В.А. Кушнір
Р.Я. Ріжняк

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ з методики навчання математики

Навчальний посібник

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 51(07)
ББК 22.1р
Л12

Рецензенти:

Триус Юрій Васильович,
доктор педагогічних наук, професор прикладної математики, завідувач кафедри комп'ютерних технологій Черкаського державного технологічного університету;

Шарко Валентина Дмитрівна,
доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Херсонського державного університету;

Раков Сергій Анатолійович,
доктор педагогічних наук, доцент, начальник відділу наукового забезпечення Українського центру оцінювання якості освіти (Київ)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-9785 від 18.06.2012 р.)

Л12 Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник (укладачі В.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк). — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 224 с.

ISBN 978-966-10-1823-4

У посібнику містяться лабораторні роботи з методики навчання математики, що відповідають державному освітньому стандарту та навчальному плану підготовки вчителів математики освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» спеціальності 6.040201 Математика* галузі знань 0402 Фізико-математичні науки. Надано детальні рекомендації щодо виконання практичної частини лабораторних робіт. Після кожної частини викладу запропоновані завдання для самостійної підготовки студентів. Посібник містить предметний покажчик теоретичного та практичного матеріалу.

УДК 51(07)
ББК 22.3я721

ISBN 978-966-10-1823-4

Вступ

Лабораторні заняття з методики навчання математики є складовою та обов'язковою формою підготовки майбутніх учителів математики. Вони направлені на формування у студентів умінь ставити реальні цілі та адекватні методичні та навчальні задачі вивчення тем, розв'язування математичних задач, проведення уроків; умінь проводити підбір навчального матеріалу та засобів навчання для досягнення мети та розробляти методику її досягнення; уміння проводити аналіз та планування уроків математики; уміння готувати повні конспекти та розгорнуті плани уроків та проводити уроки чи їх фрагменти у формі ділової гри на заняттях.

Для кваліфікованого розв'язування типових задач професійної діяльності на посаді вчителя математики у загальноосвітніх навчальних закладах I–II рівня (освітньо-кваліфікаційний рівень «бакалавр») випускники педагогічних вищих навчальних закладів мають володіти комплексом умінь з методики навчання математики, до складу якого входять такі уміння.

I. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Аналітико-синтетична діяльність».

1. Уміння виконувати логіко-математичний і семіотичний аналіз означень математичних понять, математичних речень та їх доведень (аксіом, теорем, формул, інших тверджень), правил, алгоритмів, евристичних схем, що є об'єктами засвоєння в курсі математики загальноосвітньої школи.

2. Уміння виконувати логіко-математичний та змістовний аналіз математичних задач як об'єктів вивчення і засобів навчання.

3. Уміння визначати цілі вивчення конкретного навчального матеріалу (означення поняття, теореми, правила тощо) курсу математики загальноосвітньої школи.

4. Уміння виконувати логіко-математичний та змістовний аналіз навчального матеріалу наперед обраної (заданої) теми чи розділу (виділяти стрижневий та супровідний матеріал, провідні ідеї теми,

базові знання та вміння, внутрішні та міжпредметні зв'язки теми тощо, аналізувати навчальний матеріал на предмет реалізації інтегративних зв'язків) курсу математики загальноосвітньої школи.

5. Уміння виконувати аналіз наборів математичних задач до певної теми курсу математики загальноосвітніх шкіл: кількість та якість задач, призначених для розкриття сутності нових об'єктів засвоєння, для формування вмінь, для організації математичної діяльності на шкільному рівні; кількість та якість задач-засобів мотивації, задач-вправ для актуалізації базових знань, задач інтегративного змісту, задач для повторення тощо.

6. Уміння виконувати математичну, семіотичну і методичну типізацію математичних задач курсу математики загальноосвітньої школи.

7. Уміння визначати основні навчальні задачі курсу математики загальноосвітньої школи та відповідні їм навчально-пізнавальні дії.

8. Уміння виконувати постановку методичних задач на матеріалі курсу математики загальноосвітньої школи.

9. Уміння добирати основні методи, прийоми, форми і засоби навчання для організації вивчення учнями матеріалу певної навчальної та програмової теми курсу математики загальноосвітньої школи.

10. Уміння визначати форми контролю та оцінювання результатів навчальної діяльності учнів, що застосовуються у процесі навчання курсу математики у загальноосвітній школі.

11 Уміння реферувати та рецензувати статті, посібники математичного, психолого-педагогічного та методичного змісту.

12. Уміння визначати індивідуальні можливості учнів у навчанні математики та комплектувати гомогенні й гетерогенні групи учнів класу.

ІІ. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Планування та конструювання».

1. Уміння конструювати модель методичної системи (цілі, зміст, методи, форми і засоби навчання) організації вивчення окремої змістової одиниці курсу математики загальноосвітньої школи (на рівні окремого об'єкта засвоєння навчальної та програмової теми).

2. Уміння висувати диференційовані вимоги до результатів засвоєння учнями навчального матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи.

3. Уміння розробляти тематичний план організації вивчення учнями програмової теми курсу математики загальноосвітньої школи, виконувати календарне планування.

4. Уміння створювати систему запитань для повторення базових знань учнів при вивченні курсу математики загальноосвітньої школи.

5. Уміння створювати систему вправ для актуалізації базових умінь учнів при вивченні курсу математики загальноосвітньої школи.

6. Уміння конструювати систему контрприкладів до понять (їхніх означень, математичних фактів, способів діяльності), що вивчаються в курсі математики загальноосвітньої школи.

7. Уміння добирати задачі, що призначені для різних етапів формування математичних понять, вивчення математичних фактів, правил і алгоритмів, що є об'єктами засвоєння в курсі математики загальноосвітньої школи,для навчання доведень математичних тверджень та для вироблення навичок і вмінь застосовувати набуті знання у стандартних та інших ситуаціях.

8. Уміння складати системи запитань, призначених для розкриття змісту нового навчального матеріалу, для організації застосування знань, навичок і вмінь, для усної й письмової перевірки знань учнів.

9. Уміння складати тести, самостійні та контрольні роботи навчального і контролюючого характеру відповідно до змісту навчального матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи.

10. Уміння добирати матеріал до уроку та розробляти розгорнутий конспект або план-конспект уроку.

11. Уміння добирати літературу для вивчення конкретного питання (теореми, задачі, пункту, теми підручника) та складати відповідну картотеку.

12. Уміння планувати та виготовляти найпростіші навчальні та наочні посібники, матеріал для мультимедійних презентацій, кодоскопа тощо.

13. Уміння планувати використання математичних пакетів (типу GRAN, GRAN 2, DG, Advanced Grapher) для організації дослідницької діяльності учнів.

III. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Організація класного колективу та налагодження навчальної співпраці з учнями у процесі навчання математики».

1. Уміння забезпечувати мотивацію вивчення конкретного навчального матеріалу (теми, математичної задачі, теореми тощо) курсу математики загальноосвітньої школи.
2. Уміння забезпечувати прийняття учнями цілей вивчення конкретного матеріалу курсу математики загальноосвітньої школи — розкривати досяжність та особистісну значущість результатів навчання.
3. Уміння формувати пізнавальний інтерес учнів до ходу й результатів вивчення курсу математики в цілому та окремих його складових.
4. Уміння застосовувати прийоми постановки запитань у варіативних ситуаціях.
5. Уміння організовувати пошук розв'язання математичної задачі, доведення математичного твердження тощо.
6. Уміння працювати з довідником, таблицею та іншими аналогічними матеріалами, а також уміння навчати цього учнів.
7. Уміння розташовувати матеріал на дошці, оформляти розв'язування задачі, доведення математичного твердження, знаходження значення числового виразу або виразу зі змінною тощо, а також уміння навчати цього учнів.
8. Уміння застосовувати різні прийоми реагування на відповіді учнів.
9. Уміння використовувати системи запитань, вправ і задач, призначених для навчання учнів виконувати аналіз, синтез, узагальнення, конкретизацію, порівняння, поділ, класифікацію тощо.
10. Уміння реалізовувати складений план на урок (виступ, монолог).

IV. Уміння, що забезпечують реалізацію виробничої функції «Оцінювання власної діяльності та вимірювання результатів діяльності учнів у процесі навчання математики».

1. Уміння аналізувати усну відповідь учня, давати їй оцінку та навчати цього учнів.
2. Уміння оцінювати письмову навчальну чи контрольну роботу, аналізувати її результати.
3. Уміння навчати учнів знаходити та виправляти помилки у письмових роботах.

4. Уміння застосовувати різні види, форми, способи і засоби контролю й коригування знань учнів.
5. Уміння аналізувати урок з урахуванням його місця у системі уроків, цілей його проведення та особливостей навчального матеріалу.

Рівні сформованості методичних умінь визначаються так, як це вказано у таблиці.

1-й рівень	Репродуктивний	Усвідомлюється мета виконання окремої методичної чи навчально-пізнавальної дії, осмислюється її операційний склад. Пошук способів виконання дії здійснюється, здебільшого, на основі взірця, який запропоновано в інструкції
2-й рівень	Продуктивний	Усвідомлюється мета виконання методичної чи навчально-пізнавальної дії, осмислюється її операційний склад. Пошук способів виконання дії здійснюється на основі використання загальних рекомендацій та загальних евристик. Відбувається перенесення окремих сформованих методичних умінь або деяких їхніх комплексів на крупніші блоки навчального матеріалу (на математичний метод, тему, набір математичних задач тощо)
3-й рівень	Творчий	На основі усвідомлення мети виконання методичної чи навчально-пізнавальної дії та осмислення її операційного складу відбувається самостійний вибір і творче використання різноманітних способів і засобів методичної діяльності у відповідності до варіативних ситуацій навчання математики. Розробляються нові способи і засоби методичної діяльності

Лабораторні роботи у посібнику представлені у вигляді певної системи, яка розкриває послідовність дій, що дозволяє визначити основні етапи формування професійних умінь у майбутніх учителів математики.

У **першому циклі** лабораторних робіт (роботи 1–8) передбачається формування умінь проводити логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу підручників з математики, підбирати питання та математичні задачі з метою навчання конкретного змісту математичного матеріалу, організації розв'язування шкільних математичних задач та доведення математичних речень, використовувати моделювання у процесі навчання математики, вимірювати результати навчальної діяльності учнів, добирати матеріал для роботи з математично обдарованими учнями.

У **другому циклі** лабораторних робіт (роботи 9–13) формуються уміння аналізувати уроки математики та сукупність умінь з підготовки вчителя до уроку. Остання сукупність умінь представлена у лабораторних роботах уміннями визначати структуру уроку, відбирати матеріал для конкретного уроку та складати розгорнуті конспекти фрагментів уроку та в цілому конспекти уроків.

У **третьому циклі** лабораторних робіт (роботи 14–19) формуються уміння аналізувати навчальний матеріал шкільних підручників через реалізацію в них конкретних математичних методів: дедуктивного методу доведення математичних речень, координатного та векторного методів, методу геометричних перетворень, методу рівнянь та нерівностей, методу використання диференціального та інтегрального числень. Указаний цикл лабораторних робіт крім того, що дає студентам можливість детально розібратися в особливостях застосування математичних методів при розв'язуванні задач, до того ж дозволяє аналізувати навчальний матеріал підручників з математики з точки зору змісту та структури його викладання.

Проведення лабораторних робіт є однією з необхідних складових практичної підготовки майбутніх учителів математики і передбачає, в основному, формування умінь проводити логіко-дидактичний аналіз різноманітного навчального матеріалу з урахуванням конкретно поставленої мети, відбору засобів та методів навчання. Повний цикл практичної підготовки включає крім лабораторних занять практичні заняття та педагогічну практику.

Лабораторні роботи з логіко-математичного аналізу основних компонентів змісту навчального матеріалу

Лабораторна робота №1

Логіко-математичний аналіз означень, понять і об'єктів. Основні етапи їх формування

Мета роботи. На основі систематизації теоретичних знань про види і структуру означень понять і об'єктів та аналізу шкільних підручників математики розкрити логіко-математичну структуру типових для шкільного курсу математики означень понять і об'єктів.

Сформулювати основні навчальні завдання, які необхідно розв'язувати при формуванні математичних понять і об'єктів, та адекватні їм навчальні дії.

Розкрити на конкретних прикладах основні етапи вивчення математичних понять у школі.

Розкрити математичне трактування деяких фундаментальних понять курсу математики, підібрати з літератури або шкільних підручників інші трактування одних і тих же математичних понять.

Підібрати можливі засоби, з допомогою яких розкривалися б структура означень і їхні математичні трактування.

Основний зміст

І. Означення математичних об'єктів і види означень

Питання про поняття, об'єкти та їхні означення дуже складне за змістом і може розглядатися з різних точок зору: логічної, змістовної (наочної) або пізнавальної (гносеологічної) і через це навіть в різних методичнихрекомендаціях даються різні його аспекти. За основу необхідно вибрати логічну структуру об'єктів з урахуванням математичних трактувань. Враховуючи, що навчання можливе тільки в діяльності, необхідно розглядати дії, адекватні видам означень понять і об'єктів. Тому в зміст роботи входитиме актуалізація і систематизація знань змісту операції «означення понять», структури означень та їхніх видів.

Завдання 1. Актуалізуйте і систематизуйте знання про поняття та їхні означення, відповівши на такі питання:

1. Що таке поняття, об'єкт? У чому їх схожість і відмінність?
2. Істотні та неістотні властивості поняття. Прийоми їх встановлення.
3. Зміст і обсяг поняття. Зв'язок між ними.
4. Логічна дія «означення поняття». Дефініція.
5. Види означень понять і об'єктів, які найчастіше зустрічаються в школі.
6. Структура означень понять і об'єктів.
7. Основні вимоги до означень понять.

Основним підсумком відповіді на вказані питання будуть такі факти.

Поняття — це форма мислення про цілісну сукупність істотних і неістотних властивостей об'єктів реального світу, зокрема і математичних об'єктів. Для *формування математичних понять* необхідне розуміння математичного об'єкта, який в понятті характеризується завдяки застосуванню певних розумових дій.

Коли йде мова про *математичний об'єкт*, наприклад, про прямокутник або квадратне рівняння, то мається на увазі конкретний емпіричний (реальний) об'єкт, представлений у вигляді рисунка, моделі або аналітичного запису, і одночасно теоретичний (ідеальний) об'єкт, що володіє всіма істотними властивостями. У прикладі з прямокутником це не тільки нарисований прямокутник, але й усі об'єкти, які є суть геометричні фігури з чотирма сторонами, протилежні з яких паралельні та рівні, всі кути прямі, діагоналі рівні.

Сформувати поняття про об'єкт — це означає розкрити всі істотні властивості об'єкта в їх цілісній сукупності. Діяльність учня (суб'єкта) при цьому направлена на вивчення математичного об'єкта, а продуктом цієї діяльності буде правильне поняття.

Однією з дій вивчення математичного об'єкта для отримання поняття про нього є дія *означення*.

Означити об'єкт — це означає вибрати з його істотних властивостей такі і стільки, щоб кожна з них була необхідна, а всі разом достатні для відмінності об'єкта, що вивчається, від інших.

Означення (*дефініція*) — це речення, в якому з допомогою вже відомих понять і їхніх властивостей розкривається зміст означуваного поняття.

Виконується дія означення різними шляхами (з допомогою різних розумових і наочних операцій), і результат її виконання фіксується в різного вигляду означеннях.

Логічна структура дії означення математичних об'єктів, взагалі кажучи, єдина.

Розрізняють зміст та обсяг поняття. Як уже зазначалося *зміст поняття* — це сукупність усіх властивостей поняття, які розкриваються через означення поняття. *Обсяг поняття* — це множина усіх об'єктів, які позначаються даним поняттям. *Обсяг поняття* розкривається через його класифікацію (наприклад: множина дійсних чисел складається з множини раціональних чисел та множини ірраціональних чисел) або через перелік усіх об'єктів, що позначаються поняттям (наприклад, обсяг поняття «одноцифрові числа» — це числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Суть дії означення математичних об'єктів. Для розуміння суті дії означення математичних об'єктів необхідне розуміння *структури аксіоматично побудованої теорії*. Якщо навчальний предмет будується аксіоматично (або близько до аксіоматичного методу), то вибираються основні об'єкти (фігури) та їхні істотні властивості або зв'язки між ними розкриваються в системі аксіом. Так, в підручнику О. В. Погорєлова [46] основні фігури в планіметрії «точка» і «пряма» та відношення між ними «належати» і «лежати між» розкриваються з допомогою чотирьох аксіом.

Потім на основі непрямих охарактеризованих властивостей основних об'єктів (фігур) предмета і відносин означаються подальші об'єкти (фігури) предмета.

Наприклад, промінь уже можна означити через уведення фігур «пряма», «точка» і відношення «лежати по різні сторони» як еквівалентне відношення «лежати між» та загальні гносеологічні поняття «частини» і «множина».

Для конструювання означення поняття «відрізок» на прямій вибирається її частина. Частина ця складається з таких точок, які лежать між заданими фіксованими точками на прямій, які називають кінцями відрізка. Оскільки відрізок — частина прямої, то ширшим поняттям для нього буде пряма; отже, пряма — родове поняття, причому найближче. Видові відмінності: частина прямої; точки, що обмежують цю частину з різних боків.

Розглянемо ще приклад. Трикутник — це фігура, яка складається з трьох різних точок та трьох відрізків, які їх послідовно сполучають. Родовим найближчим об'єктом буде фігура; видові відмінності: три різні точки та три відрізки, які послідовно задані точки сполучають.

Операції, що розкривають дію означення об'єктів, будуть наступні: вибирається найближчий *родовий об'єкт* (фігура), потім на цей об'єкт накладаються певні обмеження — *видові характеристики* (відмінності). На основі видових характеристик (відмінностей) уводиться новий об'єкт, але з меншим обсягом, ніж родовий, оскільки у нього більше властивостей. Цьому об'єкта з великим числом властивостей і меншим обсягом привласнюється нова назва (*термін*).

Так, з усіх рівностей рівнянням назвемо тільки таку рівність, в записі яких є змінні (букви). З усіх рівнянь квадратними назвемо такі, які мають вигляд $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$. З усіх прямокутників квадратами назвемо такі прямокутники, в яких суміжні сторони рівні, і т. ін.

Структура цієї дії може бути символічно виражена таким чином:

$$\begin{array}{ccc} \forall x \in M & A(x) & B(x) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{рід} & \text{термін} & \text{видові відмінності} \end{array}$$

При виділенні видів означень математичних об'єктів часто загальну дію — *означення об'єктів* — називають конкретним видом «*означення через найближчий рід і видові відмінності*». Вважаємо правомірним вести мову про специфіку дій з виділення видових відмінностей і залежно від цього розрізняти означення і називати їх означеннями об'єктів конкретного вигляду.

Відповідно до цього можна назвати такі види означень математичних об'єктів залежно від специфіки дій, з допомогою яких виділяють родові об'єкти і видові відмінності. Тобто, означення через найближчий рід і видові відмінності мають таку конкретизацію: 1) означення об'єктів шляхом зазначення їхньої характеристичної властивості; 2) генетичні, конструктивні і рекурсивні означення.

Означення математичних об'єктів шляхом опису характеристичної властивості. Цей вид означень побудований на логічних діях і операціях установлення найближчого роду, видових відмінностей і логічної природи зв'язку між родом і видовими відмінностями. Залежно від логічної природи зв'язку властивостей у шкільному курсі математики розрізняють *кон'юнктивні, диз'юнктивні та імплікативні означення*.

Розглянемо, наприклад, означення паралелограма.

Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

Виконаємо *логічний аналіз* цього *означення* — визначимо термін, рід, видові відмінності та тип означення. Термін — паралелограм. Рід — чотирикутник. Видові відмінності: 1) одна пара протилежних сторін паралельна; 2) інша пара протилежних сторін паралельна.

Усі властивості в означенні з'єднані сполучником «і»; отже, маємо *кон'юнктивне означення*.

Інший приклад — означення неправильного дробу.

Дріб, в якому чисельник більший, ніж знаменник, або рівний йому, називається неправильним дробом.

Термін — неправильний дріб. Рід — дріб. Видові відмінності: 1) чисельник більший від знаменника; 2) чисельник рівний знаменнику.

Видові відмінності з'єднані сполучником «або». Означення *диз'юнктивне*.

Третій приклад — означення зростаючої функції.

Функція називається зростаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

Рід — функція. Термін — зростаюча функція на проміжку $[a;b]$. Видові відмінності: якщо $x_2 > x_1$, $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення за формою записане у вигляді імплікації.

Означення такого вигляду або такі, що приводяться до них, складають переважну більшість шкільного курсу математики.

Генетичні, конструктивніта рекурсивні означення. Властивості об'єкта в такому означенні розкриваються шляхом опису процесу його виникнення, побудови або утворення, тобто його видові відмінності задані у вигляді дій. Інколи такий вид означень називають *конструктивними означеннями*.

Розглянемо приклад — означення перетворення повороту.

Поворотом навколо даної точки називається такий рух, при якому кожен промінь, який виходить з цієї точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямку.

Термін — поворот. Рід — рух. Видові відмінності: 1) кожен промінь, який виходить з точки, повернутий в одному і тому ж напрямку; 2) кожен промінь повернутий на один і той же кут.

Ще приклад — квадратична функція.

Квадратичною функцією називається функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Термін — квадратична функція. Рід – функція. Видові відмінності: x — незалежна змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$ і $y = ax^2 + bx + c$, тобто якщо ці дії між числами і змінною задані, то маємо квадратичну функцію. Якщо дії інші, то це не квадратична функція.

Конструктивні дії можуть задаватися по-різному. Так, в *рекурсивних означеннях* указуються окремі базисні об'єкти деякого класу і правило (чи правила), що дозволяють отримати нові об'єкти цього ж класу. Інколи такі означення називають *індуктивними*.

Наприклад, означення арифметичної прогресії.

Арифметичною прогресією називається послідовність, в якій кожен член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додають одне й те саме число.

Рід — послідовність, термін — арифметична прогресія, видові відмінності: a_1 — дане; $a_{n+1} = a_n + d$, де $n \in N$.

Розрізняють також *означення через перелік*, що даються, як правило, при узагальненні понять (*раціональні та ірраціональні числа називаються дійсними числами*), та *означення у вигляді формул* (щоб показати, що знак рівності вживається для означення (дефініції), його супроводжують буквами df):

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \overset{df}{=} \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \ \forall n \geq n_0\ \left|x_n - a\right| < \varepsilon\right).$$

Виділяють ще окремо так звані *заперечніозначення*,які не задають властивості об'єкта, а виконують (умовно) класифікаційну функцію. Якщо клас об'єктів розбитий на групи (множини) і об'єктам однієї групи, що володіють певними властивостями, привласнений термін і є об'єкти, які належать цьому класу, але відміченими властивостями (всіма або частиною) не володіють, то таким об'єктам дається заперечне означення.

Розглянемо приклад такого означення — означення мимобіжних прямих.

Мимобіжні прямі — це такі прямі, які не належать одній площині і не перетинаються.

Рід — прямі, термін — мимобіжні прямі, видові відмінності: 1) не належать одній площині; 2) не перетинаються.

Таким чином, логічна дія — означення об'єкта — всюди однакова, але змістовні (математичні) дії в кожному з відмічених видів означень різні. В одних видові відмінності перераховуються як описові характеристики (бути паралельними, бути більше і т. ін.); в інших указуються дії, які треба провести, щоб отримати (сконструювати) об'єкт; у третіх перераховуються властивості, які заперечуються.

Таким чином, головне в типології шкільних означеньза видами — це розуміння специфіки дій, що розкривають (характеризують) видові відмінності.

Завдання 2. На основі актуалізованих знань про означення математичних об'єктів та їхніх видів виберіть з різних шкільних підручників математики по 2–3 означення об'єктів названих вище видів і результати оформіть у таблицю (табл. 1-1).

Таблиця 1-1

Означення шляхом опису характеристичної властивості	Конструктивне означення	Заперечне означення	Рекурсивне означення	Означення через перелік	Означення у вигляді формули	Неявне означення початкових понять

II. Основна методична задача при навчанні означень математичних об'єктів

Основною методичною задачею при навчанні означень математичних об'єктів є формування логічної дії з розкриття структури означення математичних об'єктів і дій, адекватних конкретному виду означень.

Дії, з допомогою яких розв'язуватиметься ця основнаметодична задача, наступні:

- логічний аналіз структури означень різного вигляду (виділення логічної і змістовної функцій кожного слова в означенні об'єкта, відшукання зайвих слів у означеннях та ін.);
- підведення конкретного математичного об'єкта під означення;
- наведення конкретного прикладу, об'єкта, що ілюструє належність його даному означенню;
- заміна означення об'єкта еквівалентним означенням цього об'єкта — цю дію іноді називають переформулюванням означення; порівняння різних означень одного і того ж об'єкта;

- отримання наслідків із факту, що об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням;
- знаходження логічних і змістовних помилок у наведених означеннях.

Про означення немає смислу говорити — істинне воно чи хибне. Означення може бути правильним (коректним) або неправильним (некоректним) в залежності від того, чи задовольняє воно такі *вимоги до означень*:

1. Означення не повинне містити ще не означених понять (якщо вони не є первинними). Порушення цього правила часто набирає форми зачарованого кола, коли одне поняття означають через інше, яке, у свою чергу, означається через перше поняття.

2. Означення повинне бути відповідним означуваному поняттю, тобто, обсяг поняття, розкритого цим означенням, повинен збігатися з обсягом означуваного поняття.

3. Різні означення не повинні суперечити одне одному.

4. Означення не повинне містити зайвої інформації.

Завдання 3(а). Виберіть по одному означенню з таблиці 1-1 і виконайте логічний аналіз цих означень, тобто виділіть рід, термін і видові відмінності. Охарактеризуйте видові відмінності в кожному з вибраних вами означень.

Завдання 3(б). Осмисліть кожне слово в наступних означеннях на основі вимог до означень, сформульованих вище.

- «Відрізок, що сполучає вершину фігури з серединою протилежної сторони, називається медіаною трикутника».
- «Розв'язком рівняння називається число, що є його розв'язком».
- «Квадратом називається фігура, в якої всі сторони рівні та всі кути прямі».
- «Лінійною функцією називається функція, що задається формулою $y = kx + b$».

Дія *підведення об'єкта під означення* складається з наступних операцій: 1) вичленення всіх властивостей, зафіксованих в означенні; 2) встановлення логічного зв'язку між родом і видовими відмінностями; 3) перевірка наявності в об'єкта, що підводиться під означення, відмічених властивостей і їхніх зв'язків; 4) отримання висновку — об'єкт належить до класу об'єктів, зафіксованих в означенні, чи ні.

Наведемо приклад — означення паралелограма.

Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні.

Термін — паралелограм. Рід — чотирикутник. Видові відмінності: 1) одна пара протилежних сторін паралельна; 2) інша пара протилежних сторін паралельна.

Усі властивості в означенні з'єднані сполучником «і» – отже, властивості сполучені кон'юнктивно. При сполученні видових відмінностей кон'юнктивно для належності конкретного об'єкта до класу певних об'єктів необхідним є дотримання (наявність у прикладі) всіх властивостей одночасно.

Розглянемо інший приклад — означення неправильного дробу.

Дріб, у якого чисельник більший від знаменника або дорівнює йому, називається неправильним.

Властивості неправильного дробу: дріб, чисельник якого більший від знаменника або чисельник рівний знаменнику. Видові властивості сполучені диз'юнктивно. Для належності конкретного об'єкта до класу, заданого в означенні, коли видові відмінності сполучені диз'юнктивно, необхідне дотримання (наявність) родової властивості і хоча б однієї з видових відмінностей.

Завдання 4. Виконайте дії підведення під означення об'єкта для таких означень: «квадратична функція», «симетричні відносно прямої точки», «мимобіжні прямі», «спадна функція», «геометрична прогресія». Результати дій представте у вигляді таблиці:

Таблиця 1-2

№ п/п	Приклад	Перевірка властивостей об'єкта				Висновок про результат дії
		Власти-вість 1	Власти-вість 2	Власти-вість 3	Власти-вість 4	

Завдання 5. Установіть еквівалентність наступних означень об'єктів.

1. а) Дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.
б) Дві площини називаються взаємно перпендикулярними, якщо в кожній з них через будь-яку точку проходить пряма, перпендикулярна до іншої площини.

2. а) Кут, що дорівнює 90°, називається прямим кутом.
б) Прямим кутом називають половину розгорнутого кута.
в) Кут називають прямим, якщо його градусна міра рівна 90°.

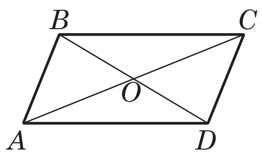
3. а) Рівність, що містить невідоме число, позначене буквою, називають рівнянням.
   б) Рівність, що містить змінну, називають рівнянням.
4. а) Лінійною функцією називають функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна; k і b — числа.
   б) Лінійною функцією називається функція вигляду $y = kx + b$, де k і b — задані числа.

Завдання 6. Знайдіть помилки в таких «означеннях» об'єктів.

1. Діаметром кола називається найбільша хорда, що проходить через центр.
2. Чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні, називається паралелограмом.
3. Ромбом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, а дві суміжні рівні.

Завдання 7. Дано паралелограм $ABCD$. З цього можна вивести такі наслідки.

1. $ABCD$ — чотирикутник.



2. $BC = AD$ і $AB = CD$.
3. $BC \parallel AD$ і $AB \mid\mid CD$.
4. $\angle BAD = \angle BCD$ і $\angle ABC = \angle CDA$.
5. $\angle BAD + \angle CDA = 180°$ і $\angle BAD + \angle ABC = 180°$.
6. $AO = OC$, $BO = OD$.
7. $\Delta ABC = \Delta CDA$ і $\Delta BDC = \Delta DBA$.
8. $\Delta AOB = \Delta COD$ і $\Delta BOC = \Delta DOA$.
9. $\angle ACB = \angle CAD$ і т. д.

Візьміть один з інших об'єктів — трапеція, конус, арифметична прогресія, показникова функція. Які наслідки можна вивести з факту, що даний об'єкт належить до теоретичного (абстрактного) класу об'єктів, охарактеризованих їхніми означеннями?

Виконання даної дії сприяє систематизації властивостей об'єкта і тим самим створює ефективніші передумови для використання їх при пошуку розв'язування задач, в умові яких буде цей об'єкт.

Виконані завдання дозволяють визначити *основні етапи розкриття змісту математичного об'єкта* (формування означення):

1. Логічний аналіз структури означення об'єкта (визначення терміну, роду, видових відмінностей і логічного зв'язку властивостей).
2. Виконання дії підведення під означення (наведення прикладів).

3. Виконання дії отримання наслідків із факту, що конкретний об'єкт належить до класу об'єктів, охарактеризованих означенням.
4. Якщо вимагає педагогічна ситуація, заміна означення йому еквівалентним.

Самостійна робота

Виконайте логіко-математичний аналіз та розкрийте основні етапи формування означеньтаких математичних об'єктів: *медіана трикутника*, *квадратне рівняння*, *вектор*.

Зауваження. Ряд математичних об'єктів, особливо на початкових етапах вивчення математики (V–VI класи), не має в підручниках означень у вигляді конкретних речень. Зазвичай у таких випадках властивості об'єктів (модуль числа, одночлен та ін.) розкриваються на конкретних прикладах і потім об'єкти позначаються терміном.

Неважко бачити, що і в цих випадках ведеться така ж робота із розкриття змісту математичного об'єкта, яка описана вище. Але внаслідок непідготовленості учнів до проведення процесу узагальнення і через об'єктивну складність структури означень об'єктів можуть бути проведені зміни в названих етапах роботи над означенням об'єкта — перший і четвертий етапи можуть не виконуватися, а другий виконується на емпіричному рівні.

У зв'язку з висловленим зауваженням необхідно особливо відзначити введення арифметичних дій додавання і множення. Означення цих дій в математиці вводяться по-різному залежно від прийнятого трактування. Але всі вони складні і, звичайно ж, недоступні учням такого віку. Тому в підручниках найчастіше зміст цих дій показують на конкретних математичних завданнях, у змісті яких потрібно об'єднати об'єкти або знайти результат зміни чи результати послідовних змін. Узагальненням, зокрема, названих дій виступає дія додавання. Для введення дії множення вживаються інші приклади. Тут важливо відзначити, що колиозначається дія, то головне — показати операції, які її реалізують. Такий підхід до всіх дій існує і в курсі алгебри, і в курсі геометрії.

Література: [13], [14], [24], [27], [28], [39], [40], [41], [50], [52], [53].

Лабораторна робота №2

Логіко-математичний аналіз математичних речень і загальні прийоми роботи з теоремами

Мета роботи. Розкрити загальні прийоми виконання логіко-математичного аналізу конкретних математичних речень, організувати самостійну роботу з аналізу теорем шкільного курсу математики і розкрити зміст основних етапів вивчення теорем.

Основний зміст

Належність речення до деякої математичної теорії визначається такими ознаками: 1) речення записане (або сформульоване) на мові даної теорії, складається з математичних та логічних термінів або символів та не містить ніяких інших термінів та символів; 2) речення є істинним, тобто є або первинним істинним реченням (аксіомою) математичної теорії, або його істинність встановлюється шляхом виведення з уже відомих істинних (первинних — аксіом, або раніше доведених — теорем) речень.

З кожним математичним реченням пов'язані його *зміст* (виражений у ньому математичний зміст) та *логічна форма* (або структура) речення. Здійснити логіко-математичний аналіз математичного речення означає визначити його *логічну структуру,* тобто показати: 1) з яких елементарних речень сконструйоване дане складне речення; 2) з допомогою яких логічних зв'язків сконструйоване дане складне речення (логічні зв'язки: «не» – заперечення, «і» — кон'юнкція, «або» — диз'юнкція, «якщо …, то …» — імплікація, «тоді і тільки тоді» — еквіваленція, «для будь-якого» — квантор загальності, «існує» — квантор існування. Будь-яке математичне речення є або простим (елементарним, що не розкладається на простіші речення), або складним (тобто побудованим з елементарних речень).

Наведемо на прикладі теореми про суму кутів трикутника зразок визначення логічної структури математичного речення.

Теорема. *Сума кутів трикутника дорівнює* 180°.

Наведене речення є складним, оскільки побудоване з таких елементарних речень: А — «ABC — трикутник», В — «$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$». Логічний зв'язок між цими елементарними реченнями – імплікація: «*Якщо ABC — трикутник, то $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$*», або $A \Rightarrow B$. При цьому перше речення називають *умовою*, а друге речення — *висновком складного речення.*

Наведемо інше речення — ознаку подільності на число 3.

Теорема. «*Якщо сума цифр числа n ділиться на 3, то саме число n ділиться на 3*».

Наведене речення є складним. У ньому можна виділити такі елементарні речення: А — *«Сума цифр числа n ділиться на 3»,* В — *«Саме число n ділиться на 3».* Речення сформульоване в імплікативній формі: $A \Rightarrow B$. Використовуючи логічні символи, речення можна записати так: «$(\forall n \in N)$ (сума цифр числа n ділиться на 3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (число n ділиться на 3)».

Завдання 1. Дайте відповідь на питання:

1. Що таке теорема, аксіома?
2. Що таке умова, висновок речення?
3. У яких логічних формах можуть бути сформульовані речення?
4. Як виділити умову і висновок речення?

Завдання 2. Виконайте логіко-математичний аналіз наведеного нижче речення «Вертикальні кути рівні», відповівши спочатку на поставлені запитання:

1. В якій формі сформульоване речення?
2. Сформулюйте речення в імплікативній формі.
3. Виділіть умову і висновок речення.
4. Встановіть логічну залежність між елементарними реченнями, що входять до структури даного речення.

Завдання 3. Виконайте логіко-математичний аналіз третьої ознаки рівності трикутників.

Завдання 4. Виконайте логіко-математичний аналіз теореми про властивість медіани рівнобедреного трикутника, що проведена до його основи.

Примітка. Сполучник «і» у формулюванні теореми із завдання 4, очевидно, вживається в кон'юнктивному контексті.

Завдання 5. Визначте, чи може теорема мати одночасно декілька умов і декілька висновків. Зі шкільного підручника геометрії наведіть приклад такої теореми.

Завдання 6. Сформулюйте речення, обернені до даних:

- «Сума кутів трикутника дорівнює 180°».
- «Якщо сума цифр числа n ділиться на 3, то саме число n ділиться на 3».

- «Вертикальні кути рівні».
  Чи будуть сформульовані речення теоремами? Чому?

Завдання 7. Як отримати речення, протилежне до даного? Сформулювати речення, протилежні до вказаних у завданнях 3, 4 та 6. Чи будуть сформульовані речення теоремами? Чому?

Завдання 8. Як отримати речення, обернене протилежному до даного? Сформулювати речення, обернені протилежним до вказаних у завданнях 3, 4 та 6. Чи будуть сформульовані речення теоремами? Чому?

