УДК 517.5

НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАНИХ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

М. В. ГАЄВСЬКИЙ

The estimates of the deviations of analytic functions, which are defined in a bounded domain and which are continuous on its closure, of sums of Valle Poussin are obtained in this paper.

В работе получено оценку для уклонений аналитических в ограниченной области и непрерывных на её замыкании функций от сумм Валле-Пуссена.

Нехай Ω – однозв'язна область в комплексній площині C, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Внаслідок теореми Рімана існує єдине відображення $w = \Phi(z)$, що конформно та однолисно відображає зовнішність області Ω на зовнішність одиничного круга D= $\{w \in \mathrm{X} : | w |< 1\}$ при умовах

$$\Phi(\infty) = \infty,$$

$$\Phi'(z) = \gamma > 0.$$

Обернене до $w = \Phi(z)$ відображення позначимо $z = \Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu = 0,1,2,\ldots$ [3, с. 52].

Нехай далі $A(\overline{\Omega})$ – множина функцій f, аналітичних в області Ω та неперервних в $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$. Коефіцієнти Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$ обчислюються за формулами [3, с. 107]

$$a_\nu(f) = a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\zeta, \qquad (1)$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ, а ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z) \qquad (2)$$

є рядом Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Введемо такі позначення: $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$ – алгебраїчний многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами c_ν; P_n – множина всіх алгебраїчних многочленів $p_n(z)$; $E_n(f) = E_n(f,\overline{\Omega})$ – найкраще рівномірне наближення функції $f \in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними многочленами

$$E_n(f,\overline{\Omega}) = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\| = \inf_{p_n \in P_n} \max_{z \in \overline{\Omega}} | f(z) - p_n(z) |;$$

$$S_n(z) = S_n(f,\overline{\Omega}, z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu F_\nu(z) \; -$$

частинна сума ряду Фабера (2) функції $f \in A(\overline{\Omega})$;

$$V_m^n(f, z) = V_m^n(f,\overline{\Omega}, z) = \frac{1}{n-m+1}\sum_{\nu=m}^{n} S_\nu(f, z) \; -$$

сума Валле Пуссена ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Оператор T_Ω задано на множині функцій $f \in A(\overline{\Omega})$ [2, 3, с. 154], і діє він за правилом

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} f(w)\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}dw,$$

де $\mathrm{T} = \{w \in \mathrm{X} : |w| = 1\}$, $z \in \Omega$.

Такий оператор називають оператором Фабера.

Область Ω називають областю Фабера [2], якщо для норми оператора виконується співвідношення:

$$\|T_\Omega\| = \sup_{f \in A(\bar{\Delta}), \|f\|_{A(\bar{\Delta})} \le 1} \|T_\Omega(f)(z)\| < \infty.$$

В [2] отримано критерій області Фабера, зокрема, встановлено таке твердження:

Для того, щоб область Ω *була областю Фабера, необхідно і достатньо, щоб існувала сім'я* $\{\mu_z\}_{z\in\Omega}, \mu_z : \mathrm{T} \to \mathrm{C}$ *функцій обмеженої варіації (дійсна та уявна частини є функціями обмеженої варіації) така, що*

$$\sup_{z\in\Omega}\int_{\mathrm{T}} |d\mu_z(\zeta)| < \infty, \tag{3}$$

і для будь-якого $z \in \Omega$

$$\frac{\Psi'(\cdot)}{\Psi(\cdot)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}}\frac{d\mu_z(\zeta)}{\zeta - \cdot}. \tag{4}$$

З (4) легко отримати наступне представлення для многочленів Фабера

$$F_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{T}} \zeta^\nu d\mu_z(\zeta), \nu = 0,1,2\ldots \tag{5}$$

В роботі [4] для сум Валле-Пуссена у просторі періодичних неперевних функцій отримано оцінку

$$\left\|f(z) - V_m^n(f,z)\right\| \le C\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f),$$

в [1] для аналітичних функцій в області Радона і неперервних на її замиканні отримано

$$\left\|f(z) - V_m^n(f,z)\right\| \le C\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f,\overline{\Omega}).$$

Для областей Фабера має місце теорема.

Теорема. *Нехай* Ω *– однозв'язна область Фабера, функція* $f \in A(\overline{\Omega})$. *Тоді*

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| \le C \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f,\overline{\Omega}),$$

де $0 \le m \le n, n = 1,2,\ldots$ та *стала* C *не залежить від* f *та* n.

Тут та далі через C будемо позначати абсолютні сталі, можливо, неоднакові в різних формулах.

Доведення. Нехай $p_n(z)$ – поліном найкращого рівномірного наближення степеня n для функції $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| = \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} (f(z) - \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu F_\nu(z)) =$$

$$= \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} [f(z) - p_m(z) - S_k(f - p_m, \overline{\Omega}, z)] \le$$

$$\le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu (f - p_m) \cdot F_\nu(z) =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)} \int_{|t|=1} \int_{\mathrm{T}} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} [f(\Psi(t)) - p_m(\Psi(t))] \frac{\zeta^\nu}{t^{\nu+1}} dt d\mu_z(\zeta) =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} [f(\Psi(e^{i\varphi})) - p_m(\Psi(e^{i\varphi}))] e^{i\nu(\tau-\varphi)} d\varphi d\mu_z(e^{i\tau}) \le$$

$$\le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{E_m(f,\overline{\Omega})}{4\pi^2(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu\varphi} \right| d\varphi \int_0^{2\pi} |d\mu_z(e^{i\tau})|.$$

Відомо [6], що

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu\varphi} \right| d\varphi \le C(n+1), |\alpha_k| \le 1,$$

тоді, врахувавши (3), остаточно матимемо

$$\left\| f(z) - V_m^n(f,z) \right\| \le C \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f,\overline{\Omega}).$$

Лему доведено.

ПОСИЛАННЯ

[1] Abdullayev F., Zaderey N., Zaderey P.(2011). On the approximation of analytic functions by Fejer sums of Faber polynomials. *Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" – Sofia,* 13–18.

[2] Савчук В. В. Області Фабера і задача О. І. Степанця. (2002). *Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України.*. 35, 151-163.

[3] Суетин П. К.(1984). *Ряды по многочленам Фабера.* Наука. М.

[4] Стечкин С. Б. (1961). О приближении периодических функций суммами Фейера. *Сборник работ по линейным методам суммирования рядов Фурье: Тр. МИАН СССР, 62, Изд-во АН СССР,* М., 48–60

[5] Фомин Г. А. (1964). О линейных методах суммирования рядов Фурье . *Матем. сб.–* **65(107),** 144-152.