ϑ_1, ϑ_2, за наслідком 2, дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{12} – одновимірний лівий ϑ_1/R_1 – простір і одновимірний правий ϑ_2/R_2 – простір, A_{21} – одновимірний лівий ϑ_2/R_2 – простір і одновимірний правий ϑ_1/R_1 – простір, A_{13} – одновимірний лівий ϑ_1/R_1 – простір і одновимірний правий D_3 – простір, A_{23} – одновимірний лівий ϑ_2/R_2 – простір і одновимірний правий D_3 – простір.

ПОСИЛАННЯ

[1] Bass H.(1960). Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**, 466-488.

[2] Auslander M. (1971). Representation dimension of artin algebras . *Quun Mary College Math. Notes*.

[3] Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. (1988). Бирядные кольца и модули над ними. *Алгебраические структуры и их применение.* – К.: УМК ВО, 43-74.

[4] Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В.(1995). Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними. *Сб. ,,Алгебраические исследования". – Киев: Ин-т математики НАН Украины,*.5-32.

[5] Gabriel P.(1972). Unzerlegbare Darstellungen I . *Manuscripta Math.* № **6**, 71-103.

[6] Кругляк С.А.(1972). Представления алгебр, квадрат радикала которых равен нулю. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.* **28**, 60-68.

[7] Yaremenko Yu.V.(1997). Noetherian semiperfekt rings of distributive module type. *Mathematychni Studii*. **8, №1**, 3-10.

[8] Drozd Yu. A.(1971). Minors and reduction theorems .*Coll Math. Soc. J. Bolyai.* **6**, 173-176.

[9] Кириченко В.В. (1976). Обобщенно однорядные кольца . *Мат. сб.* **99**, № 4, 559-581.