Завдання 9. На підставі розглянутих прикладів зробіть висновок про взаємозв'язок між прямим, оберненим, протилежним і оберненим до протилежного реченнями. Які з них одночасно є істинними (або хибними) реченнями?

Загальні прийоми роботи з теоремою. При введенні теореми можна умовно виділити наступні *етапи її вивчення* (покажемо на прикладі теореми з курсу геометрії):

- мотивація вивчення теореми і розкриття її змісту (розгляд геометричного факту і формулювання теореми);
- робота над структурою теореми;
- мотивація необхідності доведення теореми;
- побудова креслення і короткий запис змісту теореми;
- пошук доведення, доведення і його запис;
- закріплення теореми;
- застосування теореми.

Для мотивування необхідності вивчення теорем можна запропонувати такі прийоми.

Прийом 1. *Узагальнення спостережуваних у житті фактів і явищ та переклад їх на математичну мову.*

Мотивувати необхідність вивчення властивості:*«Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці»* можна, запропонувавши учням розв'язати вдома таку задачу.

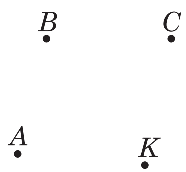


Рис. 2-1

На плані місцевості чотири населені пункти відмічено точками A, B, C, K. З'ясуйте, чи перетнуться шляхи з пункту A в пункт C і з пункту K в пункт B (рис. 2-1, шляхи вважаємо прямолінійними). Якщо перетнуться, то в скількох точках? Розгляньте різні можливі випадки розташування населених пунктів. Чи можуть ці шляхи перетнутися у двох точках?

У класі вчитель з'ясовує отримані результати розв'язання задачі: у всіх випадках розв'язання задачі учні або мають одну загальну точку, або не мають жодної. Відзначивши, що шляхи руху в даних завданнях були відрізками, пропонується подумати над питанням: чи зміниться висновок, якщо замість двох відрізків узяти дві прямі? Відповіді можуть бути різними. Якщо відповіді різні, то відразу можна запропонувати з'ясувати, чи можуть дві прямі мати дві спільні точки, і тим самим перейти до доведення теореми, мотив вивчення якої став очевидним. Якщо ж відповідь одна, тобто дві різні прямі перетинаються в одній точці, то вчитель говорить, що в цьому завданні це дійсно так. При розв'язуванні інших задач може бути по-іншому: адже ми не можемо розглянути всі конкретні життєві ситуації і порозв'язувати всі завдання! Як бути? Треба провести доведення твердження, щоб воно було істинним для будь-якого випадку.

Цей прийом можна використовувати при вивченні багатьох теорем.

Завдання 10. Підберіть або складіть завдання, з допомогою яких можна мотивувати вивчення теореми про властивість суміжних кутів та теореми про суму кутів трикутника.

Прийом 2. *Демонстрація необхідності знання тієї або іншої теореми для розв'язування практичних завдань.*

Для мотивації вивчення теореми (першої ознаки рівності трикутників): «*Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні*» можна використовувати наступне завдання.

Картографам необхідно було нанести на карту два населені пункти A і B. Виміряти відстань між пунктами виявилося неможливим, оскільки між ними було озеро. Картографи вибрали точку C, від якої можна виміряти відстань і до пункту A, і до пункту B. Виміряли ці відстані і побудували на папері відрізки AC і CB відповідної довжини (масштаб можна вказати на свій погляд), а потім продовжили лінії за точку C, відклали відрізки CD і CM, рівні відповідно відрізкам CB і CA, і з'єднали точки D і M відрізком (рис. 2-2). Картографи вважають, що відстань DM рівна відстані AB (у відповідному масштабі). Чи мають рацію картографи?

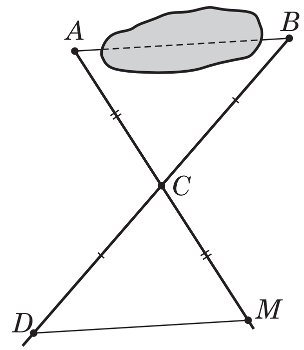


Рис. 2-2

- За умовою задачі, відомо, що $AC = CM$, $BC = CD$ і, крім того, $\angle ACB = \angle DCM$ як вертикальні кути.
- Треба встановити, що $DM = AB$.
- Звідки може випливати рівність цих відрізків?
- Рівність відрізків DM і AB може випливати з рівності трикутників ACB і MCD.
- Але в рівних трикутниках відповідно рівні всі шість елементів (по три кути і по три сторони), а тут ми маємо тільки дві сторони і кут між ними одного трикутника, що відповідно рівні двом сторонам і куту між ними іншого трикутника. Як бути?
- Слід довести, що коли дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Мотив вивчення і необхідність доведення теореми показані.

Завдання 11. Підберіть відповідне практичне завдання для мотивації вивчення теореми (друга ознака рівності трикутника):
«*Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника рівні відповідно стороні і прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні*».

Прийом 3. *Обґрунтування необхідності знання тієї або іншої теореми для розв'язування завдань і доведення інших теорем.*

Наприклад, перед доведенням теореми про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника учням пропонується розв'язати таке завдання.

У рівнобедреному трикутнику ABC (AB = BC) вершина кута B сполучена з серединою K сторони AC відрізком. Доведіть, що трикутники ABK і CBK рівні. Чи достатньо цих даних, щоб установити рівність названих трикутників?

Оскільки третя ознака рівності трикутників (за трьома сторонами) учням ще не введена, то дане завдання вони розв'язати не можуть. Створена проблемна ситуація дозволяє відразу мотивувати необхідність вивчення відразу трьох теорем: теореми про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, теореми про властивість медіани рівнобедреного трикутника, проведеної до його основи, та третьої ознаки рівності трикутників.

Завдання 12. Покажіть, як, здійснюючи пошук розв'язування сформульованої вище задачі, можна мотивувати вивчення теорем, що перелічені у попередньому абзаці тексту.

Очевидно, що перераховані вище прийоми для мотивації вивчення теорем служать одночасно і розкриттю змісту теорем. З інших прийомів розкриття змісту теорем можна назвати:

- спостереження наочного матеріалу, зокрема рухомих моделей або ряду креслень;
- виконання побудов;
- розв'язування задач на обчислення і доведення;
- виконання лабораторних або практичних робіт;
- розв'язування задач на відшукання деяких залежностей.

Наведемо приклади.

1. Щоб розкрити зміст теореми Піфагора, учням пропонується в зошитах накреслити прямокутний трикутник, виміряти з точністю до 0,1 см довжини його катетів та довжину гіпотенузи. Потім учитель пропонує порівняти суму квадратів довжин катетів із квадратом гіпотенузи зображених трикутників. Не дивлячись на те, що всі учні малювали різні прямокутні трикутники, — результати у всіх були приблизно однакові: сума квадратів катетів прямокутного трикутника є досить близькою до значення квадрата гіпотенузи. Наголошується, що результати цих спостережень можна узагальнити і сформулювати теорему.

2. Для розкриття змісту теореми Фалеса можна використати такий прийом: накреслити в зошитах довільний кут (на дошці це робить вчитель); відкласти на одній стороні кута послідовно декілька рівних відрізків; через кінці відрізків провести паралельні прямі до перетину з другою стороною кута; виміряти відрізки, що отримались на другій стороні кута, і порівняти їх між собою. Після цієї роботи висловлюється припущення (формулюється теорема), яке (яка) потім доводиться.

Розглянемо зразок запису доведення теореми на прикладі теореми про властивість медіани рівнобедреного трикутника, проведеної до його основи.

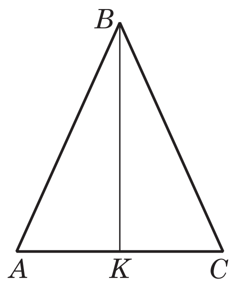


Рис. 2-3

Дано: ΔABC — рівнобедрений,
BK — медіана, проведена до основи (рис. 2-3).

Довести:
1) BK — бісектриса,
2) BK — висота.

Доведення. 1. Оскільки $AB = BC$ (за означенням рівнобедреного трикутника), $AK = KC$ (за означенням медіани) та $\angle BAK = \angle BCK$ (за доведеною властивістю рівності кутів при основі рівнобедреного трикутника), то, за першою ознакою рівності трикутників, маємо, що $\Delta ABK = \Delta CBK$. А тому $\angle ABK = \angle CBK$, за означення рівності трикутників, а, отже, BK — бісектриса $\angle ABC$ (за означенням бісектриси трикутника).

2. Через те, що $\Delta ABK = \Delta CBK$, то $\angle BKA = \angle BKC$ (за означенням рівності трикутників). З іншого боку, $\angle BKA$ і $\angle BKC$ — суміжні (за означенням суміжних кутів), а тому, за властивістю суміжних кутів, $\angle BKA + \angle BKC = 180°$. Звідси $\angle BKA$ і $\angle BKC$ — прямі кути. Отже, $BK \perp AC$. Таким чином, BK — висота.

Можна скласти структурну схему доведення. Наведемо таку схему для випадку (1) на рис. 2-4.

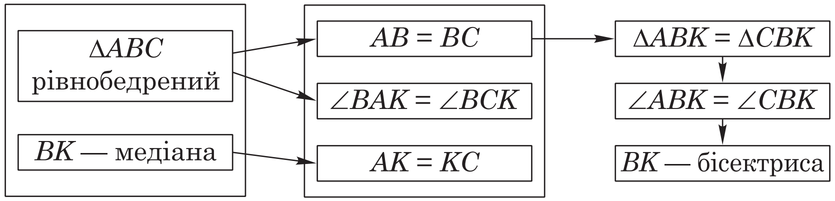


Рис. 2-4

Пропонуємо читачам самостійно скласти структурну схему для випадку (2), а також загальну схему доведення усієї теореми.

Щоб теорема була засвоєна, необхідна робота з нею і після її доведення. Цьому сприяють завдання таких видів.

1) Сформулюйте теорему.

2) Виділіть умову, висновок теореми. До яких фігур застосовна теорема?

3) Сформулюйте теорему із словами: «Якщо ..., то ...» (якщо теорема сформульована в категоричній формі).

4) Сформулюйте речення, обернене (протилежне, обернене до протилежного) сформульованому.

5) Відтворіть доведення теореми за новим кресленням, змінивши його положення і позначення елементів.

6) Складіть план доведення.

7) Назвіть аргументи, які використовувалися при доведенні.

8) Доведіть теорему іншим способом.

9) Розв'яжіть задачу на застосування теореми.

При цьому пропонуються завдання на застосування тільки що вивченої теореми: завдання на розпізнавання фігур або взаємного положення елементів фігур на кресленнях, до яких можна застосувати теорему, причому розв'язування задачі в цьому випадку до кін-

ця можна і не доводити; завдання, для розв'язування яких використовується вивчена теорема разом з іншими, раніше вивченими.

Зрозуміло, що ця робота проводиться не тільки на одному–двох уроках, коли вивчається та або інша теорема, а в міру можливості — і при вивченні інших питань.

Прослідкуємо всі етапи роботи над теоремою на прикладі теореми: «*У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою*».

I етап. Один із прийомів мотивації вивчення цієї теореми — знання теореми для розв'язування завдань.

Можна використовувати інший прийом, показавши конструкцію будівельної ферми (рис. 2-5) , де $AC = CB$, $AD = DB$, $DM = MB$.

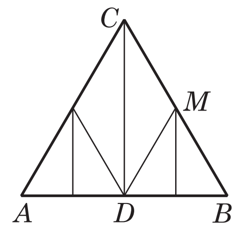


Рис. 2-5

З метою мотивації вивчення цієї теореми можна використовувати розв'язування практичної задачі.

Щоб провісити з допомогою мотузки перпендикуляр до даної прямої MN у даній на ній точці O (рис. 2-6), вчиняють так: відкладають від точки O рівні відстані OB і OA; прикріплюють до кілочків A і B кінці мотузки і, узявши мотузку за середину C, натягують її; провішена пряма CO і буде шуканим перпендикуляром. Чому?

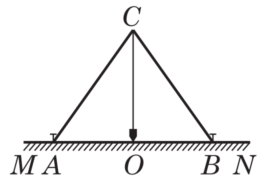


Рис. 2-6

Можна використовувати розв'язування навчально-практичної задачі.

Щоб розділити кут P навпіл з допомогою тільки масштабної лінійки, діють так: 1) відкладають на сторонах кута P (рис. 2-7) рівні відрізки PM і PK; 2) сполучають точки M і K відрізком; 3) ділять відрізок MK навпіл, отримують точку B; 4) проводять промінь PB. Отже, PB — шукана бісектриса, що розділила кут навпіл. Чому?

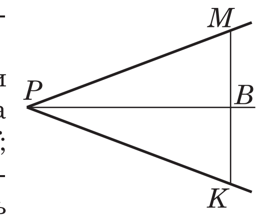


Рис. 2-7

II етап. Щоб учні самі «відкрили» зміст теореми і сформулювали її, проводиться така практична робота. Перед уроком дається додому завдання: накреслити три рівнобедрені трикутники (гострокутний, прямокутний і тупокутний) і в цих трикутниках побудувати медіани і висоти до бічних сторін (з допомогою масштабної лінійки і косинця), бісектриси кутів при основі (з допомогою транспортира).

А на уроці пропонується за варіантами виконати іншу практичну роботу — накреслити в зошитах рівнобедрений трикутник.

I варіант	II варіант	III варіант
Гострокутний	Прямокутний	Тупокутний

Потім побудувати медіану і висоту до основи і бісектрису кута при вершині, що протилежна основі. Троє учнів (по одному від кожного варіанта) виконують цю роботу на дошці. Вчитель тим часом може побудувати різносторонній трикутник і провести в ньому медіани, висоти і бісектриси (цей рисунок можна заготувати наперед).

Після виконання практичної роботи обговорюються її результати. В учнів у кожному з даних випадків медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є бісектрисою і висотою.

У процесі евристичної бесіди задаються питання: чи володіє цією властивістю медіана, проведена з вершин двох інших кутів рівнобедреного трикутника до протилежної сторони? Ні. Це видно з рисунків, виконаних у домашній практичній роботі.

Чи володіють цією властивістю медіани, проведені в різносторонньому трикутнику? Ні. Вчитель демонструє свій рисунок.

Отже, практичним шляхом установлено новий факт. Який?

Учні формулюють теорему. Якщо є необхідність, учитель уточнює їхні відповіді.

III етап. Мотивується необхідність доведення теореми. Перед учнями ставиться питання: чи у всіх рівнобедрених трикутниках медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою?

Відповідь — невідомо. У тих, які розглядалися, так. А в інших — невідомо. Як бути?

Робиться висновок про те, що необхідно довести справедливість теореми для будь-якого рівнобедреного трикутника.

IV етап. Розглядається структура теореми: виділяється умова, висновок, ще раз уточнюється, що теорема сформульована для рівнобедреного трикутника. На дошці і в зошитах виконується креслення, записується, що дано і що потрібно довести.

V етап. Пошук доведення здійснюється рухом від висновку до умови, тобто аналітично. Записується доведення.

Робота із закріплення теореми

VI етап. Засвоєння формулювання теореми.

1) Чи правильно сформульована теорема: «Медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою»? Чому?

2) Вставте пропущені слова: «У ... трикутнику медіана, проведена ..., є ... і ...».

3) Сформулюйте теорему зі словами: «Якщо ... , то ...».

VII етап. Засвоєння доведення теореми.

1) Які поняття використовуються у формулюванні теореми?

2) Які наслідки використовувалися в процесі доведення даної теореми, наприклад, з факту: «ΔABC — рівнобедрений»? Відповідь: $AB = BC$, $\angle BAK = \angle BCK$.

3) Назвіть теореми, які використовувались при доведенні даної теореми. Яка мета їх використання?

4) Доведіть теорему заданим рисунком (рис. 2-8).

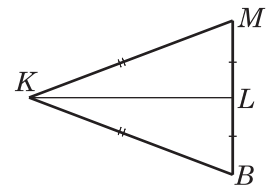


Рис. 2-8

VIII етап. Розв'язування задач на застосування теореми.

1) Точка M належить висоті рівнобедреного трикутника, проведеній до основи. Чи належить ця точка: а) бісектрисі кута при вершині; б) медіані, проведеній до основи? Чому?

2) Точка P належить бісектрисі кута трикутника. Чи належить ця точка висоті трикутника? Чому?

3) Чи можна з допомогою тільки масштабної лінійки побудувати бісектрису кута при вершині рівнобедреного трикутника? Висоту? Дайте обґрунтування відповіді.

4) Довжина медіани рівнобедреного трикутника, проведеної до основи, рівна 10 см. Чому дорівнюють довжини бісектриси і висоти, проведених з тієї ж вершини?

5) Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику бісектриса кожного з кутів є медіаною і висотою, проведеними з вершини кута до протилежної сторони. Чи будуть рівні всі бісектриси, медіани і висоти між собою?

Самостійна робота

Виконайте логіко-математичний аналіз теореми синусів (теореми косинусів). Для цієї теореми сформулюйте речення: обернене, протилежне і протилежне до оберненого. Опишіть етапи роботи з даною теоремою в класі, запропонувавши при цьому різні прийоми мотивування необхідності вивчення теореми.

Література: [1], [2], [3], [10], [11], [12], [14], [24], [34], [35], [36], [39], [40], [45], [50], [52], [53].

Лабораторна робота №3

Логіко-математичний аналіз алгоритмів і правил шкільного курсу математики. Методика роботи в школі з алгоритмами і правилами

Мета роботи. Сформувати у студентів уміння проводити логіко-математичний аналіз математичного алгоритму (правила) та ознайомити їх із змістом основних етапів роботи при засвоєнні алгоритму учнями; в ході колективної роботи виконати логіко-математичний аналіз алгоритму додавання звичайних дробів із різними знаменниками і розібрати зміст основних етапів роботи з його засвоєння.

Основний зміст

Елементами теоретичних знань, з якими школярі зустрічаються при вивченні математики разом з означеннями понять, аксіомами і теоремами, є *алгоритми*.

Поняття «алгоритм» є основним, невизначуваним. Суть його на змістовно-інтуїтивному рівні може бути описана таким чином: *алгоритм* – зрозуміле розпорядження, яке вказує, які операції і в якій послідовності необхідно виконати з даними, щоб розв'язати будь-яке завдання даного типу.

Відомо, що алгоритм володіє властивостями *масовості, елементарності* і *дискретності кроків, детермінованості* та *результативності.*

Властивість масовості припускає, що з допомогою даного алгоритму можуть бути розв'язані всі завдання певного типу.

Властивість дискретності і елементарності кроків полягає в тому, що при побудові алгоритму виділяються строго дискретні (окремі і закінчені) кроки (операції), кожний з яких у змозі виконати виконавець (у цьому сенсі кожен крок вважається елементарним). У записі алгоритму властивість дискретності виражається у виділенні окремих пунктів (вказівок) у словесній формі або блоків на мові алгоритмів.

Властивість детермінованості виражає те, що розв'язування задач за даним алгоритмом є процесом строго («жорстко») направленим: він однозначно визначає перший крок і кожен наступний.

Властивість результативності означає, що точне виконання вказівок алгоритму при розв'язанні будь-якої задачі з даного класу однотипних завдань завжди (через скінченне число кроків) повинне приводити до певного результату. Відмітимо, що цим результатом може бути також і встановлення факту, що задача розв'язків не має.

Перераховані властивості є характеристичними властивостями поняття *алгоритму*.

Всякий алгоритм описує загальний метод розв'язування класу однотипних завдань, тобто алгоритм є формою виразу цього методу.

Для опису загального методу розв'язування класу однотипних завдань у школі також часто використовуються правила.

Правило — це «згорнутий» алгоритм. Окремі його кроки є блоками (системами операцій у «стислому» вигляді); деякі операції, необхідні на початковому етапі формування методу, взагалі не містяться у формулюванні правила.

Правила в підручниках виражаються формулами і формулюваннями на природній мові. Використання правил має ту ж мету, що і використання алгоритмів: формування загальних методів розв'язування класу однотипних завдань.

Будь-який алгоритм можна назвати правилом, але не всяке правило можна назвати алгоритмом: у формулюванні правила часто чітко не виділяються всі кроки — воно не володіє в цьому випадку властивістю детермінованості.

Для того, щоб правильно організовувати роботу учнів з оволодіння алгоритмами шкільного курсу математики, вчителеві необхідно опанувати умінням виконувати логіко-математичний аналіз алгоритмів (правил).

Логічний аналіз алгоритмів (*правил*) припускає: а) перевірку наявності у даного правила характеристичних властивостей алгоритму; б) виділення послідовності операцій і логічних умов у даному правилі; в) встановлення зв'язку алгоритму (правила) з іншим змістом матеріалу даного пункту (розділу, предмета).

Математичний аналіз алгоритмів (*правил*) полягає у встановленні математичної основи даного правила, тобто тих базових математичних положень, які дозволяють побудувати саме таке правило (вони зазвичай називаються обґрунтованими знаннями).

Покажемо логіко-математичний аналіз правила на прикладі *правила додавання звичайних дробів з різними знаменниками.*

Наведемо формулювання правила, що вивчається в VI класі [60]:

«Щоб додати два звичайні дроби з різними знаменниками, треба:

1) *звести дроби до найменшого спільного знаменника;*

2) *додати отримані дроби з однаковими знаменниками»*.

Перш за все звернемо увагу на виконання характеристичних властивостей алгоритму.

У словесному формулюванні правила виділені дискретні кроки, кожний з яких є операцією, раніше сформованою в учнів (наприклад, знаходження найменшого спільного знаменника як найменшого спільного кратного чисел, що позначають знаменники дробів; використання основної властивості дробів; знаходження чисельника результату додавання дробів як суму добутків чисельників дробів на додаткові множники), і в цьому сенсі елементарну або дійсно просту, елементарну операцію (підписування додаткових множників до чисельників дробів). Тому наведене правило володіє властивостями дискретності і елементарності кроків.

У словесному формулюванні також строго вказана послідовність кроків (усі кроки занумеровані). Це говорить про те, що дане правило володіє властивістю детермінованості.

Це правило володіє властивістю масовості. Застосовуючи його, можна додати будь-які два звичайні дроби з різними знаменниками.

Нарешті, застосовуючи дане правило, завжди знайдемо суму будь-яких двох звичайних дробів з різними знаменниками. Це означає, що дане правило володіє властивістю результативності.

Таким чином, це правило додавання двох звичайних дробів з різними знаменниками володіє всіма характеристичними властивостями алгоритму, тому його можна назвати алгоритмом.

В алгоритмі вже виділені операції і вказана їхня послідовність. Проте, враховуючи зауваження, зроблене при розгляді властивості масовості, доцільно виділити логічну умову, що визначає факт наявності різних знаменників у дробах.

Завдання 1. Запишіть алгоритм додавання двох звичайних дробів з різними знаменниками з допомогою схеми (рис. 3-1).

Аналіз отриманої схеми дозволяє встановити зв’язки даного алгоритму з іншими знаннями: знаходженням найменшого спільного знаменника як найменшого спільного кратного чисел, основною властивістю дробу, додаванням дробів з рівними знаменниками, алгоритмом додавання натуральних чисел.

Для того, щоб виконати математичний аналіз алгоритму, необхідно за операціями алгоритму побачити їхню математичну основу, або відповісти на питання, виходячи з яких математичних знань

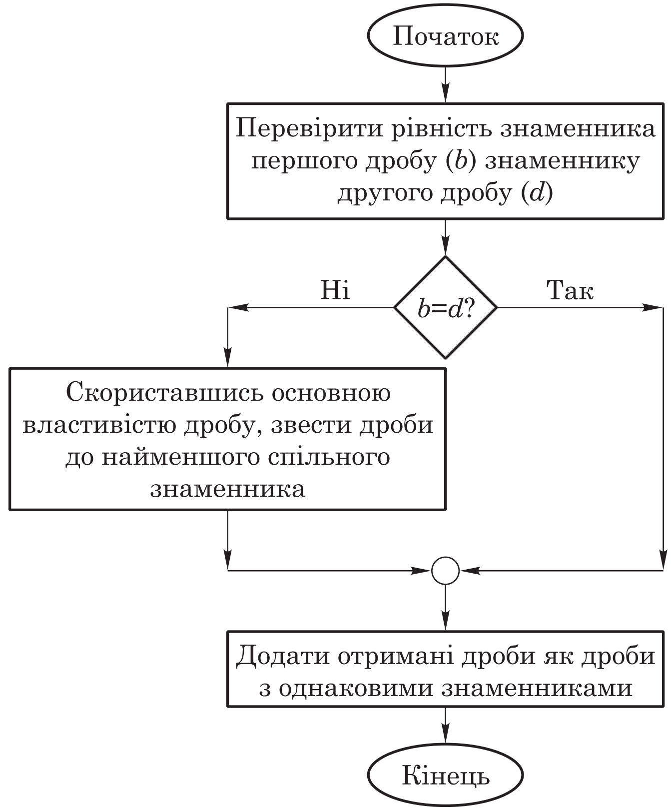


Рис. 3-1

(фактів, закономірностей, співвідношень) можна виконувати ту або іншу операцію, що входить до алгоритму.

Алгоритм додавання двох дробів із різними знаменниками формалізує знаходження сум та різниць двох будь-яких звичайних дробів. Використання цього принципу пов’язане з особливостями знаходження найменшого спільного знаменника як найменшого спільного кратного чисел, основною властивістю дробу, додаванням дробів з рівними знаменниками.

Таким чином, знаннями, що обґрунтовують даний алгоритм, є правило знаходження найменшого спільного знаменника як найменшого спільного кратного чисел, основна властивість дробу, правило знаходження суми дробів із рівними знаменниками.

Логіко-математичний аналіз алгоритму дозволяє правильно здійснити відбір матеріалу для роботи з учнями з метою оволодіння алгоритмом.

Робота з учнями із засвоєнняалгоритму зазвичай включає *три основні етапи*: 1) введення алгоритму; 2) власне засвоєння алгоритму; 3) застосування алгоритму.

Охарактеризуємо мету кожного з виділених етапів:

- *мета першого етапу* — актуалізація знань, необхідних для введення і обґрунтування алгоритму, а також формулювання алгоритму;
- *мета другого етапу* — відпрацювання операцій, що входять до алгоритму, і засвоєння їх послідовності;
- *мета третього етапу* — відпрацювання алгоритму в знайомих (при варіюванні початкових даних) і незнайомих ситуаціях.

Основним засобом, який використовується на різних етапах формування алгоритму, є система вправ. Зміст її визначається на підставі логіко-математичного аналізу конкретного алгоритму.

Можна виділити і найбільш оптимальні форми роботи з учнями на різних етапах формування алгоритму. Так, на першому етапі — це усна робота та повторення. На другому етапі — письмова колективна робота з широким використанням коментування виконуваних дій. На третьому етапі — самостійна робота.

Завдання 2. На підставі виконаного логіко-математичного аналізу алгоритму додавання десяткових дробів проаналізуйте зміст вправ, відібраних для кожного етапу формування алгоритму. Співставте відбір вправ з метою кожного етапу.

Вправи для першого етапу

1. (Усно.) Виконайте додавання дробів і поясніть його виконання:

а) $\frac{1}{7}+\frac{4}{7}$; б) $\frac{4}{21}+\frac{17}{21}$; в) $\frac{1}{11}+\frac{6}{11}$;

г) $\frac{5}{13}+\frac{8}{13}$; ґ) $\frac{63}{122}+\frac{19}{122}$; д) $\frac{85}{150}+\frac{15}{150}$.

2. Зведіть дроби до знаменника 24: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$.

3. Знайдіть найменше спільне кратне чисел: а) 2 і 12; б) 6 і 8; в) 21 і 14; г) 7 і 9.

4. Зведіть дроби до найменшого спільного знаменника:

а) $\frac{1}{5}$ і $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{4}$ і $\frac{1}{6}$; г) $\frac{3}{18}$ і $\frac{1}{9}$;

ґ) $\frac{2}{7}$ і $\frac{1}{5}$; д) $\frac{1}{12}$ і $\frac{1}{8}$; е) 1 і $\frac{5}{7}$.

Вправи для другого етапу

1. Знайдіть суму або різницю дробів:

а) $\frac{1}{7}+\frac{3}{14}$; б) $\frac{1}{5}+\frac{2}{9}$; в) $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$; г) $\frac{11}{18}-\frac{5}{9}$;

ґ) $\frac{8}{11}-\frac{3}{7}$; д) $\frac{11}{12}-\frac{7}{8}$; е) $5\frac{1}{14}+11\frac{1}{21}$; є) $14-11\frac{1}{9}$.

2. Першого дня продали $\frac{1}{3}$ частину, а другого — $\frac{1}{2}$ частину винограду, що надійшов у продаж. Яку частину винограду продали за два дні?

Вправи для третього етапу

1. Знайдіть суму або різницю дробів:

а) $4\frac{7}{30}+1\frac{11}{36}$; б) $\frac{23}{42}+\frac{11}{56}$; в) $\frac{11}{34}-\frac{9}{170}$; г) $9\frac{2}{15}-3\frac{13}{36}$;

ґ) $6\frac{5}{18}+2\frac{11}{21}$; д) $1\frac{5}{12}-\frac{61}{144}$; е) $\frac{33}{13}+\frac{31}{6}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $x+\frac{4}{5}=\frac{9}{10}$; б) $x-1\frac{7}{20}=\frac{3}{10}$; в) $1\frac{2}{5}-x=\frac{3}{10}$; г) $t+1\frac{1}{12}=1\frac{1}{8}$.

3. Обчисліть значення виразу $a-3\frac{1}{3}+b$, якщо $a=4\frac{1}{8}$; $b=5\frac{2}{3}$.

4. Периметр трикутника p дм. Одна сторона трикутника дорівнює $12\frac{3}{5}$ дм, а друга — на $2\frac{3}{20}$ дм коротша. Складіть вираз для обчислення довжини третьої сторони. Обчисліть її, якщо $p=28\frac{13}{20}$.

Алгоритми і правила мають загальне функціональне призначення — формування загальних методів розв'язування класу однотипних завдань. Проте їхнє методичне призначення може бути різне. Алгоритм доцільно використовувати на первинних етапах формування дії, оскільки він дає докладний опис послідовності операцій. Правило зручно застосовувати тоді, коли в основному уміння виконувати дію вже сформоване і учню не потрібний докладний опис операцій.

У шкільних підручниках математики більшість правил сформульована в лаконічній і «стислій» формі. Для навчання учнів виконанню відповідного правила дії вчителеві часто необхідно записувати його у вигляді алгоритму.

Покажемо, як це можна зробити, на прикладі правила множення двох десяткових дробів [59, 206].

У підручнику є додаткове зауваження про те, що іноді в добутку може вийти менше цифр, ніж потрібно відокремити комою, – в цьому випадку зліва до добутку приписують нулі.

Враховуючи це зауваження, сформулюємо в словесній формі алгоритм множення двох десяткових дробів.

«Щоб перемножити два десяткові дроби, потрібно:

1. *Незважаючи на коми, виконати множення цих чисел як натуральних.*

2. *У добутку відокремити праворуч комою скільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом».*

Цей алгоритм можна деталізувати так: підписати множники один під одним так, як при множенні натуральних чисел (не звертаючи уваги на коми); виконати множення чисел як натуральних, не звертаючи уваги на коми; підрахувати загальне число цифр після коми в обох множниках разом (s); порівняти це число з числом цифр, отриманих в добутку (n); якщо число цифр в добутку більше від числа цифр, які стоять після коми в обох множниках разом ($n > s$), то в добутку справа відокремити стільки цифр комою, скільки є їх після коми в обох множниках разом; якщо число цифр в добутку менше від числа цифр, які стоять після коми в обох множниках разом ($n < s$), то приписати до добутку зліва один або $(s - n) + 1$ нулів і відокремити стільки цифр в добутку справа, скільки є їх після коми в обох множниках разом (тобто s).

Цей же алгоритм можна записати у вигляді схеми, зображеної на рис. 3-2.

Завдання 3. Виконайте повний логіко-математичний аналіз побудованого алгоритму множення десяткових дробів. Підберіть вправи для роботи з учнями на кожному з трьох етапів формування алгоритму множення десяткових дробів.

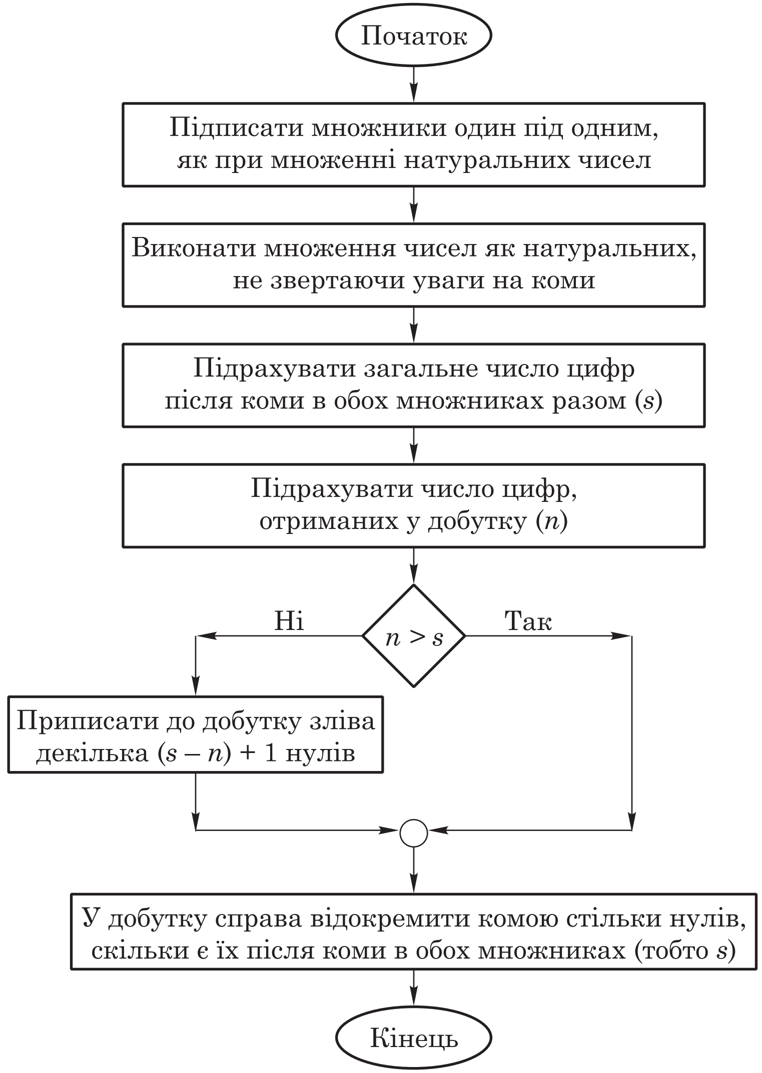


Рис. 3-2

Самостійна робота

Виконайте логіко-математичний аналіз алгоритму порівняння звичайних дробів із різними знаменниками [59] (алгоритму додавання (віднімання) десяткових дробів [59]; правила ділення десяткового дробу на натуральне число [59]; правила множення одночлена на многочлен [7], [31]). Визначте та сплануйте зміст згаданих вище трьох етапів організації роботи учнів над засвоєнням указаного алгоритму. Підготуйте вправи, що можуть бути використані для кожного етапу формування алгоритму.

Примітка. Пам'ятайте, щопри виконанні логіко-математичного аналізу алгоритму (правила) необхідно записати його у вигляді схеми, встановити зв'язки алгоритму(правила) з іншими знаннями, перерахувати знання, що обґрунтовують використання алгоритму.

Література: [7], [8], [9], [24], [31], [32], [33], [37], [38], [39], [40], [50], [51], [52], [53], [59], [60].

Лабораторна робота №4

Задачі як засіб навчання математики

Мета роботи. Познайомити з особливостями систем задач, спрямованих на формування елементів знань з математики (математичних понять, їхніх означень, теорем і їх доведень, правил); проаналізувати в підручниках математики системи задач, спрямованих на засвоєння учнями понять «правильний дріб» і «неправильний дріб», теореми про суму кутів трикутника; задачі контрольних робіт з тем: «Звичайні дроби» (V кл.), «Сума кутів трикутника» (VII кл.).

Основний зміст

Основним засобом, який використовується при навчанні математики для формування знань, умінь і навичок учнів, є задачі. З допомогою розв'язування задач ми реалізуємо не лише освітню мету навчання математики, але й розвивальну та виховну.

За своїм функціональним призначенням у процесі навчання задачі як засіб навчання можуть бути безпосередньо направлені на формування знань, умінь і навичок учнів (*навчальні задачі*) або на здійснення контролю з боку вчителя рівня сформованості знань, умінь і навичок (*контролювальні задачі*).

Навчальні задачі перш за все пов'язані з формуванням елементів теоретичних знань і пов'язаних з ними умінь. До теоретичних знань, які формуються при вивченні математики, можна віднести поняття та їхні означення, теореми та їх доведення, правила (алгоритми).

Потрібно відзначити, що велике навантаження у формуванні практичних математичних умінь і навичок несуть задачі, направлені на формування правил (алгоритмів). У ході розв'язування таких задач формуються обчислювальні уміння і навички, навички тотожних перетворень алгебраїчних і трансцендентних виразів, уміння і навички розв'язування рівнянь і нерівностей певних типів та ін. Оскільки формування умінь і особливо навичок вимагає неодноразового повторення певної послідовності операцій (тобто вправ із виконання тієї або іншої дії), то задачі, пов'язані з формуванням умінь і навичок учнів, зазвичай називають *вправами*.

Проте не тільки вправи направлені на формування умінь і навичок учнів. У ході розв'язування задач, направлених на засвоєння понять і теорем, формуються, наприклад, уміння виділяти істотні ознаки понять, аналізувати структуру означень і формулювань теорем, використовувати істотні ознаки і властивості понять, а також факти, отримані в ході доведення теорем у різних ситуаціях.

Для формування виділених елементів теоретичних знань і оволодіння відповідними їм видами діяльності учням недостатньо однихзадач. Повинно йтися про систему завдань, що забезпечує засвоєння навчального матеріалу.

Перерахуємо загальні і специфічні особливості *систем навчальних завдань*, направлених на формування елементів теоретичних знань.

Загальним для систем завдань, направлених на засвоєння учнями понять, теорем і правил, є наявність в них задач, що готують уведення відповідного елементу теоретичних знань, пов'язаних з його аналізом (побудовою) та його застосуванням. Серед підготовчих задач зазвичай виділяються задачі на мотивацію вивчення понять, теорем, правил і задачі на актуалізацію знань, умінь і навичок, необхідних при роботі з новим навчальним матеріалом.

Особливості системи завдань на засвоєння поняття і його означення:

1. Наявність завдань, пов'язаних з ілюстрацією практичної значущості нового поняття або з його значущістю для подальшого вивчення математики.
2. Наявність завдань на актуалізацію знань і умінь, необхідних при формуванні даного поняття.
3. Наявність завдань на виділення істотних ознак поняття.
4. Наявність завдань на розпізнавання поняття, щоформується.
5. Наявність завдань на засвоєння тексту означення поняття.
6. Наявність завдань на використання символіки, пов'язаної з поняттям.
7. Наявність завдань на встановлення властивостей поняття.
8. Наявність завдань на застосування поняття.

Відомо, що не завжди робота з поняттям припускає формулювання його означення (особливо це стосується понять, що розглядаються в V–VI класах). У цьому випадку в системі завдань будуть відсутні задачі на засвоєння тексту означення.

Наведена система видів завдань забезпечує формування двох навчальних дій: підведення об'єкта під поняття (див. пункти 3, 4); виведення наслідків з факту належності об'єкта до даного поняття (див. пункти 7, 8).

Завдання 1. Проаналізуйте систему завдань для формування понять «правильний дріб» і «неправильний дріб» [59], перевіривши наявність в ній перелічених у пунктах 1–8 видів завдань у системі для формування понять і їхніх означень.

Примітка. Для виконання цього завдання можна заздалегідь: 1) виконати логіко-математичний аналіз понять «правильний дріб» і «неправильний дріб», проаналізувати логічну структуру означень цих понять; 2) усно розв'язати задачі, поміщені у п. 28.

Особливості системи завдань на засвоєння теореми і її доведення:

1. Наявність завдань на розкриття необхідності знання математичного факту, сформульованого в теоремі.
2. Наявність завдань на актуалізацію математичних фактів, що використовуються при доведенні даної теореми, або фактів, для яких дана теорема є узагальненням, а також на актуалізацію способів доведення, аналогічних тим, що використовуються в даній теоремі (наприклад, методу від супротивного).
3. Наявність завдань на обчислення і доведення або на побудову, які приводять учнів до усвідомлення факту, сформульованого в теоремі.
4. Наявність завдань на засвоєння формулювання теореми.
5. Наявність завдань на засвоєння окремих етапів доведення теореми.
6. Наявність завдань, в ході розв'язування яких повторюється хід доведення теореми (наприклад, при зміненому кресленні).
7. Наявність завдань на відшукання іншого способу доведення факту, сформульованого в теоремі.
8. Наявність завдань на застосування факту, сформульованого в теоремі, для отримання нових математичних фактів, установлення кількісних співвідношень між об'єктами або отримання способів побудови об'єктів.

Завдання, наведені в пропонованій системі під цифрою 1, можуть бути використані для створення проблемних ситуацій. Як і у випадку з системою вправ, направленою на формування понять, наведена система дає можливість для формування навчальних дій, пов'язаних із засвоєнням теорем та їхніх доведень.

Завдання 2. Проаналізуйте задачі №12–23 ([45]) з погляду відповідності вимогам, що пред'являються до системи завдань для засвоєння теорем і їхніх доведень. Додатково розгляньте питання для повторення 8 і 9 ([45]).

Примітка. Заздалегідь необхідно проаналізувати формулювання і доведення теореми про суму кутів трикутника і розв'язати вказані задачі.

Завдання 3. У результаті проведеного аналізу в завданнях 1, 2 дайте відповіді на такі питання:

1. Чи є відповідна система завдань повною (у контексті наявності всіх видів завдань, перерахованих в загальних схемах)?
2. Чому деякі види завдань в аналізованих системах відсутні?
3. Якими задачами дані системи доцільно доповнити?

Наведемо приклад завдання, яке має на меті створення проблемної ситуації у ході вивчення властивостей квадратичної функції.

Задача. Визначити властивості функції $y = ax^2 + bx + c$ та проаналізувати залежність зміни властивостей функції та положення її графіка від коефіцієнтів a, b та c.

Розв'язування задачі розіб'ємо на елементарні етапи. Перш за все з'ясуємо, як змінюються властивості та розміщення графіка функції у залежності від коефіцієнта a та дискримінанта $D = b^2 - 4ac$. Вплив знака коефіцієнта при старшому члені позначається на монотонності функції, проміжках її знакосталості; знак дискримінанта визначає кількість точок перетину графіка функції з віссю абсцис. Комплексний вплив цих параметрів зображено на схемі 4-1.

Проаналізуємо тепер, які коефіцієнти впливають на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі ординат і як вони впливають на зміну властивостей функції. Відомо, що положення графіка функції відносно осі ординат задається першою координатою вершини параболи, а отже, для розв'язання цієї задачі слід аналізувати вплив коефіцієнтів a та b. Розв'язок задачі на цьому етапі зображено на схемі 4-2.

Розв'язання таких вужчих задач дає можливість зробити ряд висновків, що будуть використані у процесі створення повної картини залежності властивостей квадратичної функції від коефіцієнтів у записі її формули.

- Якщо коефіцієнт при старшому члені додатний, то вітки параболи направлені вгору, отже, функція є спадною на проміжку лівіше від $x = -\dfrac{b}{2a}$, і зростаючою на проміжку правіше від $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Якщо коефіцієнт при старшому члені додатний, то знакосталість функції буде залежати від дискримінанта квадратного тричлена: якщо $D > 0$, то функція буде набувати додатних значень при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ та від'ємних значень при $x \in (x_1; x_2)$, де x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена; якщо $D < 0$, то функція всюди буде додатною, а якщо $D = 0$, то функція також буде додатною всюди, крім точки $x = -\dfrac{b}{2a}$ (відповідні висновки робимо і для випадку $a < 0$).

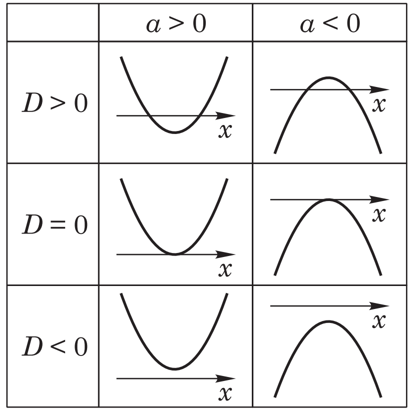


Схема 4-1. Вплив знаків коефіцієнта a та дискримінанта D на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі Ox

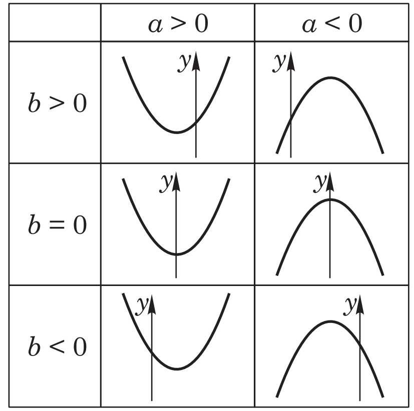


Схема 4-2. Вплив знаків коефіцієнтів a та b на розміщення графіка квадратичної функції відносно осі Oy

- Якщо коефіцієнт b рівний нулю, то вершина параболи знаходиться на осі ординат.
- Якщо коефіцієнти a та b мають однакові знаки, то вершина параболи знаходиться лівіше від осі ординат, в іншому випадку вершина параболи знаходиться правіше від осі ординат.

Але очевидним є факт, що лише вибраними параметрами визначити властивості функції неможливо. Вільний член у записі формули квадратичної функції хоча прямо і впливає лише на визначення точки перетину параболи і осі ординат, але за своєю суттю є «синтезуючим засобом» впливу коефіцієнтів на властивості квадратичної функції. Накладаємо схеми 4-1 та 4-2, «вмикаємо на повну потужність можливості синтезуючого засобу» — вільного члена у записі формули квадратичної функції, — і у результаті отримуємо схему 4-3 (заштрихованими клітинками позначені випадки, що не існують).

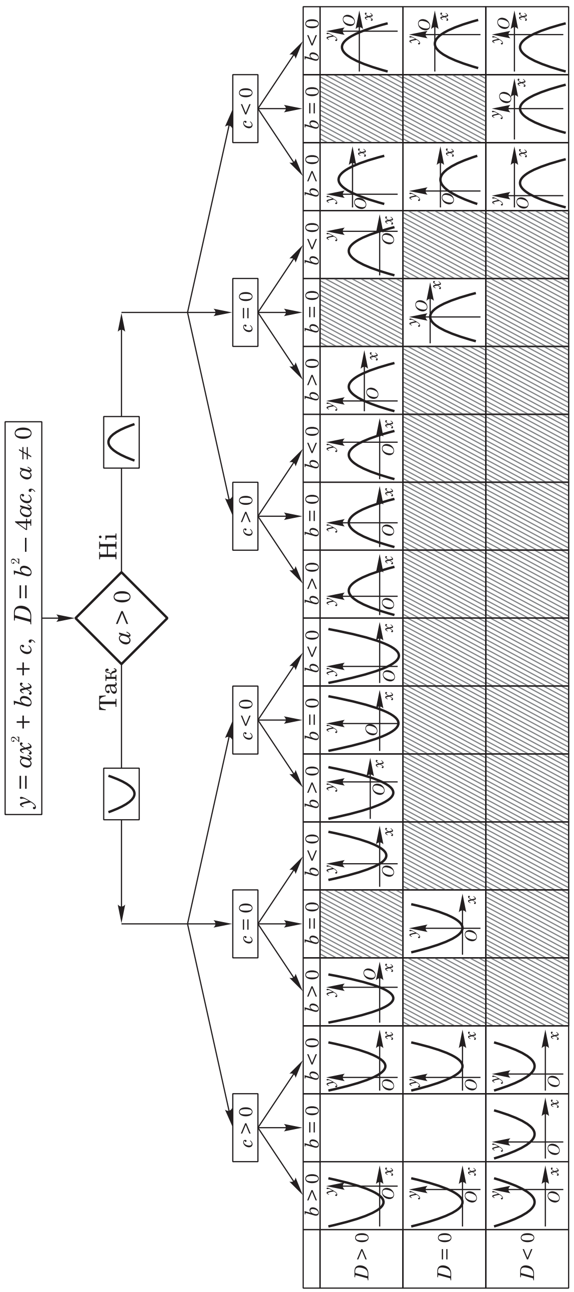


Схема 4-3. Вплив коефіцієнтів a, b і c на розміщення графіка квадратичної функції у системі координат

Особливості системи завдань на засвоєння правил (алгоритмів):

1. Наявність завдань на обґрунтування необхідності розгляду правила.

2. Наявність завдань на актуалізацію знань, необхідних для обґрунтування правил, і умінь, необхідних для виконання правил.

3. Наявність завдань на виконання окремих операцій, що входять до правила (алгоритму).

4. Наявність завдань на застосування правил у різних ситуаціях (знайомих і незнайомих).

Приклад такої системи завдань (вправ) наведений в лабораторній роботі, присвяченій логіко-математичному аналізу алгоритмів і правил.

Відзначимо, що описані системи завдань мають деяку надлишковість. Наявність або відсутність в них завдань деяких видів залежить і від місця вивчення відповідного навчального матеріалу, і від змісту даного матеріалу, і від методичної концепції його вивчення.

Наведемо приклад задачі на застосування правила дослідження квадратичної функції і побудови її графіка методом перетворень з проведенням змістовного узагальнення.

Задача. Визначити властивості функції $y = 2x^2 - 8x + 5$ та побудувати її графік.

Виділяємо повний квадрат і зводимо формулу функції до вигляду:

$$y = 2 \cdot \left(x - 2\right)^2 - 3 .$$

Визначаємо, що графіком функції буде парабола, що за формою повністю співпадає з параболою $y = 2x^2$. Отже, отримати графік функції можна з графіка функції $y = 2x^2$, паралельно перенісши його на вектор $\left(2; -3\right)$. Далі визначаємо інші властивості функції у порядку, який вказаний у загальній схемі дослідження функцій: область визначення та множина значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості, координати вершини параболи, проміжки зростання та спадання. Будуємо графік функції. Ця вправа дає можливість актуалізувати компоненти загального уміння учнів визначати властивості квадратичної функції: виділення у формулі функції повного квадрата, визначення вихідного графіка функції та його вигляду, знаходження вектора паралельного перенесення (координат вершини параболи), відшукання розв'язків відповідного квадратного рівняння та квадратних нерівностей, використання означення спадної (зростаючої) функції для визначення проміжків монотонності функції. Узагальнення такого уміння подається у вигляді схеми 4-4.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\downarrow$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$\downarrow$$

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\downarrow$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\downarrow$$

Будуємо $y = ax^2$

$$\downarrow$$

Переносимо графік на вектор $\overrightarrow{(m;n)}$,

де $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

Схема 4-4

Завдання 4. Розв'яжіть і проаналізуйте опорні задачі з теми «Сума кутів трикутника» [1, 82].

В результаті аналізу дайте відповідь на питання:

1) Які поняття використовуються в опорних задачах?
2) Які факти повинні знати учні для розв'язування цих завдань?
3) У чому відмінність між першою та другою опорними задачами?
4) Чи є серед завдань, поміщених у підручнику, задачі, аналогічні до опорних?
5) Чи однакові за складністю наведені опорні задачі?

Завдання 5. Виконайте аналіз завдання №21 підручника [1]. Для цього:

- встановіть, які знання і уміння учнів перевіряються в кожній задачі завдання 21;

- з'ясуйте, чи охоплюють задачі завдання 21 увесь основний теоретичний матеріал і основні способи діяльності, які формуються при вивченні теоретичного матеріалу;
- встановіть, чи однаковий рівень складності всіх задач завдання 21.

Примітка. Для виконання цього завдання необхідно заздалегідь опрацювати зміст теоретичного і задачного матеріалу відповідного параграфа підручника [1].

Контролювальні задачі найчастіше включаються в самостійні (контролювального характеру) і контрольні роботи. За змістом ці задачі передбачають застосування отриманих теоретичних знань.

Задачі, які включаються в самостійні роботи, зазвичай передбачають застосування знань учнів у знайомих ситуаціях, тобто в таких, з якими учні зустрічалися на попередніх уроках. Відмінною рисою завдань, що включаються в самостійні роботи, є те, що вони охоплюють порівняно невеликий відрізок навчального матеріалу.

Задачі, що включаються до контрольних робіт, зазвичай охоплюють логічно завершений фрагмент навчального матеріалу (матеріал параграфа підручника або цілого розділу). Вони задовольняють такі вимоги:

- направлені на перевірку засвоєння основного (ядерного, стрижневого) матеріалу;
- велика частина задач розрахована на застосування основних понять, математичних фактів, сформульованих у вигляді теорем і наслідків з них, правил у знайомих учням ситуаціях;
- наявність задач на застосування знань в незнайомій ситуації, що вимагає самостійного відшукання шляху розв'язування.

У процесі формування завдань для контрольних робіт та завдань для самостійних робіт слід розглядати сформовані на кожному етапі вміння використовувати знання та уміння як послідовні *рівні навчальних досягнень учнів*. У виданих Міністерством освіти і науки України «Загальних критеріях навчальних досягнень учнів» вони названі відповідно *початковим, середнім, достатнім та високим рівнями.*

Рівень 1 (*початковий*) — первинне розуміння базового теоретичного матеріалу (означень, теорем).

Основними показниками навчальних досягнень є вміння розв'язувати елементарні завдання (із застосуванням одного теоретичного положення):

- на розпізнавання об'єктів, їхніх властивостей, виразів, що відповідають знаходженню числових характеристик;

- на розпізнавання властивостей із виконанням однієї математичної операції;
- на наведення прикладів об'єктів.

Рівень 2 (*середній*) — стандартне застосування базового теоретичного матеріалу за алгоритмами і зразками.

Основними показниками є вміння розв'язувати задачі:

- на безпосереднє застосування теоретичного положення алгоритмічного типу до об'єктів, що вивчаються;
- на розпізнавання об'єкта у відомій, раніше проаналізованій, ситуації і застосування теоретичного положення алгоритмічного типу;
- за відомою схемою із застосуванням властивостей об'єкта;
- на дві логічні дії (підведення об'єкта під поняття і виведення наслідку).

Рівень 3 (*достатній*) — аналітико-конструктивне, логічно обґрунтоване застосування базового теоретичного матеріалу в стандартних, змінених і ускладнених ситуаціях.

Основними показниками є вміння розв'язувати задачі:

- на відтворення теорем на інших рисунках;
- на встановлення логічних відношень між поняттями;
- на застосування відомого прийому, методу доведення;
- з нескладним аналізом умов; з обґрунтуванням застосування теоретичних положень.

Рівень 4 (*високий*) — ускладнене аналітико-конструктивне і евристичне застосування теоретичного матеріалу — означень, теорем і опорних задач підручника в різних ситуаціях.

Основними показниками є вміння розв'язувати задачі на застосування:

- теоретичних знань у логічно і алгоритмічно ускладнених ситуаціях;
- евристичних прийомів;
- прийомів, способів розв'язування, здобутих шляхом самоосвіти.

Завдання 4. Проаналізуйте завдання контрольної роботи, подане нижче, що підсумовує вивчення розділу «Додавання та віднімання многочленів. Множення многочлена на одночлен» (алгебра, 7 клас). Чи відповідають умови задач із контрольної роботи зазначеним вище вимогам до системи контролювальних завдань? Класифікуйте вміння, які необхідно проявити учням під час розв'язання роботи за вказаними 4-ма рівнями.

Завдання контрольної роботи

1°. Знайдіть значення многочлена $3x^2 - x + 2$ при $x = -1{,}1$.

2°. Перетворіть вираз у многочлен стандартного виду:
1) $(5a^2 - 2a - 3) - (2a^2 + 2a - 5)$;
2) $-2x(x^4 - 5x^2 + 3)$;
3) $-10x^6 - 5x^3(x - 2x^3)$.

3•. Розв'яжіть рівняння:
$$3x(2x + 0{,}7) - 4{,}8 = -0{,}3x(1 - 20x).$$

4•. Спростіть вираз і обчисліть його значення, якщо $a = -0{,}4$:
$$7a^2(4a - 5) - 2a(14a^2 - 3).$$

5•. Замість зірочки $*$ запишіть такий многочлен, щоб утворилась тотожність:
$$* - (3x^2 + 2xy + y^2) = 2x^2 - 3xy.$$

6••. Відміннику Віталику треба розв'язати 95 задач, а хорошисту Мишкові — 60. Віталик за день розв'язує 7 задач, а Мишко — 6. Через скільки днів нерозв'язаних задач у Віталика буде вдвічі більше, ніж у Мишка?

Самостійна робота

1. **Складіть систему завдань для формування поняття кратного числа (див. матеріал у [60]) (поняття дільника числа (див. [60]), поняття многочлена (див. [7], [31]), поняття паралелограма (див. [2])), використовуючи задачі підручника і додаткові матеріали.**
2. **Складіть систему завдань для засвоєння та формування умінь використання теореми Піфагора (теореми про вертикальні кути, теореми синусів, теореми Фалеса), використовуючи задачі підручника і додаткові матеріали.**

Література: [1], [2], [7], [8], [17], [24], [31], [32], [38], [39], [40], [46], [47], [50], [52], [59], [60].

Лабораторна робота №5

Методика роботи з текстовими математичними задачами в школі

Мета роботи. Узагальнити знання з теорії розв'язування текстових математичних задач, встановити основні етапи діяльності при розв'язуванні задач, з'ясувати загальні прийоми роботи над задачею як метою вивчення, розглянути методику роботи над сюжетними задачами в курсі математики.

Основний зміст

Навчання математики – навчання розв'язування задач. Зокрема, на заняттях з елементарної математики розглянуті деякі питання теорії задач.

Завдання 1. Дайте відповідь на такі питання:

1. Що таке проблема, проблемна ситуація, задача, розв'язування задачі?
2. У чому суть алгоритмічного методу розв'язування задачі? Наведіть приклади алгоритмів розв'язування задач.
3. Яка суть евристичного методу розв'язування задач і які прийоми пошуку розв'язування задач при цьому використовуються?
4. Охарактеризуйте загальні прийоми пошуку розв'язування задач в посібнику [39] (с. 167–175).
5. Перерахуйте етапи діяльності, пов'язаної з розв'язуванням задач.
6. В чому суть математичного моделювання? Що ви знаєте про використання моделей при розв'язуванні текстових математичних задач?

Різні типи текстових математичних задач вимагають використання різних методів і прийомів розв'язування. Всі методи розв'язування можна розділити на дві групи: алгоритмічні і евристичні.

При розв'язуванні текстових математичних задач, особливо на етапі пошуку розв'язування задач певного класу або пошуку алгоритму для розв'язування завдань нового класу, використовується *евристичний метод*.

Евристика (грец. «відшукання») — це:

- спеціальний метод, що використовується в процесі відшукання нового;
- наука, що вивчає продукт теоретичного мислення;
- висхідний до Сократа (470–399 рр. до н. е.) метод навчання.

При евристичному методі розв'язування найчастіше використовуються наступні прийоми пошуку розв'язування задачі: серії допоміжних завдань, цілеспрямованих спроб, моделювання (складання схем алгоритмів, графів різного рівня, рівнянь, систем рівнянь та ін.).

У діяльності, пов'язаної з розв'язуванням текстових математичних задач, найчастіше виділяють *чотири етапи*.

I. Аналіз задачі, ознайомлення зі змістом задачі.

II. Пошук розв'язання — висунення плану розв'язування задачі.

III. Процес розв'язування — реалізація плану розв'язування.

IV. Перевірка розв'язування, вивчення розв'язаної задачі.

Завдання 2. Дайте відповідь на питання:

1) У чому дидактична цінність сюжетних задач, що розв'язуються в курсі математики V–VI класів?

2) Які способи розв'язування цих задач розглядаються в V–VI класах?

Задачею називають знакову модель проблемної ситуації. Зміст текстової математичної задачі найчастіше є деякою ситуацією, більш-менш близькою до життя. Ці задачі важливі головним чином для засвоєння учнями математичних відношень, для оволодіння ефективним методом пізнання – моделюванням, для розвитку здібностей і інтересу учнів до математики.

Розв'язування задач в V–IX класах здійснюється в основному трьома способами:

- *арифметичним*, при якому всі логічні операції при розв'язуванні задачі проводяться над конкретними числами і основою міркування є знання змісту арифметичних дій;
- *алгебраїчним*, при якому складається рівняння (система рівнянь), розв'язування якого ґрунтується на властивостях рівнянь;
- *комбінованим*, який включає як арифметичний, так і алгебраїчний способи розв'язування.

Робота над будь-якою текстовою математичною задачею починається з аналізу задачної ситуації, повторення та відтворення тексту задачі з числовими даними. Тут може бути використаний прийом евристичної бесіди за умовою задачі, результатом якого буде короткий запис. Короткий запис умови завдання грає істотну роль на етапі сприйняття задачі. Форма запису умови задачі повинна бути компактною: у ній повинно бути відображено тільки те, що необхідне для розв'язування.

Розглянемо приклади.

Задача. Три ділянки загальною площею 360 га засівають житом. Перша ділянка на 120 га менша від другої, яка на 60 га більша від третьої. З першої ділянки зібрали по 26 ц з 1 га, з другої — по 24 ц з 1 га, а з третьої — по 22 ц з 1 га. Скільки центнерів жита зібрали?

Короткий запис умови може бути такий:

Ділянка	Площа, га	Врожайність, ц
I	На 120 менша, ніж II	26
II		24
III	На 60 менша, ніж II	22

Усього — 360 га

Скільки центнерів жита зібрали?

З такого схематичного запису не всі учні можуть виявити співвідношення між даними, які необхідні для осмислення умови задачі. Щоб умова задачі стала зрозуміла учням, учитель організовує діяльність учнів із складання графічної схеми умови задачі (рис. 5-1).

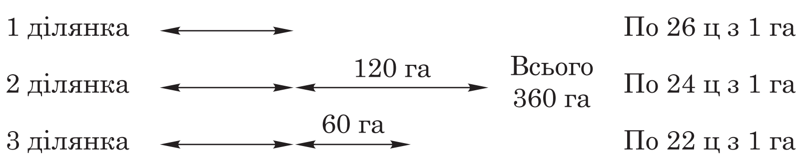


Рис. 5-1

На другому етапі розв'язування задачі вчитель організовує діяльність учнів різними прийомами залежно від цілей, які він ставить при роботі над завданням.

Пошук розв'язання задачі може здійснюватися аналітичним або синтетичним шляхом, але здійснити пошук тільки аналітично або тільки з допомогою синтезу дуже важко. Частіше всього пошук розв'язування сюжетних задач проводиться аналітико-синтетичним шляхом.

Аналіз задачі починається з питань, які задає вчитель учням. Учні підбирають дані, з допомогою яких можна відповісти на поставлені питання. Якщо числових даних в умові немає, то вчитель

ставить нові питання. До цих питань знов підбираються учнями дані задачі або ставляться вчителем нові питання.

Таке «розкладання» умови задачі продовжується до тих пір, поки дійдуть до такого питання, для відповіді на яке всі дані в умові є.

Аналіз може бути записаний як у вигляді таблиці, так і у вигляді «змістовної» схеми, «піднімаючись» по якій від низу до верху приходять до відповіді.

Щоб дізнатися:	Треба визначити:
скільки центнерів жита зібрали	яка площа кожної ділянки, скільки зібрали з 1 га на кожній ділянці (відомо)
яка площа I ділянки	яка площа II і на скільки I менша від II (на 120 га)
яка площа III ділянки	яка площа II і на скільки III менша від II (на 60 га)

«Змістовна» схема пошуку розв'язування може виглядати так (рис. 5-2):

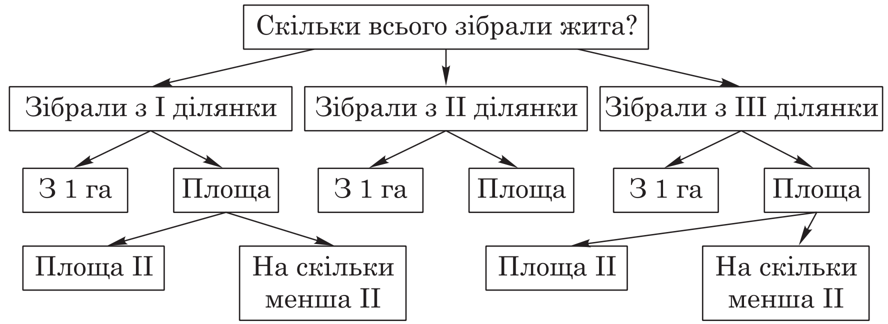


Рис. 5-2

З аналізу отримують план розв'язування задачі. Запис розв'язування залежить від того, який спосіб розв'язування вказаний. Якщо арифметичний, то форми запису можуть бути:

- питання з подальшою дією;
- дія з подальшим поясненням;
- запис розв'язування з попереднім поясненням;
- числове розв'язування без жодного тексту.

При розв'язуванні задачі алгебраїчним способом певне значення має вибір невідомої величини, з допомогою якої можна виразити решту (або частина інших) величин, що входять до задачі, і встановити залежність між даними задачі, яка дасть можливість скласти рівняння. Для багатьох задач за невідоме можна приймати величину, яку потрібно знайти; тоді відповідь на питання задачі отримується без додаткових обчислень.

При розв'язуванні текстових математичних задач часто використовують поєднання арифметичного і алгебраїчного способів розв'язування. Через це форма запису розв'язування кожної частини буде різною.

Завдання 3. Оформіть розв'язування наведеної вище задачі, вибравши алгебраїчний спосіб розв'язування.

При навчанні учнів розв'язуваннятекстових математичних задач алгебраїчним способом доцільно вимагати від школярів проговорювати мотивування складання рівняння. Бажано одну і ту ж задачу розв'язувати, складаючи різні рівняння при виборі за невідоме різні величини, що входять в умову задачі. Такий прийом дозволяє сформувати в учнів уміння мотивувати складання рівняння при розв'язуванні задачі алгебраїчним способом. Отримання декількох розв'язань однієї і тієї ж задачі дозволяє не тільки порівнювати ці розв'язування, але й указувати найбільш раціональне з них.

Особлива увага приділяється перевірці розв'язування задачі. У практиці школи перевірці приділяють достатньо уваги, оскільки вона допомагає з'ясувати, чи правильно зрозуміли учні завдання, чи узгоджується знайдена відповідь з умовою задачі. Учнів слід ознайомити з видами перевірки розв'язування задачі:

- розв'язування задачі іншим способом;
- встановлення факту, чи задовольняє отримана відповідь умову задачі за змістом.

Завдання 4. Підготуйте повідомлення з питання: «Чи завжди потрібна перевірка при розв'язуванні сюжетних завдань?» [24].

Останнім етапом розв'язування задачі є осмислення відповіді і повний її запис.

Розглянемо ще один приклад текстової математичної задачі, розв'язування якої передбачає використання *евристичних алгоритмів* та *модельних перетворень*.

Задача. В річку впадає притока. Катер відходить від пункту A, що знаходиться на притоці, рухається за течією 80 км до впадання притоки у річку в пункті B, а потім рухається вгору по річці до пункту C. На шлях від A до C він затратив 18 годин, а на зворотний шлях — 15 годин. Знайти відстань BC, якщо власна швидкість катера 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год.

Визначимо часткові процеси, з яких складається загальний процес, описаний у задачній ситуації:

- загальний процес повністю визначає рух катера від точки A, через точку B до точки C і, навпаки, від точки C через точку B до точки A (рис. 5-3) — стрілками вказаний напрям течії у притоці та в річці;
- процес, який описує рух катера від точки A через точку B до точки C; процес, який описує рух катера від точки C через точку B до точки A;
- процес, який описує рух катера від точки A до точки B; процес, який описує рух катера від точки B до точки C; процес, який описує рух катера від точки C до точки B; процес, який описує рух катера від точки B до точки A.

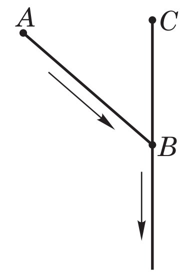


Рис. 5-3. Наочна схематична модель задачної ситуації

Отже, на рис. 5-3 зображена перша модель задачної ситуації у вигляді рисунка чи загальної схеми (*наочно-схематична модель*).

Другою моделлю задачної ситуації буде *ієрархія* умови задачі, яка будується на основі наочно-схематичної моделі. Ця модель зображена на рис. 5-4.

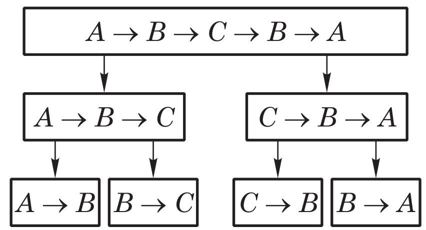


Рис. 5-4. Процесуальна ієрархія структурування задачної ситуації

Перша та друга моделі задачі досить добре відображають структуру задачної ситуації в плані виділення її складових та ієрархічного підпорядкування цих складових. Однак це ще далеко не вся інформація про задачну ситуацію — вказані моделі не відображають зв'язки (залежності) між усіма елементами предметної області задачі. Для більш повного відображення інформації про задачну ситуацію ми пропонуємо створити *структурну модель задачі* — «*матрицю інформації*» про задачну ситуацію.

Опишемо процес побудови матриці інформації, виходячи з умови задачі та перших двох моделей. Рух катера з пункту A через B до C і навпаки, з C через B до A логічно розбити на два етапи. Отже, тут ми використали результати аналізу (розбиття) загального процесу на його складові частини. У свою чергу, вказані часткові процеси (за умовою задачі) в результаті аналізу розбиваються відповідно на більш деталізовані складові (зміст цих процесів описаний вище). Виходячи зі сказаного, «базовий» варіант матриці інформації (структурної моделі задачі) матиме вигляд, зображений на рис. 5-5.

Пояснимо процес її побудови. З умови задачі відомо, що на шляху від A до B, протяжність якого 80 км, катер рухався за течією притоки, значення швидкості течії якої невідоме. Але відомою є власна швидкість катера — 18 км/год. Тому у відповідній комірці матриці позначаємо — 18 + ?. Час руху від A до B невідомий, тому в комірці зазначаємо — ?. Зазначаємо також у матриці інформації існуючий зв'язок: час руху катера від A до B, помножений на швидкість руху катера на ділянці від A до B, дорівнюватиме довжині шляху від A до B. Аналогічно аналізуємо рух від B до C, від C до B, від B до A. Факт затрачання 18 годин та 15 годин на рух відповідно від A через B до C та від C через B до A позначимо на схемі відповідними зв'язками ? + ? = 18 та ? + ? = 15. Факт рівності шляху від B до C та шляху від C до B позначимо на схемі у відповідній комірці ? = ?. Факт рівності значень швидкості течії притоки при русі катера від A до B та від B до A визначимо позначенням цих значень відповідно $?^1$ та $?^2$ та приміткою що $?^1 = ?^2$.

Шлях			80		?	=	?		80		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18+?^1$		18–3		18+3		$18-?^2$		
			×		×		×		×		
Час	18	=	?	+	?		?	+	?	=	15
			процес A→B		*процес B→C*		*процес C→B*		*процес B→A*		
			процес A→B→C				*процес C→B→A*				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 5-5. Структурна модель задачі

У подальшому викладі ми переконаємося, що з використанням такого способу аналізу задачної ситуації вибір змінної величини до задачі є довільним і таким, що не має принципового значення. Позначимо змінною x швидкість течії у притоці. Залишилося «обрати місце розташування» на матриці інформації майбутньої аналітичної моделі задачі — рівняння. Переконаємося, що і цей вибір є довільним, оскільки всі «різні» рівняння, що стали наслідком різних «виборів», будуть еквівалентними. Задамося метою побудувати рівняння на ділянці матриці, яка позначає рівність відстаней від B до C та від C до B: ? = ? (ці комірки на рис. 5-5 зафарбовані). Міркування проводимо так. Щоб знайти відстань від B до C, треба знати час руху від B до C (швидкість руху катера проти течії річки відома – (18–3) км/год), щоб знайти час руху катера від B до C, треба знати час руху катера від A до B (тому що в сумі ці величини дають 18 годин), а щоб знайти час руху катера від A до B, треба шлях від A до B розділити на швидкість катера за течією притоки – а він відомий з урахуванням позначення: $18+x$. Зазначимо, що вказаний шлях міркувань позначений на рис. 5-5 стрілочками. Отже, час руху від A до B дорівнює $\frac{80}{18+x}$, час руху від B до C дорівнює $18-\frac{80}{18+x}$, шлях від B до C дорівнює $15\cdot(18-\frac{80}{18+x})$. Міркуючи аналогічно, знаходимо за «правою частиною» матриці інформації, шлях від C до B, який дорівнює $21\cdot(15-\frac{80}{18-x})$. Отже, рівняння до задачі має вигляд:

$$15\cdot\left(18-\frac{80}{18+x}\right)=21\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right). \qquad (1)$$

Усі ці етапи аналізу спочатку слід відображати на матриці інформації, вписуючи послідовно в міру проведення міркувань замість знаків запитань відповідні вирази (рис. 5-6) і тільки після правильного заповнення всіх комірок матриці інформації можна приступати до побудови та розв'язування аналітичної моделі задачі.

Шлях			80		$15\cdot\left(18-\frac{80}{18+x}\right)$	=	$21\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right)$		80		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18+x$		$18-3$		$18+3$		$18-x$		
			×		×		×		×		
Час	18	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$18-\frac{80}{18+x}$		$15-\frac{80}{18-x}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	15
			процес A→B		*процес B→C*		*процес C→B*		*процес B→A*		
			процес A→B→C				*процес C→B→A*				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 5-6. Побудова рівняння (1) за результатами аналізу матриці інформації

Побудуємо рівняння до задачі в іншому місці матриці інформації — на місці співвідношення ? + ? = 18 (це співвідношення позначає інформацію, що на увесь шлях від A через B до C катер затратив 18 годин). Міркуємо так. Форма ? + ? = 18 у лівій частині містить невідомі доданки – час руху катера від A до B та час руху катера від B до C. Щоб знайти час руху катера від A до B треба відстань від A до B поділити на швидкість катера за течією у притоці. Маємо: $\frac{80}{18+x}$ (годин). Щоб знайти час руху катера від B до C (див. рис. 5-5), треба знати шлях від B до C; щоб знайти шлях від B до C треба знати шлях від C до B (тавтологія, але рухаємося строго за ділянками матриці); щоб знайти шлях від C до B, треба знати час руху катера від C до B; щоб знайти час руху катера від C до B, треба знати час руху катера від B до A; і, нарешті, щоб знайти час руху катера від B до A, треба розділити відстань від B до A на швидкість катера проти течії у притоці: $\frac{80}{18-x}$. Провівши зворотну операцію — операцію синтезу, отримаємо в заданому місці рівняння:

$$\frac{80}{18+x}+\frac{21}{15}\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right)=18. \tag{2}$$

Загальний вигляд матриці інформації після завершення послідовного заповнення її комірок у міру проведення міркувань зображений на рис. 5-7. Зазначимо, що рівняння (1) та (2) є еквівалентними з точністю до тотожного перетворення.

Шлях			80		$21\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right)$	=	$21\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right)$		80		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18+x$		$18-3$		$18+3$		$18-x$		
			×		×		×		×		
Час	18	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$\frac{21}{15}\cdot\left(15-\frac{80}{18-x}\right)$		$15-\frac{80}{18-x}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	15
			процес A→B		*процес B→C*		*процес C→B*		*процес B→A*		
			процес A→B→C				*процес C→B→A*				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 5-7. Побудова рівняння (2) за результатами аналізу матриці інформації

Переконаємося, що з використанням такого способу аналізу задачної ситуації вибір змінної величини до задачі є довільним. Для цього позначимо змінною t час руху катера від B до C. Рівняння задачі побудуємо на вертикалі (див. рис. 5-5): час руху катера від A до B, помножений на швидкість руху катера від A до B, дорівнює відстані від A до B. Міркуємо так (слідкуйте за процесом заповнення

матриці інформації, зображеної на рис. 5-8). Форма згаданої вертикалі є такою: ? · (18 + ?[1]) = 80. Щоб знайти час руху катера від A до B, треба від загального часу руху на ділянці від A через B до C відняти час руху катера від B до C: $18-t$ (годин). Щоб знайти швидкість катера за течією притоки, треба знати швидкість течії у притоці; щоб знайти швидкість течії у притоці (скористаємося інформацією про процес «від B до A», розміщеною у правій частині матриці), треба знати час руху катера від B до A, а для цього треба знати час руху катера від C до B, а для цього, у свою чергу, треба знати відстань від C до B, яку ми можемо знайти як $15t$ (км). Провівши обернену операцію (синтез) отримаємо у заданому місці матриці інформації рівняння (3):

$$(18-t)\left(18+\left(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}}\right)\right)=80\,. \tag{3}$$

Загальний вигляд матриці інформації після завершення послідовного заповнення її комірок у міру проведення міркувань зображений на рис. 5-8.

Шлях			80		$15t$	=	$15t$		80		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18+\left(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}}\right)$		$18-3$		$18+3$		$18-\left(18-\frac{80}{15-\frac{15t}{21}}\right)$		
			×		×		×		×		
Час	18	=	$18-t$	+	t		$\frac{15t}{21}$	+	$15-\frac{15t}{21}$	=	15
			процес A→B		*процес B→C*		*процес C→B*		*процес B→A*		
			процес A→B→C				*процес C→B→A*				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 5-8. Побудова рівняння (3) за результатами аналізу матриці інформації

Зазначимо, що при зміні «замовлення» на розміщення рівняння до задачі ми, як і в попередньому випадку, отримаємо еквівалентні рівняння, які переводяться одне до іншого елементарними тотожними перетвореннями. Так, рівняння (4) позначає факт — шлях руху катера від B до C дорівнює шляху руху катера від C до B (форма ? = ?), рівняння (5) описує факт — на увесь шлях від A через B до C катер затратив 18 годин (форма ? + t = 18). Пропонуємо читачеві самостійно перевірити правильність запису вказаних рівнянь, проаналізувавши та заповнивши відповідні матриці інформації:

$$15t = 21\left(15 - \frac{80}{18 - \left(\frac{80}{18 - t} - 18\right)}\right), \tag{4}$$

$$t + \frac{80}{18 + \left(18 - \frac{80}{15 - \frac{15t}{21}}\right)} = 18\,. \tag{5}$$

Наступний рівень процесуальної ієрархії задачної ситуації визначається двома процесами (див. рис. 5-4). Отже, математичних моделей задачі може бути дві, тому ми можемо розраховувати на дві змінні величини. Врахуємо, що попереднє зауваження з приводу вільного вибору змінних величин та місця розташування на матриці інформації аналітичних моделей задачі залишається справедливим і для цього випадку. Нехай x — швидкість течії притоки, а y — відстань BC. Тоді евристики, що будуть використані у процесі побудови математичних моделей задачних ситуацій, спиратимуться на структурні моделі, що описують рух катера з A через B до C (ліва частина матриці повної інформації — рис. 5-9) та рух катера від C через B до A (права частина матриці повної інформації — рис. 5-9). Очевидно, що процес аналізу обох названих підпроцесів передбачає їх розбиття на складові частини. А саме — рух катера від A через B до C розбиваємо на два процеси: рух катера від A до B та рух катера від B до C. Аналогічно вчиняємо з процесом — рухом катера від C через B до A.

Шлях			80		y	=	y		80		
			‖		‖		‖		‖		
Швидкість			$18 + x$		$18 - 3$		$18 + 3$		$18 - x$		
			×		×		×		×		
Час	18	=	$\frac{80}{18+x}$	+	$\frac{y}{15}$		$\frac{y}{21}$	+	$\frac{80}{18-x}$	=	15
			процес A→B		*процес B→C*		*процес C→B*		*процес B→A*		
			процес A→B→C				*процес C→B→A*				
			процес A→B→C→B→A								

Рис. 5-9. Побудова системи рівнянь (6) за результатами аналізу матриці інформації

Побудуємо рівняння за фактами: на шлях від A через B до C катер затратив 18 годин (форма на рис. 5.5: ? + ? = 18), на шлях від C через B до A катер затратив 15 годин (форма ? + ? = 15). Використавши аналогічні до попередніх міркування, що супроводжуються заповненням матриці інформації (рис. 5-9), маємо систему рівнянь (6), яка і є аналітичною моделлю задачі, побудованою за першим рівнем процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації. Дослідження та розв'язання цієї моделі приведе до виконання вимоги задачі. Отже, маємо:

$$\begin{cases} \frac{80}{18 + x} + \frac{y}{15} = 18, \\ \frac{y}{21} + \frac{80}{18 - x} = 15. \end{cases} \tag{6}$$

Розглянемо наступний рівень процесуальної ієрархії задачної ситуації, який визначатиметься чотирма процесами — рухом від A до B, рухом від B до C, рухом від C до B і рухом від B до A. Очевидно, що майбутня математична модель задачі буде мати вигляд системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Позначимо довільно ці невідомі. Нехай x — швидкість течії притоки, y — відстань BC, z — час руху катера від A до B, t — час руху катера від C до B. Тоді побудова евристичних алгоритмів розв'язування задачі за вказаним рівнем буде відбуватися з використанням структурних моделей, зображених на рис. 5-10.

Відповідно до структурних моделей, зображених на рис. 5-10, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z \cdot (18 + x) = 80, \\ (18 - z) \cdot 15 = y, \\ t \cdot 21 = y, \\ (15 - t) \cdot (18 - x) = 80, \end{cases} \tag{7}$$

розв'язавши яку, прийдемо до знаходження відстані BC, що вимагається запитанням задачі.

Шлях	80	y	y	80
	‖	‖	‖	‖
Швидкість	$18 + x$	15	21	$18 - x$
	×	×	×	×
Час	z	$18 - z$	t	$15 - t$
	процес A→B	*процес B→C*	*процес C→B*	*процес B→A*

Рис. 5-10. Побудова системи рівнянь (7) за результатами аналізу матриці інформації.

Примітка 1. Припущення про рівність кількості процесів, кількості математичних моделей та кількості змінних може бути справедливим не для всіх задач, а лише для тих, у яких вимагається знайти конкретну іменовану величину. Якщо ж у задачі вимагається визначити співвідношення між відповідними іменованими величинами, то кількість змінних може бути на одиницю більшою, ніж кількість математичних моделей (або процесів).

Примітка 2. При порівнянні визначених трьох рівнів (для даної конкретної задачі) процесуальної ієрархії структуризації задачної ситуації очевидною є закономірність: чим нижчий рівень процесуальної ієрархії, тим складнішими для сприймання суб'єктом навчання є евристичні алгоритми, що використовуються у процесі побудови математичної моделі задачі, але тим простішою в контексті розв'язання та дослідження виявляється сама математична модель. Справді, структурна модель задачі, зображена на рис. 5-6, не є очевидною — для її осмислення суб'єкту навчання треба прикласти певні зусилля, але відповідна математична модель — рівняння (1) — є очевидно простішою у дослідженні та розв'язанні, ніж система рівнянь (6) і, тим більше, система (7). Очевидною є і обернена закономірність: чим вищий рівень процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації, тим простішими є евристичні алгоритми побудови математичної моделі задачі і складнішою є сама математична модель у контексті її дослідження та розв'язання.

Таким чином, висловлене вище дозволяє зробити такі висновки.

1. *Евристичний алгоритм процесу розв'язання задачної ситуації* буде складатися з евристик (приписів), що визначатимуть послідовність та процес створення моделей задачної ситуації.

Умова задачі у вигляді тексту є *вербальною моделлю* певної проблемної ситуації і, по суті, задає задачну ситуацію як систему даних і запитання задачі.

Першою евристикою процесу розв'язування задачної ситуації буде створення її системної моделі у вигляді рисунка (*наочно-схематична модель* — рис. 5-3). Така модель відображатиме вихідні дані задачної ситуації у вигляді її складових як системної моделі. Водночас створена модель не відображає ієрархії в задачній ситуації, проблему задачної ситуації (запитання в задачі), зв'язки між складовими системи «задачна ситуація».

Другою евристикою процесу розв'язування задачної ситуації буде створення моделі задачної ситуації у вигляді ієрархії її складових (рис. 5-4). Така модель створюється на основі даних задачі і попередньої наочно-схематичної моделі задачної ситуації й відображатиме ієрархію у системі «задачна ситуація», а не тільки її складові, як це було в попередній моделі. Однак *ієрархічна модель* задачної ситуації не відображає проблему задачної ситуації (запитання задачі) та зв'язки між складовими системи «задачна ситуація».

Третьою евристикою процесу розв'язування задачної ситуації буде створення її моделі у вигляді *матриці* (*таблиці*) *інформації*. Ця модель створюється на основі умови задачі та попередніх двох моделей.

Четвертою евристикою процесу розв'язування задачної ситуації буде створення її *моделі у вигляді рівняння*, яке одержимо з матриці інформації про задачну ситуацію.

2. Використання на етапі реалізації евристичних алгоритмів розв'язування задачі допоміжної структурної моделі у вигляді матриці інформації про задачну ситуацію дає можливість повно і ефективно провести етап матеріалізації розумових дій суб'єкта навчання у зовнішній, розгорнутій формі. Створення структурної моделі у вигляді матриці інформації про задачну ситуацію дозволяє моделювати процес розв'язування задачної ситуації у вигляді етапів такого розв'язання як евристичних алгоритмів. Процес створення матриці інформації про задачну ситуацію є системним підходом до розв'язання задачної ситуації, тому що: а) дає цілісне та детальне уявлення про задачну ситуацію; б) визначає складові частини задачної ситуації згідно з побудованою ієрархією; в) відображає зв'язки між елементами предметної області задачі; г) допомагає скласти розв'язуючу модель задачі.

3. Урахування інформації про рівні процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації та про доцільність використання допоміжних структурних моделей як опори для евристичних алгоритмів дає можливість свідомо та обґрунтовано підійти до аналізу умови текстової задачі, декомпозиції її на окремі процеси (тобто розбиття її на підзадачі), побудови математичних моделей указаних процесів, з'ясування позначень елементів предметної області задачі.

Розглянута методика роботи над текстовою задачею дає можливість формувати в учнів уміння записувати реальні життєві ситуації математичною мовою, що сприяє розвитку логічного мислення, оволодінню операціями мислення – аналізом, синтезом, узагальненням, виховувати такі якості особи, як самостійність, наполегливість і творчість.

Завдання 5. Наведіть зразки короткого запису наступних задач (у вигляді таблиці, графічної моделі). Виконайте графічну ілюстрацію умови задачі, проаналізуйте задачу, запишіть пошук розв'язування задачі у вигляді «змістовної» схеми, розв'яжіть задачу арифметично і алгебраїчно. Для першого способу перевірку зробіть складанням задачі, зворотної даній.

Задача 1. За 18 днів бригада лісорубів у складі 15 чоловік заготовила 972 м^3 дров. Скільки дров заготовить бригада з 12 чоловік за 25 днів при такій же продуктивності праці?

Задача 2. Площа, засіяна вівсом і житом, становить 60 га. Яка площа зайнята кожною культурою, якщо жита зібрали на 440 ц більше, ніж вівса, знімаючи з кожного гектара по 26 ц, а врожайність вівса 30 ц з 1 га?

Задача 3. Радгосп посіяв цукровий буряк за три дні. У перший день засіяли $\frac{13}{25}$ усієї площі, в другий — $\frac{7}{12}$ залишку, в третій день засіяли на 24 га менше, ніж у другий. На якій площі посіяний буряк?

Завдання 6. Розв'яжіть одну із запропонованих задач з використанням евристичних алгоритмів та модельних переходів. Проаналізуйте розв'язування задачі на предмет його варіативності.

Задача 1. Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному із пункту A в пункт B і із пункту B в пункт A. Після зустрічі одному приходиться ще бути в дорозі 2 години, а іншому — $\frac{9}{8}$ години. Визначте їхні швидкості, якщо відстань між A та B дорівнює 210 км.

Задача 2. Три екскаватори зайняті на ритті котловану. Різниця продуктивностей першого та другого екскаваторів утричі більша від різниці продуктивностей третього та другого екскаваторів. Перший екскаватор виконує $\frac{4}{5}$ усієї роботи за деякий час. Такий же час потрібен, якщо спочатку другий екскаватор виконає $\frac{1}{15}$ усієї роботи, а потім третій екскаватор $\frac{9}{28}$ роботи, що залишилася. У скільки разів продуктивність першого екскаватора більша за продуктивність другого екскаватора?

Задача 3. Із пункту A вирушив моторний човен проти течії річки, а з пункту B одночасно вирушив пліт за течією. Через a годин вони зустрілися і далі рухалися без зупинки. Дійшовши до пункту B, човен, не затримуючись, повернув назад і наздогнав пліт у пункті A. Вважається, що власна швидкість човна була весь час сталою. Скільки часу перебували у плаванні пліт та човен?

Задача 4. Двоє велосипедистів виїхали одночасно назустріч один одному з пунктів A і B. Вони рухалися з постійними швидкостями і після прибуття відповідно до B і A відразу ж повернули назад. Перша їхня зустріч відбулася за 8 км від пункту B, а друга — за 6 км від A та через 1 год 20 хв після першої зустрічі. Знайдіть відстань між A і B та швидкості велосипедистів.

Задача 5. Два метали містяться в кожному з двох узятих сплавів. У першому сплаві метали містяться у співвідношенні 1 : 2, а в другому — у співвідношенні 3 : 2. В якому відношенні треба взяти частини цих сплавів, щоб отримати новий сплав із співвідношенням металів 8 : 7?

Задача 6. Два шматки сплаву із масами 6 кг та 8 кг мають різний процентний вміст міді. Від першого шматка відрізали деяку частину, а від другого – частину, у два рази більшу за масою, ніж від першого. Кожну з відрізаних частин сплавили з рештою іншого шматка, після чого дістали два нових сплави з однаковим процентним умістом міді. Яка маса кожної з частин, відрізаних від кожного з шматків початкових сплавів?

Завдання виконайте в аудиторії. Одне із завдань зробіть на прозорій плівці або у вигляді комп'ютерної презентації для подальшого обговорення і перевірки.

Самостійна робота

Опишіть методику роботи над однією з текстових задач з підручників [7], [8], [9], [31], [32], [33]. Оформіть розв'язування задачі різними способами, до одного зі способів дайте запис на прозорій плівці або сценарій мультимедійної презентації.

Література: [7], [8], [9], [24], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [47], [50], [52], [54], [58].

Лабораторна робота №6

Використання моделювання при навчанні математики в загальноосвітній школі

Мета роботи. Актуалізувати знання та уміння студентів про моделювання та його види; розглянути наочні моделі (принцип наочності,функції наочності і правила її підбору, види наочності) та комп'ютерні моделі (пакети прикладних програм для вивчення математики, дослідницький метод та його використання у навчанні математики).

Основний зміст

Поняття про моделювання. *Моделювання* являє собою один з основних методів пізнання, є формою відображення дійсності і полягає в з'ясуванні чи відтворенні тих чи інших властивостей реальних об'єктів, предметів і явищ з допомогою інших об'єктів, процесів, явищ або з допомогою абстрактного опису у вигляді зображення, плану, карти, сукупності рівнянь, алгоритмів і програм.

Можливості моделювання, тобто перенесення результатів, отриманих у ході побудови і дослідження моделі, на оригінал засновані на тому, що модель у визначеному змісті відображає (відтворює, моделює, описує, імітує) деякі цікаві для дослідника риси об'єкта.

У даний час моделювання дуже широко використовується не тільки в наукових дослідженнях, але і при розв'язуванні задач із техніки, економіки, геології, медицини та інших галузей. Тому поняття «моделювання» і «модель» розглядаються в широкому змісті.

Моделлю деякого об'єкта A (оригіналу) називають об'єкт *B*, в деякому відношенні подібний (аналогічний) оригіналу A, вибраний чи спеціально побудований людиною для однієї з поставлених цілей:

1) замінити оригінал *A* в уявній чи реальній дії. Така заміна виконується тоді, коли для дії в даних умовах об'єкт *B* більш зручний (у цьому випадку ми маємо справу з моделлю-замінником);

2) створити уявлення про оригінал *A* з допомогою об'єкта *B* (модель-уявлення);

3) розтлумачити об'єкт *A* у вигляді об'єкта *B* (модель-інтерпретація);

4) дослідити об'єкт *A* з допомогою об'єкта *B* (дослідницька модель).

Зазвичай людина вибирає чи будує модель для однієї з перерахованих цілей, тому вид моделі і визначається цією метою. Але модель може бути використана, як правило, одночасно і для других цілей. Наприклад, для розв'язування текстових задач будуємо модель тієї ситуації, яка відображена в задачі, — рівняння. Це рівняння є дослідницькою моделлю (воно дає можливість установити ряд властивостей, які характеризують дану ситуацію), і моделлю-уявленням (дає нам узагальнене уявлення про розглядувану задачу), і моделлю-інтерпретацією (рівняння на мові алгебри фіксує і пояснює суттєві особливості наявної у задачі ситуації).

Говорячи про моделювання, мають на увазі діяльність з побудови (або вибору) моделей до вказаних вище цілей.

Моделі класифікують, виходячи з найбільш істотних ознак об'єктів. Цими ознаками є:

1) закон функціонування і характерні особливості вираження властивостей і відношень оригіналу;

2) основи для перетворення властивостей і відношень моделі у властивості і відношення оригіналу.

Моделі можна розділити:

- за першою ознакою на *логічні* (за законами логіки у свідомості людини) і *матеріальні* (за об'єктивними законами природи) моделі;
  – у свою чергу, логічні моделі поділяються на *образні*, *знакові*, *образно-знакові* (змішані) моделі;
  – матеріальні моделі — на *функціональні*, *геометричні*, *функціонально-геометричні* моделі;
  – функціональні і функціонально-геометричні моделі в залежності від фізичної однорідності і різнорідності з оригіналом розділяються на *фізичні* і *формальні*;
- за другою ознакою розрізняють *умовні* (на підставі умови чи угоди), *аналогові* (на підставі умовиводу за аналогією, неперервні) і *математичні* (математичні методи вираження) моделі.

Математичне моделювання є основним прийомом розв'язування математичних задач. Вид і характер моделювання визначаються головним чином характером сформованих в учня умінь та навичок оперування вивченим матеріалом, відпрацьованих евристичних схем пошуку розв'язання і характером самої задачі. Будемо у подальшому викладі розуміти *математичну модель* як спеціальний опис деякої проблеми, ситуації, який дає можливість у процесі її аналізу застосувати формально-логічний апарат математики.

При *математичному моделюванні* маємо справу зі знаковою системою (наприклад, у вигляді графічної схеми), яка в математичній формі виражає основні закономірності, властивості об'єкта, що вивчається. У процесі математичного моделювання виділяють три етапи: 1) формалізація — переклад запропонованої задачі (ситуації) на мову математичної теорії (побудова математичної моделі задачі); 2) розв'язування задачі всередині математичної моделі, результатом якого буде або нова модель задачі, або кінцева відповідь; 3) транслювання результату математичного розв'язання задачі на ту мову, на якій була сформульована задача (інтерпретація одержаного математичного розв'язку).

Отже, під процесом *розв'язування математичної задачі* будемо розуміти процес послідовної побудови нових моделей задачної ситуації певної задачі, причому кожна нова модель задачі буде мати меншу невизначеність, ніж попередня.

Комп'ютерне моделювання. Основні *фактори методичного та методологічного впливу використання інформаційно-комп'ютерних технологій* (ІКТ) (у контексті реалізації можливостей комп'ютерного моделювання) на еволюцію математичної освіти можна визначити так:

1. ІКТ є складовою частиною забезпечення інтеграції змісту шкільної математичної освіти.
2. ІКТ є одним із чинників забезпечення організації навчання розв'язування математичних задач з використанням моделей та модельних переходів.
3. ІКТ є складовою забезпечення реального застосування теоретичних положень шкільного курсу математики у площину розв'язування практичних задач.
4. ІКТ є чинником забезпечення інтеграції математичних знань із загальними науковими, енциклопедичними та популярними знаннями про інформацію.
5. ІКТ стають одним із найважливіших чинників реалізації принципів дидактики — науковості, доступності, системності, наочності та фундаментальності, інтеграції знань, активізації пізнавальної діяльності учнів.
6. ІКТ розширюють можливості для розв'язування нових класів задач, які без застосування ІКТ розв'язати неможливо у межах «класичної математики».

Серед різноманіття комп'ютерних програм, розроблених для розв'язування з допомогою комп'ютера широкого кола математичних задач різних рівнів складності, найбільш придатними видаються програмні засоби, які розраховані на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вищих навчальних закладів, що лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики. Це GRAN2, GRAN3, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія). Для їх використання не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. Названі програми прості у користуванні, оснащені досить зручним інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), контекстно-чутливою допомогою. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів загальноосвітніх шкіл.

Функції наочності. *Наочність навчання* — один із принципів дидактики.

Застосування наочності при навчанні математики має коріння в теорії пізнання і узгоджується з методологією математики.

Можна умовно виділити три *етапи пізнання*: *сприйняття, уявлення і абстрактне мислення*. Умовно процес пізнання можна розбити на *два ступені*: *чуттєвий* (сприйняття і уявлення) і *логічний* (перехід від уявлення до поняття з допомогою узагальнення і абстрагування). Чуттєвий ступінь відповідає першому етапу шляху пізнання, і тут роль наочності важлива: вона використовується для здобуття знань про зовнішні властивості математичних об'єктів, про взаємозв'язок об'єктів, про їх схожість і відмінність. На третьому етапі пізнання наочність дає можливість показати учням глибинні зв'язки між властивостями математичних об'єктів, створити правильні образи.

Основним правилом підбору і використання наочності психологи вважають виявлення дій, які мотивуватимуть в учнів засоби наочності, і визначення дій, які повинні виконувати учні, щоб свідомо опанувати навчальний матеріал.

У своїй роботі вчитель повинен мати на увазі, що засоби наочності мають різні функції в процесі навчання.

Відбираючи засоби наочності до уроку, вчитель повинен ясно уявляти, яку саме функцію ця допомога повинна виконувати в навчальному процесі, яку роль вони повинні зіграти в розв'язуванні навчальних задач.

Основними *видами наочності*, які знаходять широке застосування в навчанні математики, є:

- натуральна наочність;
- образотворча наочність;
- символічна наочність.

Основні *ознаки наочності при навчанні математики* наведені в [39], [40], [50]. Це правильне ізоморфне відображення істотних рис явища та простота сприйняття.

Ізоморфізм — відповідність між об'єктами, що виражає тотожність їхніх структур.

Основні моделі, що використовуються в навчальному процесі

1. Таблиці. Одним з найпоширеніших засобів наочності є таблиці, які несуть різне смислове навантаження. Одні з них можна віднести до образотворчої наочності (малюнки, фотографії й ін.), інші — до символічної наочності (графіки, креслення, схеми, діаграми тощо).

Таблиці, які використовуються при виробленні умінь і навиків, отримали назву *робочих таблиць*; наприклад, при вивченні властивостей функцій доцільно зіставляти аналітичний запис властивості із зображенням його графічно. До робочих таблиць слід віднести таблиці, на яких дано схеми алгоритмів, графи.

Використання схем алгоритмів у навчанні дає можливість організувати самостійне вивчення окремих питань теми, систематизувати знання учнів при повторенні, показати взаємозв'язки різних розділів курсу математики, встановити міжпредметні зв'язки й ін.

Широко застосовуються і *довідкові таблиці*: таблиці квадратів, кубів, натуральних чисел тощо.

Завдання 1. 1) Складіть робочу таблицю, що показує можливі положення графіка квадратичної функції залежно від коефіцієнтів a, b і c в заданні функції $y = ax^2 + bx + c$. 2) Складіть таблицю для можливих значень суми двох чисел a і b з урахуванням їх знака і модуля.

2. Магнітна дошка. Частина класної дошки, покрита листом металу, і набір магнітів, з допомогою яких кріпляться фігури на дошці, називаються магнітними засобами навчання. Легке кріплення

фігур, вільне їхнє переміщення створюють специфіку використання таких фігур і важливі дидактичні можливості. Кожен учитель може виготовити магнітні засоби і використовувати їх у навчанні.

Завдання 2. Магнітну дошку покрийте координатною сіткою і з допомогою металевих шашок проілюструйте швидке отримання основних точок графіків лінійної, квадратичної функцій. Які можливі ефективні випадки використання магнітної дошки?

3. **Зошит з друкованою основою** характеризується дидактичною спрямованістю дій, які повинен виконати учень, щоб отримати результат. Учень виконує серію завдань, в яких ступінь його самостійності росте. Це дає можливість формувати необхідне уміння і привчати школяра до прийнятої форми запису, індивідуалізувати роботу, здійснювати диференційований підхід.

Завдання 3. Запишіть многочлен $11a^2 - 7a^2 - 5ay - ay^2$ у вигляді різниці двох многочленів.

Розв'язування:

а) $11a^2 - 7a^2 - 5ay - ay^2 = (11... - 7 ...) - (5 ...)$;

б) $11a^2 - 7a^2 - 5ay - ay^2 = (-5ay - ay^2) - (...)$;

в) ... ; г) ... ; д) ... .

Всього ... розв'язків. Чи існують інші розв'язки?

Відповідь: ... (*так, ні*).

Іншим прикладом засобів навчання, що забезпечують облік індивідуальних особливостей учнів, є **картки із завданнями**.

4. Об'ємні моделі геометричних фігур. Усі розглянуті вище засоби наочності є площинними зображеннями. Існують ще об'ємні **моделі геометричних тіл і прилади**. Моделі геометричних тіл можуть бути картонними (скляними), дерев'яними, каркасними. Всі моделі дають можливість правильно формувати просторове уявлення, що грає важливу роль у вивченні стереометрії.

5. Кодопозитиви. Матеріали, які показують через кодоскоп, називають кодопозитивами. Вони аналогічні діапозитивам. Використання кодопозитива є можливим при актуалізації знань, при проведенні усного рахунку (в цьому випадку один з учнів пише відповіді на плівці), при побудові перерізів многогранників і т. ін.

Оскільки кодопозитиви централізовано не виготовляються, то вчителеві необхідно володіти «технологією» виготовлення якісних кодопозитивів, що дають можливість ефективно їх використовувати в навчальному процесі. Тому необхідно опанувати уміннями з виготовлення кодопозитивів.

Завдання 4. Виконайте всі послідовні етапи виготовлення кодопозитивів.

1. На листі міліметрівки (або на папері в клітинку) накресліть прямокутник, що обмежує розміри майбутнього кодопозитива. Усередині цього прямокутника розташуйте креслення або текст, який повинен бути перенесений на прозорий матеріал.
2. Для виготовлення кодопозитива лист прозорої плівки накладіть на приготовлене креслення і щільно притисніть, протираючи м'якою тканиною (плівка електризується і «прилипає» до паперу).
3. Для виконання креслень і написів на прозорій плівці зручно використовувати пера типу «Редиска» або рейсфедер. Проводячи прямі лінії, слід використовувати лінійку з «відкосом» або дві лінійки, накладаючи їх одну на одну так, щоб утворився «козирок». Краще всього працювати тушшю «Кальмар». Допущені помилки можна усунути, акуратно знімаючи туш вологою ватою, туго намотаною на сірник. На поліетиленовій плівці креслення і написи можна виконувати кульковою ручкою, використовуючи пасту різних кольорів.
4. Якщо планується виготовлення серії кодопозитивів, які послідовно накладатимуться один на одного, то потрібно нарізувати однакові листи плівки і продумати спосіб акуратного поєднання зображень (наприклад, можна проколоти голкою в кутках усю пачку плівок разом із кресленням; тоді кожну плівку можна буде прикріплювати до креслення кнопками, суміщаючи проколи). При виконанні серії кодопозитивів на кожен наступний лист плівки наносяться лише додаткові лінії, що не повторюють того, що було на попередніх кодопозитивах. Серію кодопозитивів зручно скріпляти зошитом (зшити або використовувати скріпки). Показ починається з останньої сторінки, її зручно притиснути склом. Можна в кожному кодопозитиві пробити отвір, відповідний розташуванню штифтів кодоскопа. Тоді кодопозитиви нанизуються на ці штифти, забезпечуючи хороше поєднання зображень.

6. Комп'ютерні моделі. Розкриємо на прикладі використання програми «Advanced Grapher» методичний та методологічний впливи використання інформаційно-комп'ютерних технологій на забезпечення організації навчання розв'язування задач із використанням моделей і модельних переходів та на забезпечення можливостей розв'язування нових класів задач, які без застосу-

вання ІКТ розв'язати важко, а то й неможливо у межах «класичної математики».

Задача. Для параметра a знайти розв'язки нерівності $x^{\sin x - a} \le 1$.

Традиційний підхід розв'язування цієї нерівностіполягає у розгляді випадків:

1. Якщо $0 < x < 1$, то $\sin x \ge a$. Звідси, після ретельного аналізу ситуації на одиничному колі, ідея подальшого розв'язання для цього випадку може виглядати так:

$$x \in \begin{cases} (0;1) \text{ при } a \le -1, \\ \left[\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k\right] \cap (0;1) \text{ при } -1 < a \le 1, \\ \varnothing \text{ при } a > 1. \end{cases}$$

2. Якщо $x > 1$, то аналогічно аналізуємо випадок $\sin x \le a$.
3. Якщо $x = 1$, то $a \in R$ (тобто пара $(1, a)$ завжди буде розв'язком нерівності).

Розв'яжемо дану вправу лише з використанням названого вище пакета та елементарних досліджень. В AG вибираємо «Добавить график», вибравши варіант «f(x,y)>|=|<0» — «уравнение или неравенство». В полі «формула» записуємо ліву частину нерівності, попередньо перенісши праву частину нерівності вліво, тобто привівши до вигляду $x^{\sin x - a} - 1$, і нижче вибираємо «f(x,y) < 0». В AG немає можливості побудови графіків нестрогих нерівностей, тому в полі «формула», повторивши процедуру, вводимо ліву частину нерівності і вибираємо «f(x,y) = 0» Натиснувши ОК, отримаємо ілюстрацію, зображену на рис. 6-1 (тут заштрихована область − це множина точок площини, що задовольняють нерівність $x^{\sin x - a} - 1 < 0$, а лінії $x = 1$ та $a = \sin x$ зображають множину точок площини, що є розв'язками рівняння $x^{\sin x - a} - 1 = 0$). Відмітимо, що перейменування осей, яке видно на рис. 6-1, здійснено в контексті оформлення ілюстрації розв'язування задачі графічними засобами самої програми AG. Фактично, заштрихована область та її межа (див. рис. 6-1) і є розв'язком задачі. Отриманий наочний розв'язок слід лише транслю-

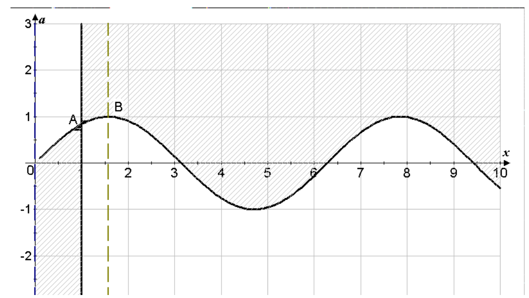


Рис. 6-1

вати в аналітичний. Для цього рухаємо уявну пряму $a = \alpha$ знизу вгору вздовж осі Oa та описуємо отриману при цьому множину розв'язків вихідної нерівності. Отже, розв'язок задачі буде таким:

$$x \in \begin{cases} (0;1] \text{ при } a \in (-\infty; -1), \\ (0;1] \cup [\pi + \arcsin a + 2\pi k;\ 2\pi - \arcsin a + 2\pi k] \text{ при } -1 \le a \le 0, \text{ де } k = 0;1,2;..., \\ [\arcsin a;\ 1] \cup [\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ 2\pi + \arcsin a + 2\pi k] \text{ при } 0 < a \le \sin 1, \text{ де } k = 0;1,2;..., \\ [1; \arcsin a] \cup [\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ 2\pi + \arcsin a + 2\pi k] \text{ при } \sin 1 < a < 1, \text{ де } k = 0;1,2;..., \\ [1; +\infty) \text{ при } a \ge 1. \end{cases}$$

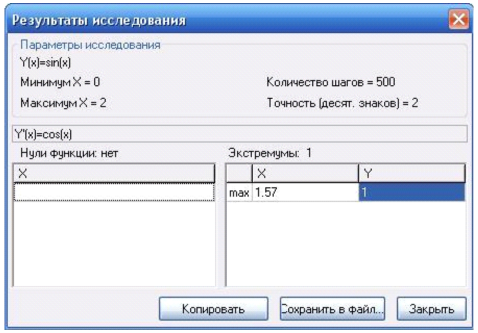


Рис. 6-2

Зазначимо, що точка A на рис. 6-1 має очевидні координати в радіанах $(1; \sin 1)$, для знаходження координат точки B здійснимо елементарне дослідження з використанням похідної функції $y(x) = \sin(x)$ через меню «результаты исследования» (рис. 6-2) — маємо, що точка B має наближені координати $(1{,}57; 1)$. Відзначаємо слабкість пакета (та й не тільки саме цього пакета, а й багатьох інших пакетів програм) у контексті точності саме таких обчислень (у пакеті є можливість задавати точність обчислення до 6 знаків після коми, але яку б точність не задавали, комп'ютер не може ідентифікувати це число з $\frac{\pi}{2}$), тому виправляємо «помилку» — $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Після отримання загального розв'язку задачі досить легко розв'язати і задачу з конкретизованими даними (наприклад, указати розв'язки із проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$). Для цього на рис. 6-1 додамо до зображення ліній $x = 0$ та $x = \frac{\pi}{2}$, що демонструватимуть межі, в яких будемо шукати розв'язки нерівності. Для отримання аналітичної відповіді на задачу використовуємо попередній метод — рухаємо уявну пряму $a = \alpha$ знизу вгору вздовж осі Oa та описуємо отриману при цьому множину розв'язків вихідної нерівності. Отже, відповідь:

$$x \in \begin{cases} (0; 1] \text{ при } a \in (-\infty; 0], \\ [\arcsin a; 1] \text{ при } a \in (0; \sin 1), \\ 1 \text{ при } a = \sin 1, \\ [1; \arcsin a] \text{ при} (\sin 1; 1), \\ \left[1; \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } [1; +\infty). \end{cases}$$

Покажемо можливості використання подібних пакетів програм у контексті розвитку творчості учнів. Можна спробувати змінити умову задачі. Наприклад, так: *Для будь-якого a знайти розв'язки нерівності $x^{\sin x - a} \le 2$, що належать інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.*

Незважаючи на те, що зміни в умові є незначними (ми у правій частині нерівності 1 замінили на 2), проте у розв'язуванні та у розв'язках зміни будуть колосальні (для початку ми пропонуємо виконати дану вправу аналітично — сміливо прогнозуємо досить серйозні утруднення при її розв'язуванні). Таку нерівність без ІКТ розв'язати практично неможливо. Спробуємо проаналізувати зміни, що сталися, з використанням згаданого вище пакета. Використавши ті ж самі прийоми перетворення нерівності, введення формули її лівої частини, встановлення меж побудови графіка рівняння та строгої нерівності від −1 до 10 по осі Ox (ми пізніше пояснимо причину саме такої побудови) та від −5 до 5 по осі Oy, побудови ліній $x = 0$ та $x = \frac{\pi}{2}$ (що демонструють межі, в яких ми будемо шукати розв'язки нерівності), отримаємо зображення (рис. 6-3). Зазначимо

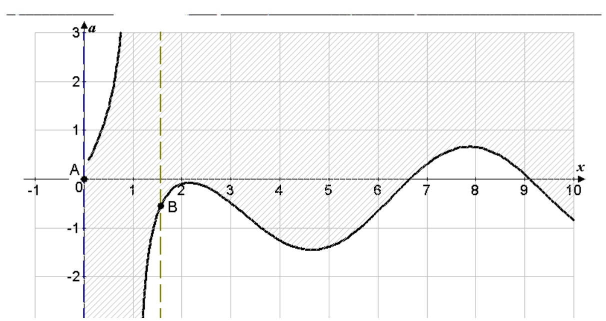


Рис. 6-3

координати вказаних на рисунку точок: $B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\log_2 \pi - 2}{\log_2 \pi - 1}\right)$, $A(0; 0)$. Поясними ці факти.

Для знаходження другої координати точки B треба розв'язати рівняння: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}-a} = 2$, або $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-a} = 2$. Отже: $a = 1 - \log_{\frac{\pi}{2}} 2 = \frac{\log_2 \pi - 2}{\log_2 \pi - 1}$.

Обґрунтуємо координати точки A, до якої необмежено наближається графік рівняння $x^{\sin x - a} = 2$. Справді:

$$(\sin x - a)\cdot \log_2 x = 1, \text{ або } a = \frac{\sin x \cdot \log_2 x - 1}{\log_2 x} = \sin x - \frac{1}{\log_2 x}.$$

Очевидно, що про $x \to 0^+$ значення $a \to 0^+$. Відмітимо недолік названого пакета, від якого ми так і не добилися (див. рис. 6-3) правильної побудови графіка рівняння $x^{\sin x - a} = 2$ біля точки $x = 0$.

Нарешті уточнимо, що лінія $x = 1$ є вертикальною асимптотою графіка функції $a = \sin x - \frac{1}{\log_2 x}$ (оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin x - \frac{1}{\log_2 x}\right) = \infty$), а, отже, графік рівняння $x^{\sin x - a} = 2$ її не перетинає (значення змінної $x = 1$ буде розв'язком нерівності при будь-якому значенні параметра).

Тепер, виходячи з аналізу рис. 6-3 і використовуючи вже описаний спосіб отримання аналітичного розв'язку, можемо записати відповідь до даної зміненої вправи:

$$x \in \begin{cases} (0; x_0] \text{ при } a \in \left(-\infty; \frac{\log_2 \pi - 2}{\log_2 \pi - 1}\right), \\ \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } a \in \left[\frac{\log_2 \pi - 2}{\log_2 \pi - 1}; 0\right], \\ \left[x_0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } a \in (0; +\infty), \end{cases}$$

де x_0 є розв'язком рівняння $(\sin x - a)\cdot \log_2 x = 1$, причому $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Звертаємо увагу на складність (тобто, неможливість) «формульного» розв'язання рівняння $(\sin x - a)\cdot \log_2 x = 1$ у загальному випадку. Але при конкретному значенні параметра a його розв'язок можна знайти наближено з використанням згаданого вище пакета. Тому складна задача у будь-якому разі буде розв'язана. Крім того, звертаємо увагу на накладене обмеження на змінну x у контексті знаходження розв'язку ($x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$). З рис. 6-3 бачимо, що розв'язки ми можемо «знайти» для всіх значень змінної x. Знайти ж їх легко графічно, але досить складно записати аналітично у загальному випадку. Це пов'язано, у першу чергу, з неперіодичністю функції $a = \sin x - \frac{1}{\log_2 x}$. Але, з іншого боку, графічна ілюстрація та вказаний спосіб розв'язування таких вправ дасть можливість учневі (студенту, суб'єктові навчання) правильно зорієнтуватись у ситуації невизначеності в контексті її конкретизації та розв'язання.

Завдання 5. Складіть та реалізуйте план «комп'ютерного» розв'язання нерівності з параметром:

$$(a-1)\cdot x^2 + a\cdot x - (3a+1) \ge 0.$$

Порівняйте запропонований спосіб розв'язання з аналітичним.

Самостійна робота

1. **Виготовіть серію кодопозитивів, вибравши один із запропонованих варіантів (як альтернативне завдання — замість кодопозитивів можете виготовити презентаційні матеріали з використанням одного з відомих вам презентаційних середовищ). Розробіть методику роботи з ними на уроці.**

Варіанти завдань.

- Кодопозитиви із завданнями для усної роботи для актуалізації знань (виберіть тему, продумайте форму перевірки відповідей).
- Варіанти короткого запису умови або моделей, що використовуються для розв'язування текстової задачі (виберіть задачу, продумайте форму запису).
- Завдання для письмової самостійної роботи на уроці з подальшим аналізом і перевіркою.
- Серія кодопозитивів поетапної побудови креслення до теореми або задачі (підберіть задачу, продумайте питання до виконання додаткових побудов).
- Кодопозитиви завдань з пропусками (з вибірковою відповіддю).

2. **Розробіть методику розв'язання та дослідження нерівності $(a+1)\cdot x^2 + a\cdot x - (3a-1) \ge 0$ на уроці.**

Література: [3], [4], [5], [8], [9], [17], [24], [26], [32], [33], [38], [39], [40], [47], [50], [52], [53], [54].

Лабораторна робота №7

Форми, способи та засоби контролю й оцінки знань і умінь учнів. Норми оцінювання. Вимірювання навчальних досягнень учнів

Мета роботи. Виділити види, форми, засоби контролю знань і умінь учнів; встановити вимоги до контролю знань і умінь учнів; встановити, в чому полягають підготовка вчителя до контрольної роботи і аналіз результатів такої роботи. Встановити основні закономірності вимірювання навчальних досягнень учнів.

Основний зміст

Контроль знань і його типи. Про контроль знань і умінь можна говорити, маючи на увазі наступне.

З погляду зовнішньої структури організації процесу навчання контроль — це частина процесу навчання. Відомо, що будь-яка повноцінна діяльність, у тому числі і навчання, складається з трьох частин: орієнтування, виконання і контролю.

З погляду внутрішньої суті *контроль* — це виявлення і порівняння (на певному етапі навчання) результату навчальної діяльності з вимогами, які задаються до цього результату програмою (інакше, це — співвідношення досягнутих результатів із запланованими цілями навчання). Причому контроль знань і умінь конкретного учня передбачає оцінку цих знань і умінь тільки за наслідками його особистої навчальної діяльності.

Залежно від того, хто саме здійснює контроль за результатами діяльності учнів, виділяють наступні три *типи контролю*:

- зовнішній (здійснюється вчителем над діяльністю учня);
- взаємний (здійснюється учнем над діяльністю товариша);
- самоконтроль (здійснюється учнем за власною діяльністю).

Основна мета контролю знань і умінь полягає у виявленні досягнень, успіхів учнів, через призму яких розглядаються недоліки в здійсненні навчальної діяльності, пропуски в знаннях і т.ін. ; у вказівці шляхів вдосконалення, поглиблення знань, умінь з тим, щоб створювалися умови для подальшого включення школярів в активну творчу діяльність.

Конкретизація цієї мети пов'язана з:

- установленням якості засвоєння учнями матеріалу, передбаченого програмою з математики для середньої школи (встановлення повноти, характеру виконання учнями завдань вчителя; виявлення відповідності досягнутого школярами рівня оволодіння матеріалом, що вивчається, прийнятим нормам або зразкам);
- визначенням заходів коректування знань і умінь учнів;
- навчанням школярів прийомів взаємоконтролю і самоконтролю, формуванням потреби в самоконтролі;
- вихованням ряду якостей особи, наприклад, відповідальності за виконувану роботу, ініціативи й ін.

Якщо перераховані цілі контролю знань і умінь учнів реалізовані, то можна говорити про те, що контроль виконує наступні *функції*:

- виявлення і діагностика результатів навчання (іноді говорять про контролювальну і діагностичну функції);
- освітню (навчальну), пов'язану з підвищенням якості засвоєння знань, їх систематизацією, формуванням прийомів навчальної роботи;
- стимулювальну (розвивальну), пов'язану зі створенням необхідної основи для стимулювальних змістовних оцінок діяльності учнів, для розвитку пізнавальної активності школярів;
- виховну, направлену на виховання у кожного відчуття відповідальності за результати учіння, на формування пізнавальної мотивації;
- управління процесом засвоєння знань, умінь, його корекції (іноді цю функцію називають прогностичною, маючи на увазі можливість отримання в процесі випереджального контролю, носить ймовірнісний характер інформації про деякі особливості навчально-виховного процесу).

У процесі контролю знань і умінь учнів виділяються наступні компоненти:

- уточнення цілей вивчення даного фрагменту навчального матеріалу і встановлення конкретного змісту контролю;
- вибір видів, форм, способів і засобів контролю, відповідних поставленим цілям;
- різні способи вираження результатів контролю: оцінка і відмітка.

Розглянемо перший з указаних компонентів. Установлення конкретного змісту контролю залежить від цілей вивчення даного фрагменту навчального матеріалу і пов'язане з означенням, по-перше, інформаційно-наочного складу того знання, яке повинне бути сформоване (поняття, факти, теореми, алгоритми, методи), тобто з виділенням об'єктів контролю; по-друге, операційного складу цього знання, тобто з вказівкою тих дій, у процесі виконання яких учнями і повинне виявлятися засвоєння того або іншого об'єкта контролю.

Як описати цілі і зміст, щоб вони слугували основою для розробки засобів, завдань і т. ін., для контролю знань і умінь учнів?

Можна вказати різні підходи до такого опису. Розглянемо два з них.

Перший пов'язаний з визначенням тих якостей, які повинні бути властиві сформованим в результаті навчання знанням і умінням учнів: повнота, глибина, узагальненість, усвідомленість і ін. Для контролю знань спеціально розробляються такі засоби, реалізація яких виявляє наявність або відсутність наперед зафіксованих якостей.

Завдання 1. Розробіть систему вправ, на основі виконання яких можна перевірити, чи достатньо повно засвоєне учнями правило додавання звичайних дробів.

Наприклад, для перевірки якості засвоєння правила множення десяткових дробів може бути використаний наступний набір вправ:

$$18{,}7 \cdot 13{,}4;\ 18{,}75 \cdot 1{,}4;\ 15 \cdot 1{,}3;\ 0{,}3 \cdot 0{,}5;$$
$$0{,}075 \cdot 0{,}2;\ 3{,}45 \cdot 1600.$$

Другий підхід до опису цілей вивчення певного відрізка навчального матеріалу пов'язаний з визначенням рівнів засвоєння знань і відповідних їм видів діяльності. Відомо, що психологи виділяють наступні рівні засвоєння: пізнавання, запам'ятовування, відтворення матеріалу; розуміння і використання в схожій з уже розглянутою ситуації; самостійне перетворення матеріалу, перенесення знань на розв'язування широкого кола задач, у нову ситуацію.

Завдання 2. Розробіть завдання для перевірки вивчення способів розв'язування квадратних рівнянь на рівні застосування в знайомій ситуації і на рівні перенесення знань у нову ситуацію.

Залежно від вимог програми вчитель повинен наперед планувати той рівень засвоєння знань, який підлягатиме контролю, і ставити до відома про це учнів.

Відмітимо, що дані про обов'язкові результати навчання, що публікуються на сторінках журналу «Математика в школі», вказують той рівень засвоєння математичного матеріалу, який вважається мінімально допустимим і відповідає задовільному засвоєнню знань і умінь.

Види, форми і засоби контролю. Залежно від різних цілей можна говорити про різні підходи до визначення *видів контролю*.

Наприклад: 1) Якщо в процесі контролю основну увагу приділяти діяльності контрольованого суб'єкта, то виділяються: контроль за кінцевим результатом (звертаємо більшу увагу не на хід, склад діяльності, а на її результат); покроковий контроль (стежимо за виконанням окремих операцій, які визначають ту або іншу дію); контроль, пов'язаний зі встановленням певних параметрів діяльності. Очевидно, з погляду навчального ефекту оптимальнішим є покроковий контроль, оскільки в його процесі учень усвідомлює суть і характер діяльності.

2) За місцем у процесі навчання можна виділити наступні види контролю знань і умінь учнів: поточний (здійснюється в ході процесу учіння школярів); підсумковий з теми (тематичний); підсумковий з курсу навчання. Іноді поточний контроль підрозділяють на попередній (його мета — встановити готовність учнів до вивчення нового матеріалу), щоденний, періодичний.

Форми контролю знань і умінь учнів виділяються відповідно до форм навчання: масова форма (іноді в ній виділяють групову і фронтальну) й індивідуальна.

Можна вказати і конкретні форми, що використовуються в практиці роботи школи і можуть бути віднесені як до масової, так і до індивідуальної. Це фронтальний залік, індивідуальне опитування, контрольні роботи, твори, диктанти.

Зауваження. Кажучи про масовий контроль, використовуємо цей термін умовно: в тому сенсі, що контролем охоплений не один учень. Природно, завдання кожен учень виконує індивідуально (іноді виконання завдання може бути доручене групі учнів).

Виділяють різні *способи контролю знань і умінь учнів*: письмовий, усний, практичний (пов'язаний з виконанням різного роду лабораторних і практичних робіт).

Кажучи про *засоби контролю знань і умінь*, найчастіше мають на увазі завдання або декілька завдань, які пропонуються учням з метою виявлення відповідних поставленим цілям результатів навчання.

В основу класифікації таких засобів може бути покладена форма введення відповіді на контролююче завдання.

У цьому випадку виділяються:

- завдання з розгорнутою відповіддю;
- тести.

Розглянемо кожну з цих груп.

Наведемо приклад контрольного *завдання з розгорнутою відповіддю*, обґрунтувавши підбір видів його компонентів та критерії оцінювання як компонентів завдання, так і завдання в цілому.

У процесі конструювання згаданого інтегрованого завдання ми будемо дотримуватися таких вимог:

1. Інтегроване завдання (тест) призначене для перевірки формування в учнів наперед заданих складних умінь, які є складовою частиною формування умінь, визначених освітнім стандартом.

2. Інтегроване завдання має бути розраховане для виконання учнями за певний обмежений проміжок часу (1–1,5 академічні години).

3. В основу критерію вимірювання навчальних досягнень учнів з використанням указаного інтегрованого завдання має бути покладений співвимірний (або однаковий) підхід до вимірювання відтворення кожного елементу завдання. При цьому якість відтворення кожного елементу складного уміння може оцінюватися або ж з використанням бінарної системи оцінювання (елемент уміння відтворений — 1, елемент уміння не відтворений — 0), або тернарної (елемент уміння відтворений повністю — 2, елемент уміння відтворений частково — 1, елемент уміння не відтворений — 0), або, в загальному випадку, n-арної — у залежності від необхідності виділити вагу того чи іншого елементарного уміння порівняно з іншими уміннями, рівень сформованості яких перевіряється.

4. Результати тестування мають бути легко трансльованими до прийнятої у конкретно вибраному навчальному закладі системи оцінювання навчальних досягнень учнів. Крім того, результати тестування мають забезпечити можливість формулювання висновків про абсолютний рівень сформованості в окремих учнів та у класу в цілому як окремих складних умінь, так і їхніх компонентів. Очевидно, що виконання даної вимоги дасть можливість учителеві не тільки уявляти рівень сформованості обраних для перевірки тестом складних умінь, а й бачити реальну картину здатності суб'єктів навчання до подальшої навчальної діяльності. А це, у свою чергу, дасть можливість внести корисні корективи у навчальний процес.

Уведемо позначення для складних умінь, рівень сформованості яких буде перевірятися тестом, через $A_1, A_2, ..., A_m$. Визначимо структуру складних умінь. Нехай для відтворення складного уміння A_1 необхідно відтворити такі елементарні уміння: $a_1^1, a_1^2, ..., a_1^{n_1}$, для відтворення складного уміння A_2 — елементарні уміння $a_2^1, a_2^2, ..., a_2^{n_2}$, …, для відтворення складного уміння A_m — елементарні уміння $a_m^1, a_m^2, ..., a_m^{n_k}$. Можна допустити тотожність (однаковість) деяких з елементарних умінь, що входять до складних умінь. Більше того, це може бути корисним у контексті перевірки якості відтворення одного і того ж елементарного уміння у процесі відтворення різних складних умінь (тобто, відтворення одного і того ж елементарного уміння в різних навчальних умовах). При цьому можна робити висновки з приводу факту високої кореляції відтворення одного і того ж елементарного уміння у різних умовах, або ж аналізувати причини низької кореляції відтворення такого уміння у процесі відтворення неоднакових складних умінь. У відповідності до визначеної структури складних умінь та виділених елементарних умінь формулюємо завдання тесту (при визначенні його компонентів — окремих завдань — керуємося заданими складними уміннями, а також вимогою обмеженості проміжку часу, відведеного на виконання інтегрованого завдання). Перелічені елементарні уміння і стануть окремими вимірюваними елементами у змісті відповіді на завдання. Для чисельного вираження результатів вимірювання слід врахувати, що при використанні, наприклад, тернарної системи оцінювання відтворення всіх елементарних умінь (використовується однаковий підхід до вимірювання рівня відтворення усіх елементів завдання) результат вимірювання досягнень учня буде представлений у натуральних числах і належатиме проміжку $\left[0; M\right]$, де $M = 2 \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i$. При використанні співвимірного підходу (застосування бінарної, тернарної, і так далі, — n-арної системи оцінювання рівня відтворення різних елементарних умінь у межах відтворення конкретного складного уміння) до вимірювання рівня відтворення кожного елементу завдання знаходження значення M трохи ускладнюється, але не наскільки, щоб це стало вирішальним аргументом при прийнятті рішення щодо доцільності виділення ваги того чи іншого елементарного уміння порівняно з іншими уміннями, рівень формування яких перевіряється.

Розглянемо описаний вище підхід до створення інтегрованих завдань з розгорнутою відповіддю на прикладі проведення контрольного зрізу знань учнів з математики за курс дев'ятирічної школи, метою якого було виявлення рівня сформованості стрижневих математичних умінь. Указана мета досягалася через вимірювання результатів розв'язування таких завдань:

1. Визначити рівень сформованості складного уміння проводити обчислення значень числових виразів (позначимо це уміння через A_1).

2. Визначити рівень сформованості складного уміння проводити спрощення алгебраїчних виразів (уміння A_2).

3. Визначити рівень сформованості складного уміння розв'язувати дробово-раціональні рівняння (уміння A_3).

4. Визначити рівень сформованості складного уміння розв'язувати раціональні нерівності (уміння A_4).

5. Визначити рівень сформованості складного уміння розпізнавати формули типових алгебраїчних функцій та будувати їхні графіки (уміння A_5).

6. Визначити рівень сформованості складного уміння розв'язувати трикутники (уміння A_6).

7. Визначити рівень сформованості складного уміння будувати геометричні фігури за заданими їхніми метричними характеристиками — у конкретно взятому випадку — будувати відрізки довжини, заданої ірраціональним числом (уміння A_7).

8. Визначити рівень сформованості складного уміння розв'язувати систему двох алгебраїчних нерівностей першого степеня з двома невідомими (уміння A_8).

При цьому вважалося, що уміння A_1 є відтвореним повністю і правильно, якщо повністю і правильно відтворені елементарні уміння: уміння правильно визначити послідовність виконання арифметичних дій (уміння a_1) та уміння правильно провести арифметичні обчислення (уміння a_2). Аналогічно визначаємо структуру інших складних умінь. Складне уміння A_2 включає: уміння зводити дроби до спільного знаменника (уміння a_3), уміння виконувати віднімання дробів (уміння a_4), уміння виконувати ділення дробів (уміння a_5) та уміння проводити спрощення виразів (уміння a_6); уміння A_3 включає: уміння правильно застосувати загальний алгоритм (оптимальний алгоритм) розв'язування дробово-раціонального рівняння (уміння a_7), уміння виконувати додавання та віднімання дробів (уміння a_8), уміння розв'язувати квадратні рівняння (уміння a_9), уміння визначати область допустимих значень змінної рівняння (уміння a_{10}) та уміння обчислити та записати розв'язок рівняння (уміння a_{11}); уміння A_4 включає: уміння правильно

застосувати загальний алгоритм (оптимальний алгоритм) розв'язування раціональної нерівності (уміння a_{12}), уміння використовувати метод інтервалів або перехід до рівносильних тверджень (уміння a_{13}) та уміння визначити та записати розв'язок нерівності (уміння a_{14}); уміння A_5 включає: уміння звести формулу заданої функції до формул відомих елементарних функцій (уміння a_{15}), уміння спланувати побудову графіка функції методом перетворень або дослідити функцію (уміння a_{16}), уміння виконати побудову графіка функції (уміння a_{17}); склад уміння A_6 визначаємо так: уміння використовувати теорему косинусів для знаходження третьої сторони трикутника за заданими двома іншими сторонами та кутом між ними (уміння a_{18}), уміння використовувати теорему синусів для знаходження невідомих кутів трикутника (уміння a_{19}), уміння скористатися формулою для обчислення площі трикутника за його двома відомими сторонами та кутом між ними (уміння a_{20}), уміння скористатися формулою для обчислення площі трикутника за відомими основою трикутника та висотою, проведеною до цієї основи (уміння a_{21}), та уміння провести тотожні перетворення рівносильних перетворень для знаходження висоти трикутника (уміння a_{22}); уміння A_7 включає: уміння звести розв'язування задачі до застосування теореми Піфагора (уміння a_{23}) та уміння побудувати прямокутний трикутник за даними катетами (уміння a_{24}); нарешті, складне уміння A_8 включає такі елементарні уміння: уміння побудувати на координатній площині графіки лінійних рівнянь із двома невідомими (уміння a_{25}), уміння проілюструвати графічно розв'язок нерівності першого степеня з двома невідомими у вигляді півплощини (уміння a_{26}), уміння проілюструвати графічно розв'язок системи двох нерівностей із двома невідомими як переріз двох півплощин (уміння a_{27}) та уміння описати аналітично отриманий графічний розв'язок системи двох нерівностей з двома невідомими (уміння a_{28}).

Відповідно до визначеного співвідношення складних та елементарних умінь визначається зміст інтегрованого завдання контрольного зрізу (подаємо один із запропонованих варіантів).

1. Знайти значення виразу: $\left(4\cdot\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{90}-4\cdot\sqrt{0{,}1}\right)\cdot\sqrt{10}$.

2. Спростити вираз: $\left(\dfrac{x}{x^2-8x+16}-\dfrac{x+6}{x^2-16}\right):\dfrac{x+12}{x^2-16}$.
3. Розв'язати рівняння: $\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{12}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x}$.
4. Розв'язати нерівність: $\dfrac{x}{x^2-9}<0$.
5. Побудувати графік функції: $y=\dfrac{2\cdot x-5}{x-3}$.
6. Знайти невідомі сторони, кути, площу та одну з висот трикутника ABC, якщо $AB=4$, $AC=3$, $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.
7. Побудувати відрізок довжиною $\sqrt{5}$ см.
8. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} x-3y<24, \\ x+y\le 8. \end{cases}$

Таблиця 7-1

№ п/п		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	Сума балів	Оцінка
1	Студент 1	2	1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	0	50	4,68
2	Студент 2	2	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	1	0	2	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	31	3,66
3	Студент 3	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	0	1	1	1	0	37	3,98
4	Студент 4	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	1	2	2	2	1	49	4,63
5	Студент 5	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	0	1	0	1	0	31	3,66
6	Студент 6	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	0	0	32	3,71
7	Студент 7	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	0	2	2	1	0	43	4,30
8	Студент 8	2	1	2	1	2	0	2	2	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	1	0	31	3,66
9	Студент 9	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	2,75
10	Студент 10	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	0	2	2	2	0	1	1	1	1	1	2	1	1	0	39	4,09
Результати абсолютні		17	11	18	14	17	10	17	14	15	17	12	16	13	11	13	15	15	15	13	11	11	10	13	7	13	9	9	1	357	
У відсотках		0,85	0,55	0,90	0,70	0,85	0,50	0,85	0,70	0,75	0,85	0,60	0,80	0,65	0,55	0,65	0,75	0,75	0,75	0,65	0,55	0,55	0,50	0,65	0,35	0,65	0,45	0,45	0,05	0,64	
Результати за скл. уміннями		0,70		0,74				0,75					0,67			0,72			0,60					0,50		0,40					

Рис. 7-1

Умовні результати виконання контрольного зрізу подамо у вигляді таблиці 7-1. По горизонталі представлені результати роботи кожного учня, оцінені з використанням тернарної системи оцінювання; по вертикалі перераховані елементарні уміння, які є складовими частинами складних умінь. Стовпчик «сума балів» показує оцінювання роботи учнів за шкалою від 0 до 56 ($M=2\cdot 28$), останній стовпчик — оцінювання роботи учнів за прийнятою національною шкалою від «2» до «5», адаптованою до європейської шкали ECTS: A, B, C, D, E, Fx, F (розраховується за формулою $(112+3\cdot n)/56$, де n — сума балів, набраних кожним студентом). Останній рядок таблиці показує рівень сформованості (у частинах від одиниці) відповідних складних умінь у даної групи учнів, передостанній рядок таблиці 7-1 вказує на рівень сформованості (у тих же одиницях) елементарних умінь, що є складовими частинами складних умінь. Показники у правому нижньому кутку таблиці 7-1 (357 та 0,64) характеризують відповідно загальну суму балів, набраних групою учнів, та той факт, що дана група учнів у цілому на 64 відсотки справилася з відтворенням перелічених складних умінь.

Завдання 3. Розробіть комплект завдань з розгорнутою відповіддю для перевірки формування в учнів умінь розв'язувати трикутники. Обмежитися таким обсягом теоретичного матеріалу: сума кутів трикутника, теорема синусів, теорема косинусів.

Тест — система коротких питань і завдань з обмеженням часу виконання, призначених для встановлення результатів навчання і їхнього наступного аналізу. Тестування — це одночасно й метод, і результат педагогічного вимірювання.

Тест складається з тестових завдань. *Тестове завдання* — навчальна ситуація, для якої суб'єкт тестування повинен вибрати варіант відповіді або ж сконструювати такий варіант. *Педагогічний тест* — система тестових завдань, що побудована за принципом зростання складності завдання, для ефективної оцінки підготовленості суб'єктів тестування, їхніх знань, умінь і навичок. *Педагогічне тестування* — це підготовка якісних тестів, проведення тестування й аналіз рівня підготовки суб'єктів тестування.

Тести поділяються на групи за трьома принципами.

1. Особливості подання запитань.
2. Особливості оцінювання.
3. Мета тесту.

За особливістю подання запитань тести поділяються на:

- прості;
- тести типу інтерв'ю;
- адаптивні тести.

Прості тести. Всі запитання можуть бути показані опитуваному одночасно без шкоди для репрезентативності тесту. Запитання можуть бути показані в довільному порядку. В тестах такого типу запитання подаються на одній сторінці, а якщо і розбиваються на сторінки, учень може переходити з однієї сторінки на іншу і відповідати на запитання в довільному порядку.

Тести типу інтерв'ю. Запитання мають йти у чітко визначеному порядку. Зміна порядку запитань може вплинути на результат і репрезентативність тесту. Так буває, якщо в наступному запитанні міститься відповідь на попереднє, наприклад, перше запитання – назвати геометричні фігури, а в другому перелічуються властивості фігур і треба вказати, яка з них виконує ту чи іншу функцію. В тестах такого типу запитання відображаються на сторінці по одному. Тільки після того, як студент дає відповідь на запитання, він зможе побачити наступне.

Адаптивні тести. Запитання не просто стоять у чітко визначеному порядку, але й залежать від того, яку відповідь дасть учень на попереднє запитання. Так можуть бути побудовані соціологічні опитування, психологічні тести. Наприклад, у першому запитанні питають, який розділ з алгебри і початків аналізу ви краще засвоїли — похідну чи інтеграл. Відповідно, для тих, хто обере похідну, наступне запитання буде: «Як знаходити похідну чи застосовувати похідну?», а для тих, хто обере інтеграл, — «Як знаходити первісну чи застосовувати інтеграл?». У тестах такого типу запитання теж показуються по одному. Тільки після того, як учень дає відповідь на попереднє запитання, він зможе побачити наступне.

За особливістю оцінювання тести поділяються на:

- одношкальні;
- багатошкальні.

Одношкальні тести. До них належить більшість екзаменаційних тестів, тестів для перевірки засвоєних знань. Кожен варіант відповіді на запитання передбачає кількість балів, які будуть нараховуватися учневі, якщо він вибере цей варіант. Результат виконаного тесту — число, яке позначає кількість набраних балів.

Багатошкальні. До них можна віднести багато психологічних тестів, які вимірюють одночасно кілька показників, наприклад, основна шкала і шкала достовірності.

У тесті окремо прописуються ключі — номери запитання і варіанти відповідей. Кожен збіг з ключем додає опитуваному один бал за даною шкалою. Потім можна порівнювати кількість балів, набрану за різними шкалами.

За метою тести поділяються на:

- такі, що мають на меті навчання, засвоєння матеріалу (навчальні);
- такі, що мають на меті перевірити рівень засвоєння знань, умінь і навичок (екзаменаційні);
- такі, що мають на меті вивчення особистості учня (психологічні, соціальні опитування).

Найбільш важлива *класифікація тестів за формою їхнього пред’явлення.*

1. *Завдання закритої форми* — тестове завдання, при виконанні якого випробовуваний вибирає висновок із декількох запропонованих правдоподібних варіантів, з яких лише одна відповідь є правильною.
2. *Тест із багатозначною відповіддю.* У варіанти відповіді може бути внесено більше правильних відповідей, але в різних видах чи формах запису. Або серед відповідей може не бути правильних відповідей. Тоді в результаті в кожному номері завдань повинні бути виставлені номери правильних відповідей або прочерк.
3. *Тести на доповнення.* У цих тестах завдання оформляються із пропущеними словами або символами. Пропущене місце повинно бути заповнене випробовуваним. Такі тести корисні при вивченні алгоритмів. Наприклад, дослідження функції на екстремум.
4. *Тести перехресного вибору.* У них пропонується відразу кілька завдань і кілька відповідей до них. Кількість відповідей рекомендується планувати трохи більше, ніж завдань. У результаті суб’єкт тестування повинен надати ланцюжок двозначних чисел. Ці тести також можуть бути однозначними й багатозначними.
5. *Тести ідентифікації.* У цих тестах, аналогічних до (4), використовуються графічні об’єкти або аналітичні описи.
   У ході виконання тестів форм 4 та 5 формуються навички порівняння об’єктів, зіставлення, співвідношення, подання об’єкта в різних формах. Вони більш цікаві для тих, хто навчається видів діяльності; для викладача ці тести цікаві наповненістю змісту.
6. *Завдання на відповідність* — тестове завдання, при виконанні якого необхідно встановити правильну відповідність між елементами двох множин: об’єктів (суб’єктів, процесів) і їхніх атрибутів (властивостей, характеристик, структур і т. ін.).

Наведемо деякі приклади тестів. Тест перехресного вибору (відповідності) являє собою стільки завдань, після виконання яких учень установлює відповідність отриманих ним результатів передбачуваним результатам, записаним у довільному порядку (число завдань і число пропонованих учням відповідей співпадають).

Розв’язати нерівності:

1) $\dfrac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2} \le 0$; 2) $\dfrac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2} < 0$;

3) $\dfrac{x^2-3x+2}{(2x-3)^2} \le 0$; 4) $\left(x^2-3x+2\right)\cdot\left(2x+1\right)^2 \le 0$.

Відповіді: 1) $1 \le x < \frac{3}{2}$ або $\frac{3}{2} < x \le 2$; 2) $1 < x < 2$; 3) $1 < x < \frac{3}{2}$ або $\frac{3}{2} < x < 2$; 4) $x = -\frac{1}{2}$ або $1 \le x \le 2$.

Тест з багатозначною відповіддю складається із завдання і списку відповідей (серед відповідей — одна, декілька або жодної правильної).

1. Знайти значення виразу $\dfrac{6^3 \cdot 6^{-2} - 6^0}{\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}}$.

   Відповіді: 5; $\frac{1}{25}$; 25; $-\frac{1}{5}$; інша відповідь.

2. Указати, який з алгебраїчних дробів не має змісту при $b = 5$:
   $\frac{b-5}{36}$; $\frac{b^2-10b+25}{25-b^2}$; $\frac{2+b}{25+b^2}$; $\frac{b^2+25}{b^2-25}$.

Завдання 4. Розробіть комплект завдань із відкритою відповіддю для перевірки засвоєння учнями розв'язування показникових нерівностей. Проведіть її в аудиторії та виконайте аналіз виконання контрольної роботи за вказаним вище зразком.

Завдання 5. Розробіть тести перехресного вибору і множинного вибору для перевірки розв'язування нерівності $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

Що слід мати на увазі вчителеві, який здійснює відбір і складання засобів контролю знань і умінь учнів? Зміст завдання повинен відповідати меті контролю (контрольованому результату).

Кожен учень повинен розуміти завдання однозначно. Завдання слід складати так, щоб була можливість з їх допомогою отримати максимум інформації про об'єкт контролю. Потрібно також відмітити, що засоби контролю доцільно забезпечувати інструкцією, яка дозволила б тому, хто здійснює контроль, однозначно оцінювати виконання учнем кожного завдання.

Оцінка. Як указувалося вище, процес контролю знань і умінь учнів пов'язаний з *оцінкою*. *Оцінка* — це результат процесу, дії (діяльності) оцінювання, яка здійснюється людиною, умовний формальний вираз цього процесу (результат дії).

Можна говорити про різні *способи оцінювання* залежно від того, з чим проводиться порівняння дій учня. Якщо порівнюються дії, що виконуються учнем сьогодні, з аналогічними діями, виконаними

цим же учнем у минулому або іншими учнями сьогодні, то ми маємо особливий спосіб оцінювання — *порівняльний*. Якщо порівняння відбувається зі встановленою нормою (зразком) виконання дій, то звертаємося до *нормативного способу*.

У випадку порівняльного способу оцінювання відбувається порівняння дій учня з аналогічними діями, які виконують інші учні. Зрозуміло, що в поточній навчальній роботі вчитель, як правило, використовує елементи порівняльного способу оцінювання; при підведенні підсумків вивчення теми, підсумків чверті й т. д. — нормативний. Оцінка визначається знаннями й уміннями учня, які він показав у процесі контролю. Одним з показників, за яким учитель має можливість оцінювати ці знання та уміння, слугують огріхи, допущені учнями при роботі із засобами контролю, запропонованими вчителем.

Огріхи ділять на помилки й недоліки. *Помилка* — це огріх, що свідчить про те, що учень не опанував тими знаннями й уміннями (пов'язаними з контрольованим (ою) розділом (темою)), які визначені програмою з математики для середньої школи. Прикладами помилок будуть наступні: $2 \cdot 3^n = 6^n$; $\lg(a + b) = \lg a + \lg b$; $2\sin 40° = \sin 80°$; нерівність $x^2 < 25$ рівносильна нерівності $x < \pm 5$ та ін. *Недоліком* вважають огріх, що вказує або на недостатньо повне, міцне засвоєння основних знань й умінь, або на відсутність знань, які за програмою не належать до основних. До недоліків відносять також неакуратний запис, недбале виконання рисунка або оформлення розв'язування завдання й т. ін.

Наведений розподіл огріхів на помилки й недоліки є умовним, і це потрібно мати на увазі в процесі оцінювання. Варто пам'ятати, що розмитість межі між помилкою й недоліком (що означає «недостатньо повне, міцне засвоєння основних знань й умінь», як установити міру «цієї недостатності») може бути однією із причин необ'єктивної оцінки (а як наслідок — і відмітки) знань й умінь учня. Залежно від об'єкта контролю, від конкретних обставин огріх, що допущений учнем, може бути віднесений вчителем до розряду помилок або недоліків. Наприклад, учень допустив огріх при виконанні множення десяткових дробів: підписав один з неповних добутків під невідповідним йому розрядом множників. На етапі вивчення й засвоєння зазначеної дії цей огріх вважається помилкою. Якщо ж вона допущена при розв'язуванні досить складного завдання (алгебраїчного або геометричного) і не привела до перекручування змісту запропонованого учневі завдання, способу його виконання, то його можна віднести до недоліків.

Можна говорити й про інші показники, з допомогою яких учитель оцінює знання й уміння учнів. Це виклад вивченого матеріалу грамотною мовою в певній логічній послідовності, звертання до ілюстрації теоретичних положень конкретними прикладами, правильне застосування теорії в новій для учня ситуації (наприклад, при виконанні практичного завдання), самостійність у процесі виконання завдання тощо.

Завдання 6. Вивчіть норми оцінювання за 12-бальною шкалою. Орієнтуючись на норми, оцініть 3–4 контрольні роботи учнів і проведіть аналіз отриманих результатів.

Самостійна робота

Складіть контрольну роботу (комплект завдань із розгорнутою відповіддю) за однією з тем курсу алгебри VII–IX класів. Укажіть конкретну мету цієї роботи й поясніть, чому в ній представлені завдання саме такого змісту. Розробіть методику вимірювання результатів виконання учнями контрольної роботи. Укажіть можливість переведення результату вимірювання у 12-бальну шкалу оцінювання. Тему контрольної роботи оберіть з таких запропонованих:

- Рівняння з двома змінними. Графік лінійного рівняння з двома змінними.
- Квадратні рівняння.
- Розв'язування задач з допомогою квадратних рівнянь.
- Квадратичні нерівності.
- Функції. Квадратична функція.
- Числові послідовності.

Література: [4], [17], [24], [37], [24], [38], [39], [40], [43], [47], [50], [58].

Лабораторна робота №8

Математична підготовка обдарованих учнів. Факультативні заняття, їх мета, зміст, форми проведення

Мета роботи. Визначити особливості роботи з математично обдарованими учнями. Проаналізувати роль факультативних занять у контексті розвитку обдарованої молоді. Визначити методичні особливості проведення факультативних занять.

Основний зміст

Факультативні заняття з математики та методика їх проведення. *Головною метою факультативних занять* з математики є поглиблення та розширення знань, розвиток інтересів учнів до предмета, розвиток їхніх математичних здібностей, прищеплення учням інтересу до самостійних занять математикою, виховання та розвиток їх ініціативи та творчості. Програма основного курсу математики разом з програмою факультативних занять складають програму підвищеного рівня. *Програма факультативних занять* складається так, що всі її питання можуть вивчатися синхронно з вивченням основного курсу математики в школі. Для того, щоб факультативні заняття були ефективними, треба їх організовувати там, де є у наявності: а) висококваліфіковані вчителі-фахівці; б) не менше 15 учнів, що бажають вивчати даний факультативний курс.

Факультативні заняття є найбільш динамічним різновидом рівневої диференціації навчання. Основними *формами проведення факультативних занять з математики* є викладання вузлових питань даного факультативного курсу лекційним методом, проведення семінарів та співбесід (дискусій), розв'язування задач, підготовка учнями рефератів як з теоретичних питань, так і з розв'язування циклів задач, написання математичних творів та доповідей. Слід пам'ятати, що на факультативних заняттях самостійна робота учнів має зайняти провідні позиції у системі організації діяльності учнів. Однією з можливих форм проведення факультативних занять з математики є розділення кожного заняття на дві частини. Перша частина присвячується вивченню нового матеріалу та самостійній роботі учнів за завданнями теоретичного та практичного характеру. Після закінчення цієї частини учням пропонується домашнє завдання з вивчення теоретичного матеріалу та його використання на практиці. Друга частина кожного заняття може бути присвячена розв'язуванню задач підвищеної складності та обговоренню способів розв'язування особливо складних та цікавих задач. Така форма проведення факультативних занять може сприяти успішному переходу від форм та методів навчання в загальноосвітній школі до методів навчання у вищих навчальних закладах.

При проведенні факультативних занять в основному мають використовуватися методи вивчення математики (під методами вивчення математики розуміємо способи здійснення активної, самостійної пізнавальної діяльності математичного характеру безпосередньо самих учнів), а також методи проблемного навчання.

Завдання 1. Використавши [23], [48], сплануйте проведення двох занять факультативу для 10 класу «Комплексні числа та їхнє використання».

Математична підготовка обдарованих учнів. Профільні математичні класи. *Обдарованість* — складне, багатогранне явище. Кожна обдарована дитина — індивідуальність, що потребує особливого підходу. Саме тому навчання і виховання обдарованих учнів необхідно здійснювати з опорою на *дидактичні принципи*:

- індивідуалізації і диференціації навчання;
- довіри і підтримки;
- залучення обдарованих учнів до участі у житті школи.

Важливою практичною проблемою є виявлення потенційних можливостей розвитку учня. Система роботи з виявлення обдарованих дітей включає в себе:

- попередню діагностику сформованості інтелектуальних умінь;
- спостереження за роботою учнів на уроках математики; під час позакласних заходів;
- аналіз результатів виконання самостійних, творчих робіт;
- аналіз результатів участі учнів в олімпіадах, інтелектуальних змаганнях тощо.

Як відомо, обдаровані діти виділяються рядом *характерних особливостей*:

- обдаровані діти мають добру пам'ять, особистий світогляд;
- в обдарованих дітей добре розвинута свідомість;
- обдаровані діти, як правило, дуже активні і завжди чимось зайняті;

- обдаровані діти настирливі в досягненні результату у сфері, яка їх цікавить, для них характерний творчий пошук;
- вони хочуть вчитися і досягають у навчанні успіхів; навчання дає їм задоволення;
- вони вміють критично оцінювати навколишню дійсність і прагнуть проникнути у суть речей і явищ, вміють фантазувати;
- вони з задоволенням виконують складні і довгострокові завдання;
- вміють розкривати взаємозв'язки між явищами і сутністю, індуктивно і дедуктивно думати, маніпулювати логічними операціями, систематизувати, класифікувати і узагальнювати їх.

Розвиток обдарувань та нахилів учнів здійснюється такими шляхами:

- включення у структуру уроку проблемних, евристичних методів роботи, різних форм організації навчальної діяльності;
- забезпечення участі школярів у позакласних заходах з предмета, у заняттях гуртків;
- створення умов для самостійної діяльності;
- створення умов для участі учнів в олімпіадах, турнірах, конкурсах.

Однією з найважливіших умов розвитку обдарованості учнів є формування пізнавального інтересу, який є підґрунтям для розвитку пізнавальної активності учнів.

Під впливом пізнавального інтересу з'являються такі важливі компоненти активного навчання, як активний пошук, здогад, дослідницький підхід, готовність до розв'язування задач.

Нестандартні, дослідницькі задачі, які вчитель включає у структуру роботи, обдаровані діти сприймають як виклик власному інтелекту. Інтелектуальний і естетичний заряд курсу значно підвищується, коли на уроці, а також під час інших форм спілкування з учнями застосовувати ігрові елементи, яскраві історичні повідомлення, цікаві «красиві задачі».

Обов'язковою передумовою розвитку обдарувань школярів як на уроці, так і в позаурочний час повинна виступати *проблемність викладання*.

Творчість учнів, новизна і оригінальність їхньої навчальної діяльності проявляються тоді, коли вони самостійно ставлять проблему і знаходять шляхи її розв'язання. При цьому слід добиватись постійного зростання рівня творчості обдарованих дітей, знаходити оптимальні співвідношення всіх видів їхньої діяльності, щоб одержати найкращі результати. Вчителю треба звернути увагу на те, що ставлячи проблему, варто залишати «нерозв'язані питання», відповідь на які учні повинні одержати самостійно з різних джерел: літературних, експериментальних, шляхом консультацій тощо.

При роботі з обдарованими дітьми можуть бути використані наступні форми навчання: індивідуальні, фронтальні, групові. Фронтальні заняття — дискусії, семінари, дебати, організаційно-діяльні ігри (ОДІ), рольові ігри.

Групові заняття — парні, постійні групи з переміною функцій їхніх учасників, груповий поділ класу з однаковим завданням, з різним завданням, із загальним звітом кожної групи перед усім класом. Кожна форма може також відрізнятися: «мозковий штурм», вільний час для самокорекції засвоєння, залік та ін.

Розвитку обдарованості сприяє *самостійна робота учнів*, для якої характерні так звані творчі завдання, в процесі розв'язування яких учні відкривають для себе нові сторони матеріалу, що вивчається. Завдання даного типу можуть бути на знаходження нових способів розв'язування задач, на їх самостійне створення. Доцільно також використовувати задачі як з недостатніми, так і з зайвими даними.

Усебічний розвиток обдарувань учнів здійснюється не тільки в ході навчальної діяльності, а й під час проведення *позакласних заходів*. Це різноманітні конкурси, вікторини, семінари, предметні дебати, в ході яких учні не тільки поглиблюють знання з математики, а й мають можливість розвивати інтелект, ерудицію, вміння спілкуватися.

Математичні гуртки є основною формою позакласної роботи з математики. Заняття в них доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми. У процесі гурткової роботи учні вчаться розв'язувати математичні проблеми, працювати з математичною літературою, готуються до участі в математичних олімпіадах.

Олімпіада — це свято, на якому сяють яскраві математичні ідеї і красиві судження. Проте успіх на такому святі чекає того, хто ретельно до нього готувався. Без системної роботи на уроці і після уроків велика перемога в олімпіаді неможлива.

Олімпіада — це конкурс, у якому переможцями стають найсильніші, а інші учасники збагачуються новими знаннями і здобувають необхідний досвід. Тільки добровільний принцип і зацікавленість допомагають залучати учнів до осмисленої плідної роботи в період підготовки до олімпіад. При підготовці до шкільної олімпіади слід

особливо ретельно підбирати завдання, доступні учням, виконання яких дає можливість відчути радість подолання труднощів.

Починаючи з 7 класу, обдаровані діти працюють з додатковою літературою. Це журнал «У світі математики», збірники олімпіадних задач, завдання різних турнірів тощо (див. [20], [21], [22], [23], [25]).

Зміна форм діяльності, опора на творчі інтереси дітей, різноманітність областей застосування здібностей — усе це допомагає зберігати високу працездатність обдарованих дітей. У них виробляється потреба брати все нові і нові рубежі на шляху свого зростання.

Отже, підіб'ємо основні підсумки. Сукупність ряду здібностей, що обумовлює особливо успішну діяльність людини у визначеній області і виділенняцієї людини серед інших осіб, що навчаються цієї діяльності і виконують її в тих же умовах, називається *обдарованістю*.

Математична обдарованість виявляється в розумовій діяльності людини у вигляді специфічних здібностей при одержанні, переробці, збереженні і використанні математичної інформації. У структурі здібностей математично обдарованих дітей виділяють такі *компоненти*:

- здібність до формалізованого сприймання математичного матеріалу, усвідомлення формалізованої структури задачі;
- здібність «схоплювати» задачу загалом, в цілому, не втрачаючи з виду всіх її даних;
- здібність до розумового орієнтування у відшуканні шляхів розв'язання задачі, з'ясування логіки доведення;
- здібність до логічного мислення;
- здібність до математичної абстракції, до швидкого і широкого узагальнення математичного матеріалу;
- здібність до швидкого згортання міркувань під час розв'язання задач;
- здібність легко і швидко переключатися з однієї розумової операції на іншу, прояв гнучкості мислення, вміння знаходити декілька розв'язків однієї і тієї ж задачі;
- здібність знаходити найбільш раціональні шляхи розв'язання задач, прагнення до простоти і ясності їхнього розв'язку;
- здібність легкого і вільного переключення з прямого на обернений хід думки, від розв'язання прямої задачі до розв'язання оберненої;
- здібність до тривалого і захопленого заняття математикою, низька стомлюваність і висока працездатність.

Математично здібних і обдарованих дітей характеризує особливе математичне спрямування розуму, своєрідна схильність знаходити логічний і математичний зміст у багатьох явищах дійсності, усвідомлювати і сприймати явища навколишнього світу через призму логічних і математичних категорій і відношень. Установлено, що психічну діяльність обдарованих дітей характеризують такі *загальні риси особистості*:

- надзвичайно ранній прояв високої пізнавальної активності і допитливості, прагнення відкрити і досліджувати нове;
- глибока зацікавленість і потреба в узагальненому підході до проблеми, пошуку і поясненні суті того, що відбувається;
- швидкість і точність виконання розумових операцій, сформованість навичок логічного мислення;
- значна працездатність, висока стійкість уваги і відмінна пам'ять;
- багатство активного словника, швидкість і оригінальність вербальних (словесних) асоціацій, багата фантазія;
- яскраво виражена установка на творче виконання завдань, винахідливість;
- оперативне володіння основними компонентами загальнонавчальних умінь.

Педагогіка розвитку особистості у своїх основах спирається і враховує особистісні властивості дітей, що виявляються в специфіці і спрямованості їхнього мислення, сприйманні, пам'яті, психомоторних функціях тощо. Найбільш яскраво ця ідея відбита в *індивідуалізації навчання*, що має багату історію і значний досвід упровадження. Незважаючи на різноманітне її тлумачення в науці, ототожнення іноді із поняттям диференційованого навчання, *індивідуалізацію навчання* розглядають у трьох аспектах:

а) з позиції процесу навчання як вибір різноманітних форм, методів, засобів і прийомів, що сприяють підвищенню ефективності навчання учнів;

б) з позиції змісту навчання, при упорядкуванні навчальних планів, індивідуалізованих програм, навчальної і методичної літератури, доборі спеціальних завдань, що відбивають сферу пізнавальних здібностей і особливості мислення обдарованих дітей;

в) з позиції побудови шкільної системи освіти як умова формування різноманітних спеціалізованих шкіл і селективних класів, які дозволяють обдарованим учням реалізувати свій творчий потенціал і забезпечити подальший розвиток своїх здібностей.

У зв'язку з цим у педагогічній діяльності виділяють *три основних види індивідуалізації навчання*.

1. Навчання математики, диференційоване за рівнями, відповідно до якого учнів групують за певним критерієм найбільш виражених математичних здібностей. Це дозволяє створити відносно однорідні класи, в роботі яких учитель може враховувати природні здібності, нахили й інтереси учнів, їхній рівень навченості, що створює максимально сприятливі умови для розвитку їхньої індивідуальності.

2. Внутрішньокласна (або внутрішньогрупова) індивідуалізація навчальної роботи, що дозволяє враховувати індивідуальні особливості психіки окремої дитини під час різних форм роботи на уроці.

3. Вивчення навчального курсу в індивідуально різному темпі — прискорено або уповільнено. Даний вид індивідуалізації дозволяє вивільняти час для поглибленого вивчення окремих питань або розв'язування цікавих задач.

Проілюструємо реалізацію висловлених вище положень на прикладі організації функціонування *заочної фізико-математичної школи* (ЗФМШ) при фізико-математичному факультеті Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка. Основні *цілі діяльності школи* є такими:

- реалізація програм додаткової освіти учнів з дисциплін фізико-математичного циклу;
- надання учням загальноосвітніх навчальних закладів додаткових можливостей для засвоєння курсів математики та фізики за програмами класів з поглибленим вивченням цих дисциплін;
- підготовка випускників шкіл до вступу у вищі навчальні заклади;
- створення умов для підвищення конкурентоспроможності випускників сільських загальноосвітніх навчальних закладів при вступі до вищих навчальних закладів;
- активізація учнів у процесі навчання і формування навичок самостійної роботи;
- пошук та відбір обдарованих учнів.

Навчатися в школі можуть учні старших класів загальноосвітніх навчальних закладів без будь-яких обмежень за рівнем початкової підготовки або за місцем проживання. Для підвищення ефективності роботи школи створена мережа підрозділів, в яких здійснюється робота з учнями, які виявили інтерес до вивчення фізико-математичних дисциплін. Науково-методичне керівництво школою здійснює методична рада фізико-математичного факультету, що функціонує на громадських засадах і складається з висококваліфікованих викладачів та співробітників факультету. Практичне керівництво школою здійснює куратор ЗФМШ, а також куратори напрямків — математичного та фізичного. Куратор ЗФМШ та куратори напрямків призначаються вченою радою фізико-математичного факультету. В якості викладачів залучаються провідні спеціалісти в галузі фізико-математичних наук, а також найкращі студенти випускних курсів фізико-математичного факультету КДПУ ім. В. Винниченка. Зарахування в школу здійснюється на основі особистих заяв учнів та їхніх батьків. Учні можуть бути відраховані зі школи за власним бажанням або як такі, що втратили зв'язок зі школою. Навчальний процес організовується в очно–заочній формі згідно з принципами інтенсивності і поетапності. Навчальний план, навчальні програми, тексти контрольних робіт затверджуються методичною радою фізико-математичного факультету. Навчальний рік починається в жовтні і завершується у травні поточного року. Учням, що зараховані до ЗФМШ, відповідно до графіка навчального процесу, поштою (або з використанням мережі Internet) висилаються тексти завдань (контрольні роботи). Надіслані розв'язки рецензуються і разом із наступним завданням надсилаються учневі. В разі необхідності учням організовуються консультації. У кінці навчального року (квітні–травні) проводиться очний тур з учнями 11 класу. У літній період проводяться очні сесії у формі літніх шкіл на базі факультету або позаміських оздоровчих таборів, що передбачатимуть навчання з організацією активних форм відпочинку та оздоровлення. Для участі у літніх школах запрошуються учні 10-х класів, що показали належні результати роботи протягом року, а також призери міських та обласних предметних олімпіад.

Для методичного супроводження роботи ЗФМШ створено методичний фонд з електронних та друкованих матеріалів (див. [20], [21], [22], [23], [25]).

Завдання 2. Використавши [20], [21], [22], [23], [25] та програму контрольних робіт з математики, складіть текст контрольної роботи для учнів 10 класу заочної фізико-математичної школи. Розробіть критерії її оцінювання.

Самостійна робота

1. **Сплануйте заняття математичного гуртка для 7–9 класів загальноосвітньої школи. Розробіть два заняття з виконаного планування.**
2. **Зробіть перевірку контрольної роботи, що виконана учнями заочної фізико-математичної школи. Прорецензуйте виконання контрольної роботи. Сплануйте проведення консультації. Проведіть її.**

Література: [4], [15], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [29], [30], [38], [39], [40], [44], [48], [49], [50], [55], [58].

Лабораторні роботи з організаційних питань навчання математики

До професійних умінь, які необхідно опанувати майбутньому вчителеві, належать уміння використання різних видів наочності на уроці, а також організації контролю за діяльністю учнів.

Велика група умінь пов'язана з розумінням структури уроку математики, видів уроку, форм організації діяльності учнів на уроці і т. ін. До цієї ж групи умінь належить і аналіз уроку.

Хоча багато що з цих питань відомо з курсів педагогіки і психології, але на заняттях з методики навчання математики ці знання отримують наочну завершеність, тобто осмислення через специфіку і особливості предмета. Тому в цьому розділі ми конкретизуємо типи уроків стосовно предмета математики та на прикладах аналізу ряду уроків розкриємо найбільш складні з них за формою організації, за прийомами залучення учнів до самостійної роботи.

Лабораторна робота №9

Урок, типи уроків. Структура уроків різних типів. Урок формування нових знань

Мета роботи. Узагальнити відомості про основні типи уроків, розглянути структуру найпоширеніших типів уроків математики; роз'яснити вимоги до аналізу уроків; познайомитися зі схемою аналізу уроку, скласти аналіз поданого конспекту уроку.

Основний зміст

Урок — основна організаційна форма навчального процесу. Говорячи про урок, звичайно мають на увазі логічно закінчений, цілісний, обмежений певними рамками часу відрізок навчально-виховного процесу. У ньому представлені в складній взаємодії всі основні елементи навчально-виховного процесу: цілі, зміст, засоби, методи, організація.

Виділені елементи навчально-виховного процесу можна покласти в основу класифікації уроків. Розглянемо *типізацію уроків за їх дидактичною метою*. Структуру уроку засвоєння нових

знань визначаємо за ознакою поступового розв'язання навчально-пізнавальних задач, що є окремими етапами на шляху до досягнення основної дидактичної мети.

Урок засвоєння нових знань

Основна дидактична мета: сформувати в учнів знання конкретного теоретичного матеріалу.

Етапи уроку:

1. Підготовка до вивчення нового матеріалу (повторення або актуалізація базових знань).
2. Мотивація навчальної діяльності учнів.
3. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
4. Сприйняття та первинне усвідомлення учнями нового матеріалу.
5. Осмислення об'єктивних зв'язків та відношень у новому матеріалі та розкриття внутрішньої суті явищ, що вивчаються.
6. Первинне узагальнення та систематизація знань.
7. Підбиття підсумків уроку.
8. Пред'явлення завдання додому.

Урок засвоєння умінь та навичок

Основна дидактична мета: сформувати в учнів уміння та навички використання на практиці конкретного теоретичного матеріалу.

Етапи уроку:

1. Актуалізація опорних знань та практичного досвіду учнів.
2. Мотивація навчальної діяльності школярів.
3. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
4. Вивчення нового матеріалу (розв'язування увідних вправ).
5. Первинне застосування набутих знань (розв'язування пробних вправ).
6. Використання учнями набутих знань у стандартних ситуаціях з метою формування навичок (розв'язування тренувальних вправ).
7. Творче перенесення знань та навичок з метою формування умінь (розв'язування вправ продуктивного типу).
8. Підбиття підсумків уроку.
9. Пред'явлення завдання додому.

Урок застосування знань, умінь та навичок

Основна дидактична мета: навчити учнів застосовувати отримані знання, сформовані уміння та навички використання на практиці конкретного теоретичного матеріалу.

Етапи уроку:

1. Актуалізація опорних знань та дій учнів, необхідних для продуктивного розв'язання поставлених задач.
2. Мотивація навчальної діяльності учнів.
3. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
4. Осмислення змісту та послідовності застосування практичних дій.
5. Самостійне виконання учнями практичної частини роботи під контролем та з допомогою вчителя. Здійснення контролю зі сторони вчителя навчальної діяльності учнів, організація самоконтролю учнів у процесі виконання завдань.
6. Узагальнення та систематизація знань та способів виконання дій, що відпрацьовуються на уроці. Звіт учнів про способи та результати роботи та теоретичне обґрунтування отриманих результатів.
7. Підбиття підсумків уроку.
8. Пред'явлення завдання додому.

Урок узагальнення та систематизації знань

Основна дидактична мета: узагальнити та систематизувати в учнів знання конкретного теоретичного матеріалу.

Етапи уроку:

1. Мотивація навчальної діяльності учнів.
2. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
3. Узагальнення окремих фактів, подій, явищ.
4. Повторення та узагальнення понять та засвоєння відповідної їм системи знань.
5. Повторення та систематизація основних теоретичних положень та провідних ідей науки.
6. Підбиття підсумків уроку.
7. Пред'явлення завдання додому.

Урок контролю та корекції знань, умінь та навичок

Основна дидактична мета: провести контроль та корекцію знань, умінь та навичок володіння учнями конкретним теоретичним матеріалом.

Етапи уроку:

1. Мотивація навчальної діяльності учнів.
2. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
3. Перевірка знання учнями фактичного матеріалу та уміння розкривати елементарні зовнішні зв'язки у предметах та явищах.
4. Перевірка знання учнями основних понять (законів) та умінь самостійно пояснювати їхню суть, наводити аргументацію до висновків та приклади.
5. Перевірка глибини осмислення учнями знань та рівня їх узагальнення та системності з точки зору використання знань у стандартних та змінених умовах.
6. Підбиття підсумків уроку. Збирання виконаних завдань
7. Пред'явлення завдання додому.

Комбінований урок

Основна дидактична мета може складатися з декількох цілей: перевірка раніше засвоєних учнями знань та засвоєння нових знань; або узагальнення та систематизація знань та засвоєння навичок і умінь; перевірка раніше засвоєних учнями знань та використання їх на практиці.

Етапи уроку (орієнтовно):

1. Актуалізація опорних знань, умінь та навичок учнів.
2. Мотивація навчальної діяльності учнів.
3. Повідомлення теми, мети та задач уроку.
4. Вивчення нового матеріалу, його сприйняття, усвідомлення та засвоєння.
5. Первинне застосування набутих знань.
6. Засвоєння навичок на готовому матеріалі у стандартних ситуаціях та у ситуаціях зі зміненими умовами.
7. Самостійна робота учнів на продуктивне використання знань, умінь та навичок.
8. Підбиття підсумків уроку.
9. Пред'явлення завдання додому.

Розглянемо приклад *уроку засвоєння нових знань.*

Тема уроку

Функція. Область визначення функції. Способи задання функції (Алгебра, 8 клас)

Мета уроку. Ввести поняття функції через поняття відповідності, ввести поняття області визначення функції та способів задання функції.

Навчальні задачі.

1. На конкретному прикладі підвести учнів до поняття відповідності, означити однозначну відповідність.
2. Означити функцію, використовуючи знання про однозначну відповідність. Увести поняття області визначення функції та способів задання функції.
3. Закріпити отримані знання при розв'язанні відповідних задач.
4. Провести первинне узагальнення знань учнів. Підбити підсумки уроку, задати домашнє завдання.

Хід уроку

У житті вам часто доводилося зустрічатися з такими висловленнями: «місця в залі кінотеатру відповідають придбаним квиткам», «придбали костюм відповідного розміру», «поїзди приходять на станцію у відповідності з установленим розкладом» і т.ін. Тут ми маємо справу з різними множинами різних елементів: множина місць у глядацькому залі і множина квитків в театр, множина костюмів і множина стандартних розмірів і т. д. З допомогою поняття відповідності можна встановити зв'язок між елементами різних множин.

Розглянемо, наприклад, дві множини: A = {ромашка, троянда, незабудка} — множина назв квітів і B = {білий, червоний, блакитний, зелений} — множина назв кольорів їхніх пелюсток.

Який колір мають пелюстки ромашки? Щоб показати, що вони білі, від назви «ромашка» — елемента множини A — проводять стрілку до елемента множини B — слова «білий». Тому від назви квітки «троянда» проводять дві стрілки до відповідних елементів множини B — до слів «червоний» і «білий». Який колір відповідає пелюстці незабудки? (Блакитний). Показати стрілкою. З рисунка видно, що у множині A немає елемента, якому відповідає елемент «зелений» множини B, оскільки до нього не підведена стрілка. З допомогою стрілок ми встановили відповідність між даними множинами A і B.

Розглянемо ще один приклад: як дізнатися, чи однакова кількість дівчаток і хлопчиків у даному класі? З одного боку, це можна взнати, порахувавши окремо хлопчиків і окремо дівчаток і порівнявши одержані числа; з другого боку, це можна встановити, не вдаючись до лічби, а саме: запропонувавши сісти за одну парту тільки по одному хлопчику і по одній дівчинці, тобто, утворити пари «дівчинка–хлопчик», і відповідь одержимо негайно. Якщо за партами сидять тільки пари «дівчинка–хлопчик» і немає жодної парти, де б сиділа або тільки одна дівчинка, або тільки один хлопчик, то їх кількість однакова. Якщо ж була б хоч одна парта, де сидів би тільки один хлопчик і не було жодної, де сиділа б тільки дівчинка, то кажуть, що хлопчиків у класі більше, ніж дівчаток. Навпаки, якщо була б хоч одна парта, де сиділа б тільки одна дівчинка, а на всіх останніх — пари «хлопчик–дівчинка», то в цьому випадку кажуть, що дівчаток більше, ніж хлопчиків, або, що хлопчиків менше, ніж дівчаток. У даному випадку ми поставили в однозначну відповідність дівчаток і хлопчиків, тобто вказали деяке правило, за яким кожній дівчинці відповідає один і тільки один хлопчик. У нашому випадку це правило звелось до того, що ми за одну парту садили тільки по одному хлопчику і по одній дівчинці.

Коли за деяким правилом кожному елементу a множини A поставлено у відповідність один і тільки один елемент b з множини B, то кажуть, що між множинами A і B існує однозначна відповідність. Однозначна відповідність між двома множинами називається функцією. Отже, *своєрідне правило, за яким встановлюється однозначна відповідність, називається функцією.*

А тепер розв'яжемо такі задачі.

Задача 1. У таблиці зображена відповідність між множинами перших п'яти натуральних чисел x (множина N) і парних натуральних чисел y (множина M). Чи є ця відповідність функцією?

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

Розв'язання. Оскільки тільки одному елементу множини N відповідає тільки один елемент множини M (який одержується з першого при множенні його на 2), то така відповідність дійсно є однозначною між множинами N і M, а отже, є функцією.

Задача 2. Обчисліть периметр квадрата, якщо його сторона приймає множину таких значень $a \in \{1, 2, 4, 5\}$. Чи виражає в даному випадку формула для знаходження периметра квадрата функцію (чи задає однозначну відповідність)?

Розв'язання. Оскільки у квадрата всі сторони рівні, то його периметр можна обчислити за формулою $p = 4a$. Тоді маємо таблицю:

a	1	2	4	5
p	4	8	16	20

Бачимо, що кожному значенню сторони квадрата відповідає єдине значення периметра. Отже, можемо сказати, що дана формула задає однозначну відповідність, тобто є функцією. Кожному значенню сторони квадрата відповідає єдине значення периметра, а тому значення змінної a називається аргументом, а значення периметра називається значенням функції для даного аргументу — або, для спрощення, просто функцією.

Задача 3. Ціна проїзду в приміському поїзді ставиться у відповідність номеру зони, до якої належить станція. Ця відповідність показана в таблиці (буквою N позначена множина номерів зони, а буквою M — відповідна множина цін проїзду в гривнях):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1,0	1,5	2,0	2,5	3,5	4,0	5,5	6,5	8,5

За цією таблицею для кожного значення $n \in N$, $N = \{1, 2, \ldots 9\}$, можна знайти відповідні значення $m \in M$. Множина значень аргументу утворює область визначення функції. У задачі 2 область визначення функції $p = 4a$ складається з чисел 1, 2, 4, 5, а в задачі 1 — з чисел 1, 2, 3, 4.

Звернемося ще раз до задачі 2: з допомогою чого задається однозначна відповідність (або функція)? [Відповідь: з допомогою формули]. У задачах 1 та 3 функція задається у вигляді таблиці. Отже, функція може задаватися з допомогою формули – при цьому спосіб задання функції називають *аналітичним способом задання функції*, а може задаватися з допомогою таблиці — при цьому спосіб задання називають *табличним способом задання функції*. Ще існує *графічний спосіб задання функції*. З координатною площиною і графіками ви вже знайомилися в молодших класах, а тепер ми їх розглядатимемо більш детально для того, щоб дізнатися — як з допомогою них можна задати однозначну відповідність і між якими множинами. Однозначна відповідність між множиною впорядкованих пар і множиною точок координатної площини задається *графіком функції* — це множина всіх точок координатної площини, абсциси яких рівні значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

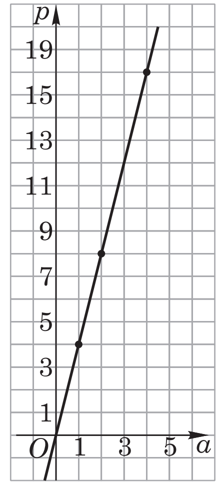


Рис. 9-1

На рис. 9-1 якраз і зображена така відповідність для задачі 2. Якщо задавати функцію так, як це вказано в умові задачі, то її графік буде складатися з точок, що мають координати (1; 4), (2; 8), (4; 16), (5; 20). Це і є взаємно однозначна відповідність між множиною вказаних пар та множиною точок на координатній площині aOp. Переформулюємо задачу так: знайти значення функції, заданої формулою $p = 4a$, де a — аргумент функції (незалежна змінна), а p — значення функції (залежна змінна). Тоді графіком функції, яка задана вказаною формулою, буде пряма лінія (яка, до речі, пройде через перелічені точки — див. рисунок). Сам же рисунок можна розглядати як задання функції графічно. Область визначення функції, заданої таким способом, — це множина всіх значень змінної a (незалежної змінної). В цьому й полягає суть графічного способу задання функції.

Таким чином, ми розглянули три способи задання функції: аналітичний (з допомогою чого?), табличний (з допомогою чого?) і графічний (з допомогою чого?), але слід мати на увазі, що ці способи мають як переваги, так і недоліки. Розглянемо їх для кожного способу.

1) *Аналітичний спосіб.* Задання функції формулою зручне, бо дає можливість визначити значення функції для будь-якого значення аргументу. Також таке задання функції є компактним, і в більшості випадків формула займає один рядок.

2) *Табличний спосіб.* Зручний тим, що для знаходження значень функції не треба робити ніяких розрахунків. Незручний він тим, що таблиця займає багато місця і до того ж в ній задаються значення функцій не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

3) *Графічний спосіб.* Цей спосіб дає можливість визначити значення функції для будь-якого аргументу, але таке задання функції забирає багато місця.

А тепер розв'яжемо задачі.

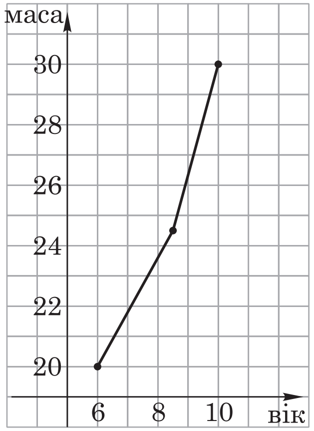


Рис. 9-2

Задача 4. На рис. 9-2 зображено графік зміни маси (у кілограмах) Петрика залежно від його віку (у роках). Якою була маса Петрика в 6 років, 8,5 років, 10 років?

Розв'язання. Щоб знайти масу Петрика в даному віці, можна (подумки) провести вертикальну пряму від точки, що позначає даний вік, на горизонтальній осі абсцис до перетину з графіком. І з точки перетину провести горизонтальну пряму; точка перетину цієї прямої з віссю ординат дасть нам шукану масу Петрика в даному віці.

Відповідь зручно записати в такій таблиці:

X, роки	6	8,5	10
Y, кг	20	25	30

Легко помітити, що таким чином отримані результати не завжди дають точну відповідь, і цей недолік зберігається для всіх функцій, заданих графічно.

Задача 5. Відомо, що функція задається формулою $y=\frac{1}{2}x$, причому $-3 \le x \le 3$. Знайдіть множину значень y, якщо відомо, що $x=\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Побудуйте за отриманими значеннями графік даної функції.

Розв'язання. Оскільки функція задається формулою (аналітичний спосіб задання), то відповідні значення функції для кожного елемента множини X (аргументу) можемо знайти за даною формулою. Отримаємо множину значень аргументу та множину значень функції:

$$x=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\} \text{ і } y=\left\{-\frac{3}{2};-1;-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}\right\}.$$

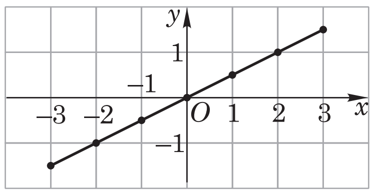


Рис. 9-3

Ми знаємо, що кожен елемент отриманої таблиці є точкою на координатній площині. Сполучивши ці точки, отримаємо графік даної функції (рис. 9-3).

Отже, сьогодні на уроці ви дізналися, що таке відповідність, коли

її можна вважати однозначною (коли?). Дали означення функції (яке?). Також дізналися про область визначення функції (що це таке?). Сьогодні на уроці ми з'ясували, що існує три способи задання функції(назвіть їх). Дали означення графіка функції (сформулюйте його). Вчилися розв'язувати відповідні задачі.

А тепер запишіть домашнє завдання.

1. Вивчіть теоретичний матеріал.
2. **Задача 1.** Велосипедист їхав x годин зі швидкістю 12 км за годину. Яку відстань проїхав велосипедист за цей час? Скласти вираз і записати множину значень цього виразу, якщо множина значень змінної $x \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Складіть задачу, обернену даній.
3. **Задача 2.** Функція задана формулою $y = x(x-3)$, де $-2 \le x \le 2$. Заповніть відповідну таблицю та нарисуйте її графік.

Завдання 1. Використавши запропоновану нижче схему аналізу уроку, проаналізуйте поданий вище урок.

Загальна схема аналізу уроку математики може бути такою:

1. Загальні відомості про урок (тема, мета уроку, його місце в системі уроків, тип уроку, доцільність вибору саме такого типу).
2. Аналіз окремих етапів уроку (початок уроку, перевірка домашніх завдань, пояснення нового матеріалу, закінчення уроку тощо).
3. Дотримання дидактичних принципів навчання (науковість, доступність викладу, послідовність, індивідуальний підхід до учнів, зв'язок із життям).
4. Методи навчання (як подавався і закріплювався новий матеріал, чи був диференційований підхід до учнів, як організовувалась їхня самостійна робота, як перевірялося домашнє завдання).
5. Виховання учнів на уроці (виховання логічного мислення, культури поведінки, естетичних смаків учнів).
6. Використання засобів навчання (класна дошка, таблиці, моделі, засоби екранізації).
7. Психологічна обстановка на уроці (активність учнів, керування їхньою увагою, запам'ятовуванням, ставлення учителя до учнів, поведінка учнів і вчителя на уроці).
8. Оцінювання знань, умінь та навичок учнів.
9. Підготовленість учителя до уроку (загальна математична культура, мова, підготовленість до даного уроку).
10. Висновки та пропозиції.

Щоб зробити глибокий аналіз уроку, треба готуватися до нього. Слід перед уроком ознайомитися з його планом, проглянути, як викладено дану тему в підручнику, з'ясувати, які наочні посібники та дидактичні матеріали до даної теми є в школі. Найбільш поширеною є така форма запису уроку, що аналізується. Сторінка ділиться вертикальною лінією на дві частини — у лівій частині відображається «фотографія» уроку (тобто його хід), а в правій — аналітичні викладки або критичні зауваження за результатами спостереження.

Завдання 2. Складіть план-конспект уроку формування нових знань на тему «Формула коренів квадратного рівняння». Для цього проаналізуйте та визначте структуру змісту матеріалу, що стосується формули коренів квадратного рівняння. Як впливає структура змісту матеріалу уроку формування нових знань на визначення прийомів проведення основних етапів уроку?

Самостійна робота

Складіть конспект та підготуйтеся до проведення уроку формування нових знань на тему «Лінійна функція». Використавши запропоновану схему аналізу уроку, проаналізуйте підготовлений урок.

Література: [4], [15], [17], [24], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47], [50], [55], [58].

Лабораторна робота №10

Урок формування умінь та навичок

Мета роботи. Узагальнити відомості про урок засвоєння умінь та навичок, розглянути його структуру; скласти аналіз поданого конспекту уроку.

Основний зміст

В основу вироблення структури уроку формування нових умінь та навичок береться дидактична система *вправ*. *Пропедевтичні* або *підготовчі вправи* використовуються для підготовки учнів до сприйняття нових знань та способів їх використання на практиці. *Ввідні вправи* використовуються для того, щоб створити на уроці проблемну ситуацію як спосіб мотивації навчальної діяльності учнів; створити умови для стимуляції самостійної пошукової діяльності при відшуканні нових способів виконання дій або формулювання відповідного правила; підвести учнів до розуміння опорного теоретичного матеріалу; підготувати до осмислення правила, закону, що є основою засвоєння відповідних навичок та умінь. *Пробні вправи* — це найперші завдання на використання щойно продемонстрованих вправ, необхідних для формування умінь або навичок. *Тренувальні вправи* направлені на засвоєння учнями навичок у стандартних умовах. Від пробних вони відрізняються більшим ступенем самостійності та ініціативи учнів у процесі їх виконання, а також більшою різноманітністю завдань, складність виконання яких поступово зростає. *Продуктивні вправи* за своїм змістом та методами роботи направлені на засвоєння учнями умінь та навичок у змінених умовах, що наближаються до реальних життєвих ситуацій. *Контрольні вправи* — це вправи комплексного характеру, в яких наявні як репродуктивні, так і продуктивні й творчі елементи.

Завдання 1. Використавши запропоновану у тексті лабораторної роботи №9 схему аналізу уроку, проаналізуйте поданий нижче урок.

Тема уроку

Додавання та віднімання натуральних чисел
(Математика, 5 клас)

Мета уроку. Сформувати уміння проводити операції додавання та віднімання над натуральними числами.

Навчальні задачі.

1. Провести актуалізацію опорних умінь та навичок учнів з використанням усного рахунку.
2. Означити операції над натуральними числами та компоненти цих операцій. Означити результати цих операцій у випадку, коли один із компонентів є нулем.
3. Закріпити отримані знання при розв'язанні відповідних задач.
4. Провести первинне узагальнення знань учнів. Підбити підсумки уроку, задати домашнє завдання.

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань та практичного досвіду учнів (проводиться у вигляді усного рахунку):

1) $25 \pm 5 \mp 8$;
2) $6 \pm 10 : 2 \mp 3$;
3) а) 13 ± 0; б) 14 ± 14;
4) 37 ± 3;
5) $(30 + 7) \pm 11 \cdot 2$.

II. Повідомлення теми уроку та його мети. Вивчення нового матеріалу.

Розв'язати такі задачі:

Задача 1. Хлопчик ніс у кошику гриби. Він спіткнувся і розсипав 43 гриби, а в кошику залишилося 32 гриби. Скільки всього грибів зібрав хлопчик?

Розв'язання. Щоб дізнатися, скільки грибів зібрав хлопчик, треба додати кількість грибів, що розсипалися, і кількість грибів, що залишилися: 43 + 32 = 75 (грибів). Отже, в результаті додавання двох натуральних чисел (43 і 32) дістали нове натуральне число (75), яке називається ***сумою*** цих двох чисел. Числа, що додають, називаються ***доданками***. У виразі 43 + 32 = 75 числа 43 і 32 — доданки, 75 — сума.

А що є доданками і сумою у прикладах 3, 4, 5 усного рахунку? (Відповіді учнів).

А тепер складемо обернену задачу до першої. Хто які задачі запропонує? Відштовхуватися будемо від виразу 43 + 32 = 75, де 75 треба було знайти. Тепер нехай треба знайти число 32 (кількість грибів, що залишилися). Отже, задачу можна сформулювати так:

Задача 2. Хлопчик ніс у кошику 75 грибів. Він спіткнувся й розсипав 43 гриби. Скільки грибів залишилося у кошику?

Розв'язання. Щоб знайти кількість грибів, що залишилися, треба від початкової кількості грибів відняти кількість грибів, що розсипалися, тобто 75 – 43 = 32 (гриби).

Ми розглянули дві обернені задачі, одна з яких розв'язується додаванням, а друга — відніманням. Отже, і ці операції (додавання і віднімання) обернені. Звідси можна означити операцію віднімання через додавання: щоб відняти від одного числа (75) друге число (43), треба знайти таке число (32), яке в сумі із другим числом дає перше.

Причому перше число (75) називається ***зменшуваним***, друге (43) — ***від'ємником***, а число, яке треба знайти, — ***різницею*** (32) перших двох.

А що є різницею, зменшуваним, від'ємником у прикладах 3, 4, 5 усного рахунку? (Відповіді учнів).

Оскільки всі операції додавання і віднімання обернені, то можна сформулювати такі правила.

1. *Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок.*
2. *Щоб знайти невідоме зменшуване, треба додати різницю і від'ємник.*
3. *Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю.*

III. Первинне застосування набутих умінь та навичок.

Ці правила використовуються для перевірки розрахунків.

Вправа 3. 54273 – 37884 = 16389.

$$-\begin{array}{r} 54273 \\ 37884 \\ \hline 16389 \end{array}$$

перевіряємо додаванням

$$+\begin{array}{r} 37884 \\ 16389 \\ \hline 54273 \end{array}$$

перевіряємо відніманням

$$-\begin{array}{r} 54273 \\ 16389 \\ \hline 37884 \end{array}$$

Вправа 4. 65938 + 56849 = 122787.

$$+\begin{array}{r}65938\\56849\\\hline 122787\end{array}\quad \text{перевіряємо:}\quad 1)\ -\begin{array}{r}122787\\65938\\\hline 56849\end{array}\quad 2)\ -\begin{array}{r}122787\\56849\\\hline 65938\end{array}$$

Ми додаємо і віднімаємо натуральні числа. А як бути з нулем? Адже нуль не є натуральним числом. Що ми знаємо про додавання нуля? Що для будь-якого числа a правильною є рівність $a + 0 = a$. А якщо нуль відняти? $a - 0 = a$. Отже:

$$a \pm 0 = a.$$

Тобто, при додаванні і відніманні нуля дане число не зміниться. А як ми можемо отримати нуль з допомогою дій над одним числом? Якщо ми від будь-якого числа a віднімемо це ж число a, то в результаті отримаємо нуль, тобто:

$$a - a = 0.$$

IV. Застосування учнями знань та дій у стандартних умовах.

А тепер розв'яжемо такі вправи:

Задача 5. а) 75 – 0 = 75; б) 64 – 64 = 0.

Задача 6. Купили 13 кг картоплі, 3 кг буряків, 4 кг моркви, 5 кг яблук, 6 кг капусти і 2 кг груш. Скільки кілограмів овочів купили? Скільки кілограмів фруктів купили? Скільки купили овочів і фруктів?

Розв'язання. 1) Овочі — це картопля, буряки, морква, капуста. Отже, треба додати вагу цих овочів: 13 + 3 + 4 + 6 = 26 (кг).

2) Фрукти — яблука і груші. Додамо вагу цих фруктів: 5 + 2 = = 7 (кг).

3) Всього купили: 26 + 7 = 33 (кг).

4) Давайте складемо обернену задачу до другого питання. Є такі варіанти:

а) Купили 7 кг фруктів і кілька кілограмів овочів. Разом вийшло 33 кг. Скільки кілограмів овочів купили? (33 – 7 = 26 (кг)).

б) Купили 33 кг овочів і фруктів. Овочів — 26 кг, а фруктів — невідомо. Скільки ж купили фруктів? (33 – 26 = 7 (кг)).

V. Підбиття підсумків уроку. Пред'явлення домашнього завдання.

Сьогодні ми переконалися, що операції додавання і віднімання взаємно обернені, взнали, як називаються числа при додаванні і відніманні та визначили правила їх знаходження.

А додому — повторення теоретичних знань, які вивчались на даному уроці, і такі завдання:

1. Перевірте з допомогою додавання і віднімання попередньо обчислені вирази:
   а) 2379 ± 1837; б) 3001 ∓ 833.
2. Купили 5 зошитів по 14 к. і 1 зошит за 48 к. Скільки коштує вся покупка? Складіть і розв'яжіть обернену задачу.

Завдання 2. Складіть план-конспект уроку формування нових умінь та навичок на тему «Формула коренів квадратного рівняння». Для цього проаналізуйте та визначте структуру складних умінь, що стосуються використання формули коренів квадратного рівняння. Як впливає визначена структура складних умінь на вибір прийомів проведення основних етапів уроку?

Самостійна робота

Складіть конспект та підготуйтеся до проведення уроку засвоєння умінь та навичок на тему «Додавання та віднімання натуральних чисел на координатному промені». Використавши запропоновану схему аналізу уроку, проаналізуйте підготовлений урок.

Література: [4], [15], [17], [24], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47], [50], [55], [58], [59], [60].

Лабораторна робота №11

Урок застосування знань, умінь та навичок

Мета роботи. Узагальнити відомості про урок застосування знань, умінь та навичок, розглянути його структуру; скласти аналіз поданого конспекту уроку.

Основний зміст

Застосування знань — складний психолого-педагогічний процес, що полягає в реалізації засвоєних понять, законів та основних закономірностей теорії в інтелектуальній та практичній діяльності. У школі застосування знань, умінь та навичок є одночасно і засобом, і метою навчально-виховного процесу. Застосування знань, умінь та навичок як засіб навчання тісно переплітається з їх засвоєнням. Використовуючи знання на практиці, в життєвій діяльності, учні переконуються в їхній суспільній цінності, і на основі цього у них формується потреба у засвоєнні знань. Готовність учнів до успішного використання знань на практиці є одним із критеріїв засвоєння цих знань.

Знання є основою формування в учнів навичок та умінь, без яких самостійне їх використання на практиці є немислимим. При формуванні в учнів навичок та умінь треба їх підводити до засвоєння узагальнених способів виконання дій, що створюють можливість перенесення їх на інші навчальні та життєві ситуації.

Завдання на застосування знань, умінь та навичок мають ту спільну ознаку, що учні виконують їх після вивчення відповідного теоретичного матеріалу та засвоєння необхідного комплексу відомостей.

Завдання 1. Використавши запропоновану у тексті лабораторної роботи №9 схему аналізу уроку, проаналізуйте поданий нижче урок.

Тема уроку

Додавання та віднімання натуральних чисел
(Математика, 5 клас)

Мета уроку. Навчити учнів застосовувати знання, уміння та навички щодо додавання і віднімання натуральних чисел для розв'язування математичних задач.

Навчальні задачі.

1. Провести актуалізацію опорних умінь та навичок учнів з використанням усного рахунку.
2. Організувати розв'язування математичних задач на використання знань, умінь та навичок додавати та віднімати натуральні числа.
3. Організувати проведення самостійної роботи щодо розв'язування відповідних темі уроку задач.
4. Провести узагальнення знань учнів. Підбити підсумки уроку, задати домашнє завдання.

Хід уроку

І. Актуалізація опорних знань та дій учнів, необхідних для розв'язування поставлених завдань (проводиться у вигляді усного рахунку).

Заповніть пропуски у квадратних дужках:

1) 45 ± 38 = [83; 7];
2) 48 + [75] = 123;
3) [0] + 90 – 16 = 74;
4) 279 – [264] = 15;
5) [642] – 523 = 119.

Впишіть необхідні числа в кружечках (рис. 11-1).

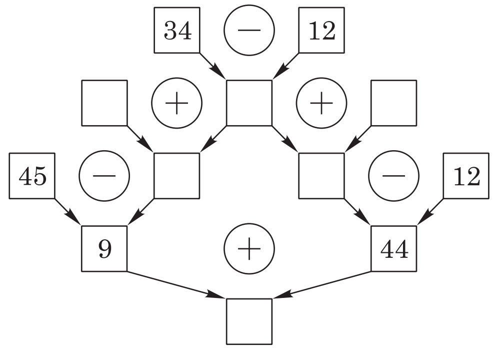


Рис. 11-1

При розв'язуванні вправ учні згадують правила знаходження суми, доданків, від'ємника, зменшуваного, різниці. Далі проводиться перевірка домашнього завдання коментуванням, причому учні формулюють адитивну властивість площ і відрізків.

ІІ. Організація розв'язування задач з використання знань, умінь та навичок проводити операції додавання та віднімання натуральних чисел.

Розв'яжемо такі задачі.

Задача 1. Три дівчинки збирали полуниці. Перша дівчинка зібрала 230 г полуниць, друга — на 20 г більше, ніж перша, але обидві ці дівчинки зібрали разом на 40 г менше, ніж третя дівчинка. Скільки полуниць зібрали ці три дівчинки разом?

(Короткий запис)

I. 230 г
II. Більше на 20 г
III. Більше на 40 г ?

Розв'язання.

1. Друга дівчинка зібрала: 230 + 20 = 250 (г).
2. Разом з першою друга дівчинка зібрала: 230 + 250 = 480 (г).
3. Третя зібрала: 480 + 40 = 520 (г).
4. Разом усі зібрали: 480 + 520 = 1000 (г) = 1 (кг).

Відповідь: 1 кг.

Складемо обернену задачу, внісши зміни в короткий запис, а потім за зміненим записом сформулюємо умову задачі.

I. 230 г
II. Більше на 20 г } 1 кг =1000 г
III. – ?

Три дівчинки зібрали 1 кг полуниць. Перша зібрала 230 г полуниць, друга — на 20 г більше, ніж перша, але обидві ці дівчинки зібрали разом на 40 г менше, ніж третя дівчинка. Скільки полуниць зібрала третя дівчинка?

Розв'язання.

1. 230 + 20 = 250 (г).
2. 230 + 250 = 480 (г).
3. Третя дівчинка зібрала: 1000 – 480 = 520 (г).

Відповідь: 520 г.

Задача 2. Квартира складається з трьох кімнат. Перша кімната на 5 $м^2$ менша від другої, а друга — на 8 $м^2$ менша за третю. Знайдіть площу трьох кімнат разом, якщо площа найменшої з них становить 10 $м^2$.

(Оскільки площа першої кімнати менша за площу другої, а площа другої менша за площу третьої, то найменша кімната — перша).

I. 10 $м^2$, менша на 5 $м^2$
II. Менша на 8 $м^2$ } ?
III. ?

Розв'язання.

1. Площа II кімнати: 10 + 5 = 15 ($м^2$).
2. Площа III кімнати: 15 + 8 = 23 ($м^2$).
3. Площа 3-х кімнат: (10 + 15) + 23 = 25 + 23 = 48 ($м^2$).

Відповідь: 48 $м^2$.

Складемо обернену задачу.

Квартира складається з трьох кімнат, площі яких разом становлять 48 $м^2$. Знайдіть площу першої кімнати, якщо площа другої кімнати на 8 $м^2$ менша від третьої, площа якої 23 $м^2$.

Розв'язання.

1. Площа I і II кімнат: 48 – 23 = 25 ($м^2$).
2. II кімната: 23 – 8 = 15 ($м^2$).
3. I кімната: 25 – 15 = 10 ($м^2$).

ІІІ. Узагальнення та систематизація результатів роботи. Організація проведення самостійної роботи.

Умови завдань для проведення самостійної роботи є такими:

I варіант

1. Першого дня зорали 127 га, це на 32 га менше, ніж другого дня. Скільки гектарів землі зорали за 2 дні?
(127 + 32 = 159 (га), 127 + 159 = 286 (га), відповідь: 286 га).

II варіант

1. Першого дня зорали 159 га, це на 32 га більше, ніж другого дня. Скільки гектарів землі зорали за 2 дні?
(159 – 32 = 127 (га), 159 + 127 = 286 (га), відповідь: 286 га).

I варіант

2. Відрізок AD розділений точками B і C на три відрізки, де $AB = 30$ см, $BC = 25$ см, $CD = 52$ см. Знайдіть довжини відрізків AD, AC і BD, причому хоч одну довжину з них — через операцію віднімання.
($AD = 30 + 25 + 52 = 107$ (см); $AC = 30 + 25 = 55$ (см); $BD = 107 – 30 = 77$ (см)).

II варіант

2. Відрізок AD розділений точками B і C на три відрізки, де $AB = 59$ см, $BC = 23$ см, $CD = 77$ см. Знайдіть довжини відрізків AD, AC і BD, причому хоч одну довжину з них — через операцію віднімання.
   ($AD = 59 + 23 + 77 = 159$ (см); $AC = 59 + 21 = 82$ (см); $BD = 159 - 59 = 100$ (см)).
3. (На оцінку «відмінно»). Знайдіть число, яке закінчується цифрою 7, коли відомо, що воно більше за 131, але менше від 141.
   ($131 < 137 < 141$, відповідь: 137).

IV. Підбиття підсумків уроку. Пред'явлення домашнього завдання.

Запишіть домашнє завдання на наступний урок.

Задача 1. На залізничній станції стояли три товарних поїзди. У першому поїзді було 30 вагонів, у другому — на 5 вагонів більше, ніж у першому. Скільки всього вагонів було в трьох поїздах, якщо в першому поїзді на 10 вагонів менше, ніж у третьому?

Завдання 2. Складіть план-конспект уроку застосування умінь та навичок на тему «Розв'язування квадратних рівнянь». Для цього проаналізуйте та визначте структуру складних умінь, що стосуються розв'язування квадратних рівнянь. Як впливає визначена структура складних умінь на вибір задачного матеріалу та прийомів проведення основних етапів уроку?

Самостійна робота

Складіть конспект та підготуйтеся до проведення уроку застосування знань, умінь та навичок на тему «Операції над натуральними числами» (Математика, 5 клас). Використавши запропоновану схему аналізу уроку, проаналізуйте підготовлений урок.

Література: [4], [15], [17], [24], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47], [50], [55], [58], [59], [60].

Лабораторна робота №12

Урок узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок

Мета роботи. Упорядкувати відомості про урок узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок, розглянути його структуру; скласти аналіз поданого конспекту уроку.

Основний зміст

На уроках узагальнюючого повторення або уроках узагальнення та систематизації, які проводяться після вивчення найважливіших розділів програми, у навчальному матеріалі виділяють найбільш загальні та суттєві поняття, закони або закономірності, основні теорії та ведучі ідеї науки, встановлюють причинно-наслідкові зв'язки та відношення між найважливішими явищами, процесами, подіями.

Завдання 1. Використавши запропоновану у тексті лабораторної роботи №9 схему аналізу уроку, проаналізуйте поданий нижче урок.

Тема уроку

Доведення числових нерівностей
(Алгебра, 9 клас)

Мета уроку. Узагальнити та систематизувати знання, уміння та навички учнів доводити нерівності різними способами (за означенням і за властивостями числових нерівностей).

Навчальні задачі.

1. Провести актуалізацію опорних умінь та навичок учнів, мотивувати їхню навчальну діяльність.
2. Організувати розв'язування математичних задач на узагальнення та систематизацію знань, умінь та навичок доводити нерівності.
3. Провести узагальнення знань учнів. Підбити підсумки уроку, задати домашнє завдання.

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань та дій учнів, необхідних для розв'язування поставлених завдань (проводиться у вигляді усного теоретичного опитування та узагальнення фактів).

Учитель задає питання:

1. Дати означення нерівності $a > b$.
2. Дати означення нерівності $a < b$.

Слід згадати теореми, які виражають властивості числових нерівностей, а також теореми про почленне додавання і множення числових нерівностей.

Теорема 1. *Якщо $a > b$, то $b < a$; якщо $a < b$, то $b > a$.*

Теорема 2. *Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.*

Теорема 3. *Якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.*

Теорема 4. *Якщо $a < b$ і c – додатне число, то $ac < bc$. Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.*

Таким чином, якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то дістанемо правильну нерівність; якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то дістанемо правильну нерівність.

Варто також згадати і наслідок.

Наслідок. *Якщо a і b — додатні числа і $a < b$, то* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Теорема 5. *Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.*

Зауважуємо, що дана теорема справедлива і у випадку почленного додавання більше від двох нерівностей. Таким чином, якщо додати почленно правильні нерівності одного знака, то дістанемо правильну нерівність.

Теорема 6. *Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d — додатні числа, то $ac < bd$.*

Слід відмітити, що теорема справджується і для почленного множення більше від двох нерівностей такого самого виду. Таким чином, якщо помножити почленно правильні нерівності одного знака, ліві і праві частини яких – додатні числа, то дістанемо правильну нерівність.

Зауважимо, що коли в нерівностях $a < b$ і $c < d$ серед чисел a, b, c, d є від'ємні, то нерівність $ac < bd$ може стати неправильною.

Наслідок. *Якщо числа a і b — додатні і $a < b$, то $a^n < b^n$ (n — натуральне число).*

II. Мотивація навчальної діяльності учнів.

Учням цікаво ознайомитися з деякими найпростішими методами доведення нерівностей, що дасть змогу ширше застосовувати їх під час розв'язання прикладних задач. Це, перш за все, спосіб, який базується на означенні поняття нерівності і полягає у визначенні знака різниці лівої і правої частин нерівності.

Повідомляємо тему й мету уроку.

III. Узагальнення та систематизація умінь і навичок доводити нерівності за означенням та властивостями числових нерівностей.

1. *Колективне розв'язування вправи.* (Один учень працює біля дошки, інші – на робочих місцях. Учитель контролює роботу учнів).

Довести, що $25b + \frac{1}{b} \le -10$ при $b < 0$.

Доведення. Оцінюємо різницю лівої і правої частин нерівності. Маємо:

$$25b+\frac{1}{b}+10=\frac{25b^2+10b+1}{b}=\frac{(5b+1)^2}{b}.$$

Чисельник даного дробу при будь-якому значенні b є числом невід'ємним. Тому $\frac{(5b+1)^2}{b} \le 0$ при $b < 0$. Отже, $25b + \frac{1}{b} \le -10$ при $b < 0$.

2. *Розв'язування вправи з коментуванням.* Один з учнів коментує доведення нерівності.

Довести, що якщо $a + b + c \ge 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$, в якій суму $a^3 + b^3$ доповнимо до куба суми. Отримаємо: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc = (a+b)^3 - 3ab(a + b + c) + c^3$. Розклавши суму кубів $(a + b)^3 + c^3$ на множники, одержимо: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = ((a + b) + c)((a + b)^2 - (a + b)c - c^2) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac) = \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2)$.

За умовою, $a + b + c \geq 0$, тому одержаний вираз є невід'ємним. Отже, нерівність доведено.

3. Самостійне розв'язування вправ.

Наступний цикл вправ дасть змогу вчителеві перевірити знання, вміння і навички учнів доводити нерівності за властивостями числових нерівностей.

Цикл вправ

1. Чи правильно для додатних чисел a і b, що:
   а) коли $a > b$, то $a^2 > b^2$; б) коли $a^2 > b^2$, то $a > b$?
2. Доведіть, що коли $a > b$, то:
   а) $a + 5 > b + 3$; б) $1 - a < 2 - b$.
3. Доведіть, що коли $a > b > 0$, то:
   а) $5a > 4b$; б) $-4a < -2b$.
4. Доведіть, що:
   а) коли $a \leq b$ і c — додатне число, то $a + c \leq b + c$;
   б) коли $a \leq b$ і c — додатне число, то $ac \leq bc$;
   в) коли $a \leq b$ і c — від'ємне число, то $ac \geq bc$.
5. Доведіть, що:
   а) коли $a \leq b$ і $c \leq d$, то $a + c \leq b + d$;
   б) коли $0 \leq a \leq b$ і $0 \leq c \leq d$, то $ac \leq bd$.
6. Доведіть, що $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c$.

Доводяться дані нерівності таким чином.

1. Якщо числа a і b — додатні і має місце нерівність $a > b$, то помноживши її саму на себе, отримаємо нерівність $a^2 > b^2$, яка є правильною.
   Якщо маємо нерівність $a^2 > b^2$ і числа a і b — додатні, то поділивши дану нерівність на $a > b$, одержимо правильну нерівність $a > b$.
   Зауважуємо, що на основі даної вправи можна сформулювати критерій: для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $a^2 > b^2$ тоді і тільки тоді, коли $a > b$.
2. а) Якщо $a > b$ і відомо, що $5 > 3$, то додавши почленно ці нерівності, одержимо нерівність $a + 5 > b + 3$, яку й треба було довести.
   б) Якщо $a > b$, то помноживши цю нерівність на -1 і змінивши знак на протилежний, отримаємо таку правильну нерівність: $-a < -b$. Додавши її почленно до очевидної нерівності $1 < 2$, отримаємо таку нерівність: $1 - a < 2 - b$.

3. Нерівності з даної вправи доводяться аналогічно до попередніх, використовуючи властивості числових нерівностей.
4. Слід відмітити, що доведення нерівностей вправи 4 подібне до доведення теорем, які виражають властивості числових нерівностей. Але тут ми маємо справу з нестрогими нерівностями.
   а) Перетворимо різницю $(a + c) - (b + c)$. Маємо: $(a + c) - (b + c) = a - b$.
   За умовою, $a \leq b$, тому $a - b$ — не додатне число. Отже, і різниця $(a + c) - (b + c)$ не є додатним числом. Звідси випливає, що $a + c \leq b + c$.
   б) Подамо різницю $ac - bc$ у вигляді добутку: $ac - bc = c(a - b)$.
   Оскільки $a \leq b$, то $a - b$ є числом від'ємним або дорівнює нулю. Якщо $c > 0$, то добуток $c(a - b) \leq 0$, і, отже, $ac \leq bc$.
   в) Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ невід'ємний, і, отже, $ac \geq bc$.
5. а) Додавши до обох частин нерівності $a \leq b$ число c, дістанемо $a + c \leq b + c$. Додавши до обох частин нерівності $c \leq d$ число b, дістанемо $b + c \leq b + d$. З нерівностей $a + c \leq b + c$ і $b + c \leq b + d$ випливає, що $a + c < b + d$.
   б) Помноживши обидві частини нерівності $0 \leq a \leq b$ на додатне число c, дістанемо $0 \leq ac \leq bc$. Помноживши обидві частини нерівності $0 \leq c \leq d$ на додатне число b, дістанемо $0 \leq bc \leq bd$. З нерівностей $0 \leq ac \leq bc$ і $0 \leq bc \leq bd$ випливає, що $ac \leq bd$.
6. Доведення. Розглянемо різницю $(a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14) - (2a + 12b + 6c)$. Згрупувавши члени цієї різниці, отримаємо:
   $(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + 1 = (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1$. Але $(a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + 1 > 0$ при будь-яких значеннях a, b і c. Отже, дану нерівність доведено.

IV. Повторення та систематизація основних теоретичних положень.

Для кращого розуміння і запам'ятовування теорем, що виражають властивості числових нерівностей, доцільно використовувати на уроках таку таблицю.

Теорема 1. Якщо $a > b$, то $b < a$; якщо $a < b$, то $b > a$.
Теорема 2. Якщо $a < b$ і $b < c$, **то** $a < c$.
Теорема 3. Якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.
Теорема 4. Якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$. Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.
Теорема 5. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.
Теорема 6. Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d — додатні числа, то $ac < bd$.

V. Підбиття підсумків уроку та пред'явлення домашнього завдання.

Повторили означення і властивості числових нерівностей і систематизували та узагальнили знання, уміння та навички доведення нерівностей. Домашнє завдання: вправи, які не розглянули з циклу вправ або аналогічні до них.

Завдання 2. Складіть план-конспект уроку систематизації знань, умінь та навичок за результатами вивчення розділу «Квадратні рівняння». Для цього проаналізуйте та визначте структуру знань та складних умінь, що стосуються поняття про квадратні рівняння та їх розв'язування. Як впливає визначена структура знань та складних умінь на вибір прийомів проведення основних етапів уроку?

Самостійна робота

1. **Складіть конспект та підготуйтеся до проведення уроку узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок на тему «Функції та їхні графіки» (Алгебра, 9 клас). Використавши запропоновану схему аналізу уроку, проаналізуйте підготовлений урок.**
2. **Використавши з тексту лабораторної роботи №4 «Задачі як засіб навчання математики» ідею розв'язування задачі: «*Визначити властивості функції* $y = ax^2 + bx + c$ *та проаналізувати залежність зміни властивостей функції та положення її графіка від коефіцієнтів a, b та c*», складіть конспект та підготуйтеся до проведення уроку узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок учнів на тему «Властивості лінійної функції» (Алгебра, 8 клас).**

Література: [4], [7], [8], [9], [15], [17], [24], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47], [50], [55].

Лабораторна робота №13

Комбінований урок

Мета роботи. Систематизувати знання студентів про методику проведення комбінованого уроку, розглянути його структуру; скласти аналіз поданого конспекту уроку.

Основний зміст

Комбінований урок має дві або декілька близьких за своїм значенням дидактичних цілей. Наприклад: перевірка раніше засвоєних знань та засвоєння нових знань; узагальнення та систематизація знань та засвоєння умінь та навичок і т. ін. При плануванні комбінованого уроку слід визначити, які типи уроків комбінуються. При цьому один (або кілька) етап може випадати зі структури комбінованого уроку, а інші етапи можуть об'єднуватися та вдосконалюватися.

Завдання 1. Використавши запропоновану у тексті лабораторної роботи №9 схему аналізу уроку, проаналізуйте поданий нижче урок.

Тема уроку

Числові нерівності

(Алгебра, 9 клас)

Мета уроку. Ознайомити учнів з поняттям числової нерівності; навчити їх використовувати означення нерівності при розв'язуванні задач.

Навчальні задачі.

1. Провести актуалізацію опорних умінь та навичок учнів, мотивувати їхню навчальну діяльність.
2. Організувати введення нового матеріалу та первинне розв'язування математичних задач на використання нового матеріалу.
3. Організувати розв'язування задач продуктивного типу на використання нового матеріалу у змінених умовах.
4. Провести узагальнення знань учнів. Підбити підсумки уроку, задати домашнє завдання.

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань, умінь та навичок учнів, необхідних для засвоєння змісту нового матеріалу.

Говоримо, що можемо порівняти будь-які числа a і b і результат порівняння записати у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки =, <, >. Для довільних чисел a і b виконується одне і тільки одне з відношень: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Пропонуємо учням розглянути такі приклади.

1. Порівняємо звичайні дроби $\frac{7}{10}$ і $\frac{8}{9}$. Для цього зведемо їх до спільного знаменника (як ми робили це в V класі): $\frac{7}{10} = \frac{63}{90}$; $\frac{8}{9} = \frac{80}{90}$. Оскільки $63 < 80$, то $\frac{7}{10} < \frac{8}{9}$.
2. Порівняємо десяткові дроби 2,458 і 2,4579. Цифри в розрядах одиниць, десятих і сотих збігаються, а в розряді тисячних в першому дробі записано цифру 8, а в другому — цифру 7. Оскільки $8 > 7$, то $2{,}458 > 2{,}4579$.
3. Порівняємо звичайний дріб $\frac{3}{4}$ і десятковий дріб 0,75. Перетворивши дріб $\frac{3}{4}$ у десятковий, дістанемо, що $\frac{3}{4} = 0{,}75$.
4. Порівняємо від'ємні числа –17 і –31. Модуль першого числа менший від модуля другого. Отже, перше число більше від другого.

II. Мотивація навчальної діяльності учнів.

Залежно від конкретного виду чисел ми використали той чи інший спосіб порівняння. Але зручно мати такий спосіб порівняння чисел, який охопив би усі випадки. Повідомляємо тему й мету уроку.

III. Пояснення нового матеріалу.

Учитель зауважує, що спосіб, який охоплює розглянуті вище випадки, полягає в тому, що утворюють різницю порівнюваних чисел і з'ясовують, чи буде вона додатним числом, від'ємним числом або нулем. Цей спосіб порівняння чисел підтверджується таким означенням.

Означення. *Число a більше від числа b, якщо різниця a – b — додатне число; число a менше від числа b, якщо різниця a – b — від'ємне число.*

Зауважимо, що коли різниця $a - b$ дорівнює нулю, то числа a і b — рівні.

На координатній прямій більше число зображується точкою, що лежить правіше, а менше — точкою, що лежить лівіше.

Нехай a і b — деякі числа. Позначимо різницю $a - b$ буквою c. Оскільки $a - b = c$, то $a = b + c$. Коли c — додатне число, то точка з координатою $b + c$ лежить справа від точки з координатою b, а якщо c — від'ємне число, то зліва. Отже, коли $a > b$, то точка з координатою a лежить справа від точки з координатою b, а коли $a < b$ — зліва.

Покажемо, як наведене означення можна використовувати при розв'язуванні задач.

IV. Первинне застосування нового матеріалу та застосування нового матеріалу у змінених умовах.

1. Колективне розв'язування вправи.
Довести, що сума квадратів будь-яких двох різних чисел більша від їх подвоєного добутку.

Нехай a і b — довільні різні числа. Потрібно довести, що $a^2 + b^2 > 2ab$. Перетворимо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Різницю $(a^2 + b^2) - 2ab$ ми подали у вигляді квадрата деякого виразу. Оскільки $a \neq b$, то $a - b \neq 0$ і $(a - b)^2 > 0$, а тому нерівність $a^2 + b^2 > 2ab$ правильна при будь-яких a і b, не рівних між собою.

Зауваження. Якщо $a = b$, то $a^2 + b^2 = 2ab$, і, враховуючи доведену нерівність, маємо нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$ для всіх a і b.

2. Коментоване розв'язування вправи.
Довести, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

$$(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2.$$

Коментування може бути таким: утворимо різницю лівої і правої частин нерівності і перетворимо її, враховуючи, що в лівій частині ми маємо різницю квадратів:

$$(7p - 1)(7p + 1) - 49p^2 = 49p^2 - 1 - 49p^2 = -1.$$

Відомо, що будь-яке від'ємне число менше від нуля. Тому має місце нерівність: $-1 < 0$. Отже, $(7p - 1)(7p + 1) - 49p^2 < 0$ при довільних значеннях p. Таким чином: $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$. Нерівність доведено.

3. Самостійне розв'язування вправ.

Крім інших тренувальних вправ бажано пропонувати учням цикл вправ на доведення нерівностей з метою вироблення вмінь і навичок доводити нерівності за означенням.

Вправи можуть бути такими.

1. $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$.

2. $(b - 2)^2 > b(b - 4)$.

3. $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$.

4. $a\,(a + b) \geq ab$.

5. $2bc < b^2 + c^2$, де $b \neq c$.

6. $9a + \dfrac{1}{a} \geq 6$ при $a > 0$.

7. $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$.

8. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$ і $b \geq 0$.

9. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ при $ab > 0$.

Розв'язувати дані вправи найпростіше так:

1. $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$.

$3(a + 1) + a - 4(2 + a) = 3a + 3 + a - 8 - 4a = 4a - 5 - 4a = -5$; $-5 < 0$, отже, $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$.

2. $(b - 2)^2 > b(b - 4)$.

$(b - 2)^2 - b(b - 4) = b^2 - 4b + 4 - b^2 + 4b = 4$; $4 > 0$, отже, $(b - 2)^2 > b(b - 4)$.

3. $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$.

$(5x - 1)(5x + 1) - 25x^2 - 2 = 25x^2 - 1 - 25x^2 - 2 = -3$; $-3 < 0$.

Тому $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$.

4. $a\,(a + b) \geq ab$.

$a(a + b) - ab = a^2 + ab - ab = a^2$.

Відомо, що квадрат будь-якого числа є числом невід'ємним. Тому $a^2 \geq 0$, а отже, і $a(a + b) \geq ab$.

5. $2bc < b^2 + c^2$; $b \neq c$.

$2bc - b^2 - c^2 = -(b^2 - 2bc + c^2) = -(b - c)^2 < 0$, бо $b - c \neq 0$. Отже, $2bc < b^2 + c^2$.

6. $9a + \dfrac{1}{a} \geq 6$ при $a > 0$.

$9a + \dfrac{1}{a} - 6 = \dfrac{9a^2+1-6a}{a} = \dfrac{(3a-1)^2}{a} \geq 0$; отже, $9a + \dfrac{1}{a} \geq 6$.

7. $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$.

$(x + 3)^2 - 2x - 4(x + 2) = x^2 + 6x + 9 - 2x - 4x - 8 = x^2 + 1 > 0$.

Отже, $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$.

8. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$ і $b \geq 0$.

Утворимо різницю лівої і правої частин нерівності у вигляді: $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$. Перетворимо ліву частину отриманої нерівності так:

$$a+b-2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2.$$

Очевидно, що останній вираз є невід'ємним. Отже, $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Інформуємо учнів, що дана нерівність називається нерівністю Коші.

9. $(a+b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ при $ab > 0$.

$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) - 4 = (a+b)\frac{a+b}{ab} - 4 = \frac{(a+b)^2-4ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0.$$

Отже, $(a+b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$.

V. Підбиття підсумків уроку та пред'явлення домашнього завдання.

Повторили порівняння звичайних і десяткових дробів, цілих чисел. Засвоїли означення порівняння двох чисел. Навчилися використовувати означення при доведенні нерівностей.

Домашнє завдання: додому пропонуються завдання, що залишилися з циклу вправ.

Завдання 2. Відмітьте та проаналізуйте особливості організації навчальної діяльності учнів на прикладах поданих фрагментів уроків. Складіть конспекти фрагментів уроків з розділу «Нерівності» (Алгебра, 9 клас), де були б використані такі ж способи організації діяльності учнів.

Фрагмент 1. Можливий прийом спільно розподіленої навчальної діяльності учнів при вивченні теореми Вієта (Алгебра, 9 клас) — спосіб організації навчальної діяльності учнів, при якій різні аспекти досліджуваного питання розглядаються різними групами учнів класу (клас розбивається на чотири групи).

Весь клас одержує завдання: розв'язати квадратне рівняння, знайти суму й добуток його коренів, кожній з виділених груп дається одне з рівнянь:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 + x - 2 = 0$;

в) $x^2 + 7x + 12 = 0$; г) $x^2 - x - 6 = 0$.

Учитель дає вказівки з оформлення запису в зошиті: розділити сторінку навпіл, у лівій частині сторінки розв'язати запропоноване рівняння, записати виконання всіх завдань. Наприклад:

$$x^2 - 5x + 4 = 0,\ D = 25 - 16 = 9 > 0,\ x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2};\ x_1 = 1,\ x_2 = 4,$$

$x_1 + x_2 = 5,\ -5 = p,\ x_1 \cdot x_2 = 4,\ \ 4 = q.$

Учні кожної групи виконують завдання, обговорюють розв'язування. Після того, як групи розв'язали завдання, вони одержують друге завдання: зрівняти суму коренів рівняння із другим коефіцієнтом, а добуток коренів — із вільним членом.

Далі організовується фронтальне обговорення отриманих результатів. Тут можливе обговорення таких питань:

1) Якого виду задані квадратні рівняння?

2) Який висновок можна зробити із другого завдання?

3) Сформулюйте властивість, якою володіє, можливо, будь-яке квадратне рівняння.

Підсумком обговорення буде формулювання теореми Вієта.

На другому етапі вивчення теореми Вієта вчитель пропонує учням розглянути доведення теореми за навчальними посібниками [8], [32]. Тут може бути використаний інший прийом організації навчальної діяльності, а саме, робота учнів парами, при якій здійснюються взаємодопомога, взаємний контроль, взаємне оцінювання, оскільки учні повинні відповісти один одному на питання (при відповіді на питання заповнити праву половину сторінки):

1) Чому дорівнює дискримінант наведеного квадратного рівняння?

2) Який знак дискримінанта, якщо рівняння має два різних корені?

3) Як записати корінь рівняння в загальному вигляді?

4) Чому дорівнює добуток коренів?

5) Порівняйте отриману суму із другим коефіцієнтом, а добуток — із вільним членом. Який висновок можна зробити?

Фрагмент 2. На уроках математики необхідно приділяти увагу формуванню вміння працювати самостійно із книгою, яке належить до загальнонавчальних умінь. Так, на уроці алгебри в VIII класі з теми «Степінь степеня» може бути використаний такий методичний прийом. Учням дається завдання прочитати відповідний пункт тексту з підручника. Після цього учні мають відповісти на питання й розв'язати завдання.

Учитель пропонує, наприклад, такі питання:

1) Що називається степенем числа a?

2) Як формулюється основна властивість степеня?

3) Що називається добутком?

4) Як піднести вираз до степеня?

5) Чи правильні рівності $(a^3)^2 = a^6$; $(y^2)^3 = y^8$; $(c^4)^2 = c^6$? Чому?

6) Як піднести степінь до степеня?

7) Що більше: $(-3)^9$ чи $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $(-2)^7$ чи 1^{11}; $(-3)^3$ чи 0; $(-3)^4$ чи 0; 3^3 чи $(-3)^3$?

Відповіді учнів на ці питання дають можливість здійснити зворотний зв'язок і встановити рівень засвоєння матеріалу і його розуміння учнями.

Фрагмент 3. При роботі з текстом підручника виникає небезпека механічного запам'ятовування матеріалу. Щоб уникнути цього, важливо звернути увагу учнів на мету вивчення матеріалу; указати їм, що варто запам'ятати, а що взяти до відома; дати інструкцію з роботи з текстом підручника, звернувши їхню увагу на те, що варто записати в зошиті.

Наведемо приклад такого методичного прийому при вивченні перетворення добутку двох многочленів у многочлен стандартного виду.

Перед учнями ставляться цілі:

- засвоїти нові знання;
- скласти короткий запис вивченого матеріалу.

Робота починається з бесіди, в якій учитель звертає увагу учнів на основні моменти їхньої самостійної роботи з текстом підручника, дає рекомендації (перелік рекомендацій написаний на дошці або спроектований на екран).

Розділити текст на значеннєві частини:
- виписати нові поняття, якщо вони є;
- встановити зв'язок з раніше вивченим матеріалом;
- з'ясувати, що є головним у тексті;
- розглянути рисунок до тексту;
- встановити зв'язок буквеного запису й графічної ілюстрації.

Учитель дає час для самостійного читання.

Наскільки засвоєний матеріал учнями при самостійному читанні, який рівень володіння уміннями, перерахованими в рекомендації, перевіряє вчитель у фронтальній бесіді.

Бесіда дозволяє кожному учневі перевірити себе, з'ясувати, чи правильно він користувався рекомендаціями.

Після першого прочитання вчитель проводить більш глибоку роботуз кожним значеннєвим фрагментом тексту, і підсумок записується в зошит після колективного обговорення:
- двічі використовується розподільний закон множення щодо додавання;
- креслення показує, що порядок заміни дужок несуттєвий;
- висновок про тотожну рівність добутку многочленів і суми добутків;
- дається алгоритм множення многочлена на многочлен.

Учитель підкреслює, що не потрібно запам'ятовувати змінні, які входять до многочлена, і просить записати в зошитах свої змінні, відмінні від змінних у підручнику.

Завдання 2. Складіть план-конспект комбінованого уроку на тему «Квадратична функція». Які саме типи уроків ви будете комбінувати? Проаналізуйте та визначте структуру знань та складних умінь, формування яких передбачається. Як впливає визначена структура знань складних умінь на вибір задачного матеріалу та прийомів проведення основних етапів уроку?

Самостійна робота

Складіть конспект та підготуйтеся до проведення комбінованого уроку на тему «Арифметична прогресія» (Алгебра, 9 клас). Зверніть увагу на використання різних способів організації навчальної діяльності учнів під час проведення уроку. Використавши запропоновану схему аналізу уроку, проаналізуйте підготовлений урок.

Література: [4], [7], [8], [9], [15], [17], [24], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47], [50], [55].

Лабораторні роботи, що розкривають методичні особливості навчання математичних методів у школі

У пропонованих лабораторних роботах розглядаються функції методів математики, їх зміст і місце в шкільному предметі математики й методичні особливості ефективного використання методів математики в процесі навчання.

Перш ніж перейти до безпосереднього розгляду математичних методів, зробимо кілька зауважень про функції й зміст поняття «метод» у процесі навчання взагалі. Для цього треба відповісти на наступні питання:

1) Що розуміється під методом і які компоненти в ньому можна виділити?

2) Чому потрібно й важливо спеціально вивчати в школі та у вищих навчальних закладах певні системи елементів навчального матеріалу на рівні методу?

3) Яким чином варто конкретизувати загальне поняття «метод» у випадку звертання до методів математики, що досліджуються у школі?

Зупинимося на кожному з перерахованих питань.

1. У теорії наукового пізнання *метод* трактується як система послідовних дій, які приводять до досягнення результату, що відповідає визначеній меті. Ця послідовність дій може мати на меті як теоретичний результат, так і практичну реалізацію. Виходить, метод виступає як спосіб пізнання, спосіб практичної діяльності, які завжди спрямовані на певний об'єкт; тому з будь-яким методом обов'язково співвідносять його об'єкт (пізнаваний, перетворений).

Таким чином, у методі виділяють дві сторони: *об'єктивну* та *суб'єктивну*. Перша звернена до гносеологічної природи методу й означає, що він (метод) заснований на знанні сутності й закономірностей пізнаваного або перетвореного об'єкта, адекватний сутності об'єкта. Друга сторона пов'язана з діяльністю із застосування методу, з конкретною метою діяльності над досліджуваним об'єктом.

Виділення в методі двох зазначених сторін створює умови для розв'язування питання про його компоненти. На нашу думку, відповідь на це питання не є однозначною. Вона залежить від того, яка зі сторін методу в тому або іншому випадку є провідною. Тому можна говорити про компоненти методу, пов'язані, по-перше, з об'єктивною його стороною (назвемо їх гносеологічними компонентами); по-друге, із суб'єктивною стороною (діяльнісні компоненти). Сукупність гносеологічних і діяльнісних компонентів і дає нам поняття про компоненти методу в широкому змісті.

Що ж мають на увазі, говорячи про компоненти методу?

Розглянемо це питання з погляду гносеології й з погляду діяльності.

Об'єктивна сторона методу, як уже підкреслювалося, пов'язана із проникненням у сутність і закономірності об'єкта, що пізнається і перетворюється. Необхідною умовою цього є певна система знань, без яких метод не існує. Така система повинна містити, по-перше, вихідні знання про об'єкт, до якого застосовується метод, його властивості (основні поняття, властивості понять, зв'язок між ними); по-друге, знання, отримані в ході перетворення або вивчення об'єкта (зміна властивостей об'єкта під впливом дій над ним, встановлення невідомих до цього властивостей). Помітимо, що зазначені знання певною мірою залежать від передбачуваного результату використання методу, що відповідає поставленій меті. По-третє, система повинна включати знання про сферу застосувань методу (коло завдань, розв'язуваних з допомогою даного методу, їхні види й т.ін.); по-четверте, знання про особливості його використання залежно від сфери застосувань. Перераховані компоненти й становлять гносеологічну основу методу.

До діяльнісних компонентів методу належить, з одного боку, певна система дій (що залежить від конкретної мети діяльності над досліджуваним об'єктом), реалізація якої веде до досягнення результату (відповідного до поставленої мети), з іншого боку, — засоби здійснення діяльності, основу яких становить ця система дій (інтелектуальні, практичні, предметні).

2. Звернемося до шкільного предмета математики. Як відомо, у ньому виділяються теоретичні знання, якими повинні володіти учні, і завдання, що виступають як засіб засвоєння теоретичних знань і як спеціальний об'єкт, ціль вивчення для формування математичної діяльності. Серед інших елементів теоретичні знання включають методи математики як науки (загальний дедуктивний метод математики й прикладні методи: координатний, векторний, методи геометричних перетворень, рівнянь і нерівностей та ін.).

Чому ж важливе засвоєння учнями методів математики й розуміння методичних особливостей цього засвоєння? Відповідь на це питання припускає встановлення їхнього загальноосвітнього, світоглядного значення.

З освітньої точки зору знайомство й оволодіння методом дозволяє учням і студентам зрозуміти, яким же методом наука математика одержує достовірні для неї факти. В одних науках таким методом може бути коректно поставлений експеримент (наприклад, у фізиці), в інших — правильно організоване спостереження (наприклад, у біології). У математиці факт одержує статус наукового (достовірного) тільки в тому випадку, якщо він **доведений** одним із математичних методів. Розуміння цієї особливості науки математики є необхідною умовою її свідомого вивчення.

Із загальноосвітньої, змістовної точки зору методи математики виконують у певній мірі й функцію узагальнення, систематизації тих знань, які з даним методом так чи інакше пов'язані. Уже наявні знання в результаті осмислення їх через призму методу «повертаються» до учнів як би з іншого боку, що може сприяти їх поглибленню, включенню в нові зв'язки, відносини й т. ін. Крім того, завдяки вивченню методів математики учні одержують конкретні прийоми розв'язування ряду математичних задач.

Світоглядне значення методів математики визначається в першу чергу їх інтегруючою функцією: з одного боку, з'являється можливість через застосування методів показати проникнення математики в інші науки, у практику; з іншого боку, виділити те загальне, що поєднує всі методи математики (певною мірою єдиний підхід у застосуванні, етапи застосування методів), а через них — складові шкільного предмета математики (алгебру, геометрію, елементи математичного аналізу).

Вивчення методів математики важливе й у методологічному відношенні, тому що представляє можливість для розкриття змісту поняття «метод» і виділення компонентів методу.

3. Відповідно до перерахованих вище компонентів методу конкретизація загального поняття «метод» при звертанні до методу математики, що досліджується в школі, може йти за такими лініями: уточнення мети методу; встановлення системи знань,які складають гносеологічну основу методу; визначення певної послідовності дій, засобів здійснення діяльності, реалізація яких приведе до досягнення мети.

Але розкриття тільки змісту методів математики недостатньо для того, щоб установити хоча б деякі загальні положення методики їх формування в учнів. Варто також визначити, формування яких компонентів конкретного методу повинне передувати засвоєнню інших, які засоби при цьому доцільно використати й т. д.

Розв'язування зазначеного методичного завдання пов'язане з тими функціями, які виконують методи математики в процесі навчання: з одного боку, методи математики виступають як мета вивчення, а з іншого, як засіб вивчення математичного матеріалу (у тому числі — засіб розв'язування задач). Очевидно, що деякий метод може стати одним із засобів вивчення математики лише в тому випадку, якщо учні вміють застосувати його при розв'язуванні конкретно-практичних задач. А це означає, що в процесі формування методу математики вчитель й учні неминуче зіштовхуються з необхідністю розв'язання принаймні двох задач (для учнів це навчальні задачі). Перша задача полягає в тому, щоб учні опанували змістовною стороною методу, а друга полягає в навчанні застосування методу.

Оскільки з будь-яким методом пов'язані його компоненти, то з'являється можливість виділення тих із них, які більшою мірою повинні бути «задіяні» у процесі розв'язування двох зазначених задач.

На нашу думку, розв'язання першого завдання припускає засвоєння учнями діяльнісних компонентів методу (відповідної системи дій) і тих гносеологічних компонентів, без опори на які не можуть бути реалізовані діяльнісні компоненти. Друге завдання (навчання застосування методу) може бути розв'язане за умови, якщо учні засвоять гносеологічні компоненти методу, пов'язані з установленням нових властивостей досліджуваного об'єкта, видів задач, їх особливостей, навчаться вибирати метод, який доцільно використати при розв'язуванні конкретного завдання: тому навчання методу — це навчання вибору методу.

Помітимо, що розв'язування двох зазначених завдань здійснюється у взаємозв'язку і являє собою досить тривалий процес, у якому не можна чітко виділити етапи розв'язування кожного завдання. Результатом цього процесу повинне бути засвоєння школярами методів математики на рівні застосування, що передбачено програмою для середньої школи.

Лабораторні роботи, присвячені даній темі, показують, як деякі загальні методи математики реалізовані в шкільних підручниках математики і як можливо розкрити їхню сутність учням.

Доцільність розгляду питання про навчання учнів методів математики пояснюється, з одного боку, тим, що в методичній літературі це питання в досить повному обсязі практично не висвітлюється; з іншого боку, вивчення досвіду роботи вчителів показує, що вони не завжди можуть виділити зміст методів математики, досліджуваних у школі, а це негативно позначається на висновках про варіанти методики їх формування.

Слід також зазначити й методичний аспект значення математичних методів: звертання до них сприяє формуванню ряду методичних умінь, пов'язаних, наприклад, із плануванням діяльності вчителя й діяльності учнів (зокрема, постановка навчального завдання, виділення дій, якими повинні опанувати учні, та ін.), переосмисленням наявних знань з математики, методики викладання математики, їх систематизацією й узагальненням.

Одна з основних цілей навчання математичних методів (і взагалі навчання математики в загальноосвітній школі) полягає в демонстрації можливостей використання математики для розв'язування практичних завдань, у навчанні школярів реалізації цих можливостей на виробництві, у науковій праці, у побуті.

Найістотнішим компонентом процесу розв'язування практичних завдань методами математики є математичне моделювання. Тому досягнення зазначеної мети повинне бути обов'язково пов'язане з формуванням в учнів умінь будувати й досліджувати математичні моделі.

Цілеспрямована робота з реалізації поставленої мети буде сприяти оволодінню моделюванням не тільки як методом розв'язування практичних завдань, але і як методом наукового пізнання, буде розв'язувати питання формування в учнів поняття про матеріальну картину світу, розуміння значимості абстрактних наукових понять (інакше — наукових моделей) у пізнанні реальної дійсності.

У цей час моделювання дуже широко застосовується не тільки в наукових дослідженнях, але й при розв'язуванні задач, що виникають у техніці, економіці, геології, медицині й т. д. Тому поняття «моделювання» й «модель» розглядають у широкому змісті.

Моделлю деякого об'єкта A (оригіналу) називають об'єкт B, у якомусь відношенні подібний (аналогічний) до оригіналу A, обраний або спеціально побудований людиною для однієї з наступних цілей:

1) замінити оригінал A в уявній або реальній дії. Така заміна виробляється тоді, коли для дії в даних умовах об'єкт B більш зручний (у цьому випадку ми маємо справу з моделлю-замісником);

2) створити представлення про оригінал A з допомогою об'єкта B (модель-представлення);

3) витлумачити об'єкт A у вигляді об'єкта B (модель-інтерпретація);

4) досліджувати об'єкт A з допомогою об'єкта B, посередництвом об'єкта B (дослідницька модель).

Звичайно людина вибирає або будує модель для однієї з перерахованих цілей, тому вид моделі саме цією метою й визначається. Але модель може бути використана, як правило, одночасно й для інших цілей. Наприклад, для розв'язування текстової задачі будуємо модель тієї ситуації, що у завданні відображена, — рівняння. Це рівняння є аналітичною моделлю (воно дає нам можливість установити ряд властивостей, що характеризують задану ситуацію). Але ця модель одночасно слугує і моделлю-замісником (у процесі розв'язування задачі вона заміщає ситуацію), і моделлю-представленням (дає нам узагальнене представлення про розглянуту задачу), і моделлю-інтерпретацією (рівняння мовою алгебри фіксує й витлумачує істотні особливості запропонованої в задачі ситуації).

Говорячи про ***моделювання,*** мають на увазі діяльність з побудови (або вибору) моделей для зазначених вище цілей.

Математична модель — це спеціальний опис (часто наближений) деякої проблеми, ситуації, що дає можливість у процесі її аналізу застосовувати формально-логічний апарат математики. При математичному моделюванні маємо справу з теоретичною копією (копія побудована нами), що у математичній формі виражає основні закономірності, властивості досліджуваного об'єкта.

У процесі математичного моделювання виділяють *три етапи*.

I. Формалізація — переведення запропонованого завдання (ситуації) на мову математичної теорії (побудова математичної моделі задачі).

II. Розв'язування задачі в рамках математичної теорії (говорять: розв'язування всередині моделі).

III. Переведення результату математичного розв'язування задачі на ту мову, на якій була сформульована вихідна задача (інтерпретація отриманого результату математичного розв'язування).

Найчастіше математична модель є трохи спрощеною схемою (описом) оригіналу, а отже, має певний рівень неточності.

Та сама модель може описувати різні процеси, об'єкти; тому результати внутрішньомодельного дослідження одного явища найчастіше можуть бути перенесені на інше. У цьому полягає одна із сильних сторін математичного моделювання.

Як уже вказувалося, формувати в учнів уміння, пов'язані з побудовою й дослідженням моделей (у тому числі й математичних), необхідно. А для цього потрібно говорити про використання моделювання в навчанні, причому мова може йти про різні *аспекти* такого використання.

Перший аспект — моделювання виступає і як зміст, що повинен бути засвоєний учнями в результаті навчання, і як спосіб пізнання, яким повинні опанувати учні.

Другий — моделювання є одним із навчальних засобів, з допомогою яких формується навчальна діяльність учнів.

Реалізація першого аспекту використання моделювання в навчанні припускає:

- формування в учнів понять про модельний характер досліджуваних закономірностей, уведення в зміст навчання понять «математична модель», «моделювання», встановлення сутності, ролі моделювання в пізнанні й т. д.;
- навчання учнів побудови моделей, тобто навчання дії моделювання.

Розглядаючи другий аспект використання моделювання в навчанні, необхідно підкреслити наступне. Моделювання, моделі служать засобом, з допомогою якого відбувається пізнання досліджуваних об'єктів; виходить, учні повинні вміти будувати ці моделі й користуватися ними.

За метою використання в навчанні навчальне моделювання можна умовно розділити на два види:

- моделювання об'єктів вивчення;
- моделювання дій та операцій з вивчення цих об'єктів.

Перший із зазначених видів слугує для виявлення й фіксації (іноді в наочно діючій формі) тих загальних відношень, які відбивають сутність досліджуваних явищ, об'єктів, процесів. Наприклад, $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ — теоретична модель поняття «квадратне рівняння з однією змінною». Ця модель і її конкретизація використовуються як для вивчення теорії квадратних рівнянь узагалі, так і для розв'язування завдань практичного змісту. Другий вид навчального моделювання застосовується для виявлення й фіксації (частіше в доступній для огляду, наочній формі) загальної схеми дій та операцій, пов'язаних із розв'язуванням певного кола завдань. У навчальній моделі цього виду показується, які дії, операції, у якому порядку (при яких умовах) потрібно зробити, щоб вивчити певний об'єкт даного виду. По суті кожна така модель — це схема діяльності за розв'язуванням навчального завдання, пов'язаної з вивченням деякого виду об'єктів.

Наприклад, будь-який алгоритмічний опис виконання певної дії є відповідною моделлю, що виступає в ролі навчальної, якщо ставиться завдання вивчення сутності, властивостей і т. ін. цієї дії. А одержання опису, фіксація його — навчальне моделювання другого виду.

Можна говорити, що перший вид навчального моделювання відбиває предметну сторону навчальної діяльності школярів, а другий — оперативну сторону. Оскільки в реальній навчальній діяльності ці дві сторони завжди виступають у єдності, то в більшості випадків навчальні моделі використовуються і як моделі досліджуваних об'єктів, і як моделі дії для цього вивчення.

Виділимо *вміння*, на основі яких учні змогли б самостійно будувати моделі, а потім, маючи на увазі результат роботи з моделлю й співвідносячи його з умовою запропонованого завдання, робити обґрунтований висновок про розв'язування вихідного завдання. До таких *умінь* насамперед варто віднести групи вмінь, пов'язаних із:

- виявленням, фіксацією тих загальних відношень, які відображають сутність досліджуваних об'єктів, явищ;
- записом виявлених відношень мовою тієї теорії, у рамках якої буде розв'язуватися задача (з урахуванням конкретних умов, у яких ці відношення розглядаються);
- перекладом отриманих у ході дослідження моделі результатів на мову, якою було сформульоване вихідне завдання.

Метод математичного моделювання знаходить безпосереднє відбиття в методах математики, конкретизується в них. Особливого значення набуває метод математичного моделювання у контексті сучасності, коли інноваційність у навчальному процесі вже сприймається не як революційні зміни його суті, а як форма оптимізації всіх сторін організації процесу навчання.

Однією з проблем освіти на сьогодні є її швидке реагування на зміни в суспільстві. Це вимагає відкритості системи освіти до змін, що відбуваються в суспільстві, постійного перегляду й адаптуван-

ня нормативної бази в освіті, розробки й упровадження в педагогічний процес нових методів і форм навчання та виховання. Так у світі з'явилися поняття «традиційного навчання» та «інноваційного навчання».

Традиційність навчання пов'язана з нормами освіти, що розробляються різними органами освіти, науковцями, педагогами-новаторами. Саме досягнення норм освіти є основним завданням традиційного навчання. Традиційне навчання покликане сформувати в учнів певну базу знань, умінь і навичок, без яких формування особистості проблематичне. Тому традиційне навчання є важливим аспектом підготовки учнів до самостійного життя. Однак традиційність навчання як система володіє певною замкнутістю, консервативністю й часто «не встигає» за швидкозмінним розвитком суспільства. Саме тому в науці виникла інша стратегія навчання — інноваційне навчання.

«Інновація — нововведення, зміна, оновлення; новий підхід, створення якісно нового, використання відомого в інших цілях» — таке визначення наводить І.М. Дичківська [16]. Отже, «інновація» пов'язана з нововведеннями, змінами й модифікаціями, створенні нового, а інноваційна діяльність — з критичним аналізом, творчістю, виходом за межі загальноприйнятих стандартів, уведенням нових видів і форм діяльності й спілкування та вилученням старих, з готовністю до сприймання й відображення в педагогічному процесі нових тенденцій у суспільстві, культурі, науці. Та чи інша новація в навчанні математики повинна володіти інноваційним потенціалом — здатністю забезпечити протягом тривалого часу корисний результат від нововведення.

Інноваційне навчання загалом орієнтоване на розвиток особистості учня, на формування готовності учня до реального життя, до його швидких змін, зокрема, й у вигляді різних криз, до творчого мислення, критичного аналізу навколишнього світу й себе в ньому, до постійного оволодіння учнями новими видами діяльності й спілкування. Інноваційне навчання покликане передувати змінам системи норм освіти, яка володіє певною консервативністю, можна сказати «обережністю» до введення інновацій в освіту в загальних масштабах. Нормативна система в освіті скоріше змінюється за принципом «не нашкодь», тоді як інноваційне навчання більш сміливо впроваджує в навчання нове, невідоме, не прийняте ще загалом. Інноваційне навчання може виходити за рамки навчальних програм, що відображають зміст традиційної освіти.

Традиційне навчання з огляду на свою «обережність», замкнутість, консерватизм відпрацьовує й «шліфує» систему навчання у вигляді досконалих структур, які й передбачають виконання стандартів освіти. Досконалість таких навчальних структур саме в досягненні певних вимог-стандартів. Така «досконалість» структур навчання виявляється в її стійкості, упорядкованості, рівнозваженості, прогнозованості й забезпечує виконання системою навчання певних функцій, а саме — досягнення стандартів освіти. Поміщений в таку систему навчання учень набуває властивостей операціоналіста, певною мірою аналітика, добросовісного виконавця. Однак з часом «досконалість» такої системи навчання перетворюється у свою протилежність, а саме: формує в учнів стереотипи мислення, алгоритми дій (виконання операцій), що приводять до розв'язання проблеми (стереотипи дій), обмежує формування в учнів бачення світу в його нескінченно можливому різноманітті, тобто відчуття світу як нескінченно можливої реальності, не дозволяє учневі розкривати нові аспекти власних сутнісних сил, розвивати власні інтуїції (я хочу, можу, розв'яжу, знайду, вивчу, освою і т.ін.), ізолює учня від життєвої реальності.

Однією зі стратегій навчання є намагання якомога більше, глибше, ширше розкривати й задіювати сутнісні сили людини. Досконала у статичному розумінні схема навчання у своїй статичній досконалості не дозволяє повною мірою розкривати ці сили, тобто затримує розвиток особистості учня. В цьому полягає чи не головний недолік традиційного навчання.

Традиційно-консервативне навчання забезпечує активність, самовизначення, самореалізацію й відповідальність (головні характеристики розвитку особистості) учня у межах створеної й досконалої в статичному розумінні системи навчання, що не дає можливості відчути учневі реальне життя суспільства. Смислово-семантичний простір, що створює для учня традиційно консервативна система навчання, формує тільки окремі властивості особистості й не надає належної свободи для розвитку особистості загалом, для її самовизначення й самореалізації.

Інноваційні методи передбачають порушення такої статичної досконалості системи навчання, введення в неї нових активаторів, що викликають порушення стійкості, звичності, прогнозованості, типовості ситуацій тощо. Тому інновації зв'язані з певним ризиком, непрогнозованістю результатів навчання, нетиповістю ситуацій, що й утруднює їхнє впровадження в навчальний процес.

Система навчання, що побудована на інноваційних засадах, є синергетичною системою, тобто передбачає порушення стійкості навчального процесу з метою виникнення його нових дисипативних (більш відкритих для нововведень) структур. Так розвиток інформаційно-комп'ютерних технологій привів до їхнього проникнення (як активаторів) у педагогічний процес, що викликало його збурення, порушення традиційних структур і створення нових дисипативних структур навчання з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій, що кардинально змінило педагогічний процес, зокрема через Інтернет — його відкритість.

Традиційна система навчання не дозволяє повною мірою формувати в учнів інтегративні знання, уміння застосовувати знання одних розділів математики (чи предметів) в інших. Інноваційне навчання передбачає такі методи й форми навчання як ділова гра, дискусія, диспут, лекція-роздум, створення проектів тощо. Особливо потрібно відзначити важливість таких методів у навчанні математики, як інтерактивні методи, методи проектів. Інтерактивність учнів — це активність учнів як суб'єктів діяльності, як реалізація власних інтуїцій, а не тільки активність «зовнішня», що виникає в учня завдяки створенню певної педагогічної ситуації вчителем. Відчутним знаряддям інтерактивного навчання стали інформаційні технології зі своїми можливостями, зокрема — графічними. Саме в системі учень–комп'ютер при розв'язуванні навчальних задач виникає внутрішній діалог учня, що формує його самостійність, самовизначення, самореалізацію.

Метод проектів дозволяє учневі самостійно проектувати власні дії для розв'язування певної проблеми та самостійно чи з іншими учнями здійснювати ці дії в процесі виконання проекту. Проекти можуть бути колективні й індивідуальні. Так, наприклад, можна перед учнями класу поставити завдання: знайти середню вагу цукрового буряка на плантації в п'ятдесят гектарів. Для розв'язання цієї проблеми учням потрібно розробити план створення вибірки, здійснити цю вибірку і порахувати середнє значення ваги одного буряка.

На наш погляд, інноваційність навчання математики повинна зокрема відображати найбільш складні й не повністю визначені навчальними програмами проблеми, до яких у загальному можна віднести: задачі з математики, що важко формалізуються; застосування знань з одного розділу математики в іншому як інтеграція знань; декомпозиція (розбиття на певні етапи) розв'язування складних задач; поєднання аналітичних і графічних методів розв'язування задач; створення евристичних алгоритмів навчання (послідовності приписів), які системою евристик структурують поле можливостей учня для розв'язування певної задачі, зменшуючи невизначеність проблеми; створення моделей при розв'язуванні рівнянь та нерівностей; формалізація й створення структурних моделей задачних ситуацій в текстових математичних задачах; використання можливостей інформаційно-комп'ютерних технологій для розв'язування різних математичних задач.

Розв'язування наведених проблем вимагає від учнів творчості, активності, елементів наукового дослідження, знань, що не завжди явним чином входять у програму з математики й відображені в шкільних підручниках, додаткового оволодіння такими засобами, як інформаційно-комп'ютерні технології та їхніми можливостями щодо розв'язання математичних задач.

Саме наведені вище проблеми навчання математики важко формально й детально описати в навчальних програмах (передбачити певними нормами); ці проблеми як у постановці, так і в розв'язанні носять творчий характер й тому їхній зміст багато в чому визначається вчителем. В цьому й буде полягати стосовно наведених проблем інноваційна діяльність учителя й, відповідно, учнів.

Наведені методи навчання можуть вибірково (чи повністю) застосовуватися вчителями у спеціалізованих математичних класах, на заняттях математичних факультативів, математичних гуртків, при формуванні індивідуальних завдань для учнів у вигляді наукового дослідження, при формуванні завдань для учнівських (індивідуальних чи колективних) проектів, при підготовці й проведенні математичних олімпіад різного рівня, індивідуальної роботи з обдарованими учнями тощо. Наведені методи можуть також використовуватися вчителями на заняттях з математики у звичайних загальноосвітніх школах при формуванні творчості в процесі розв'язування рівнянь і нерівностей, застосуванні геометричного підходу до розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами, побудові графіків функцій методом перетворення графіків, використанні інформаційних технологій тощо.

Лабораторна робота №14

Аксіоматичний метод доведення в шкільному курсі математики

Мета роботи. Систематизувати знання й уміння з основного методу доведення в математиці: розкрити його зміст стосовно до шкільного рівня строгості доведень і процес доведення; простежити етапи й конкретні прийоми формування даного методу в школі.

Основний зміст

I. Формування аксіоматичного методу

Наведемо основні компоненти інформації про аксіоматичний метод доведення математичних речень.

1. *Аксіоматичний метод* — це спосіб побудови наукової теорії, при якому в її основу кладуть деякі вихідні положення (судження, найпростіші властивості об'єктів, що позначаються основними поняттями) — аксіоми, або постулати (вони не доводяться), з яких усі інші речення цієї науки (теореми) повинні виводитися логічним шляхом — з допомогою доведення.

Через те, що традиційній логіці однією з форм доведення було дедуктивне доведення, тобто доведення, коли одинична теза підводилася під загальне правило з урахуванням видів дедуктивного висновку й логічних правил висновку, то іноді аксіоматичний метод називають дедуктивним методом, виділяючи тим самим у ньому побудову доведення або процес проведення доведення.

2. *Доведення* являють собою ланцюжок висновків (правильних, таких, що відповідають законам класичної логіки), що ведуть від істинних висловлень (вихідних для даного доведення речення) до доводжуваних (заключних) тез. Істинність висловлень не повинна обґрунтовуватися в самому доведенні, а повинна яким-небудь чином установлюватися заздалегідь.

З допомогою доведення засвідчується істинність або хибність даного математичного речення.

3. Доведення містить у собі три основних *елементи*:

а) *Твердження* (головна мета доведення — встановити істинність твердження). Форма вираження твердження — судження.

б) *Аргументи* (основи) доведення — положення, на які опирається доведення і з яких за умови їх істинності необхідно слідує істинність твердження, яке доводиться. Форма вираження аргументів — судження. Зв'язуючи аргументи, приходимо до висновків, які будуються за певними правилами. Аргументи, на які можна посилатися при доведенні: аксіоми, означення, раніше доведені теореми.

в) *Демонстрація* — логічний процес взаємозв'язку суджень, у результаті якого здійснюється перехід від аргументів до твердження.

Правила доведення. Вони опираються на відповідні *закони логіки*.

Висновок — логічна дія, у результаті якої з одного або декількох відомих нам і певним чином зв'язаних суджень виходить нове судження, в якому отримується нове знання. Існують різні *типи висновків*:

- *індуктивні* (процес міркування йде від знання часткових фактів до знання загального правила);
- *дедуктивні* (міркування йде від знання загального правила до знання якого-небудь одиничного, часткового факту, на яке загальне правило поширюється).

6. Під *методом доведення* будемо розуміти спосіб зв'язку аргументів від умови до висновку судження. Методи доведення, що використовуються в шкільному курсі математики, можна класифікувати за двома основами:

- по тому, як будується обґрунтування тези (пряме й непряме) ;
- по тому, який математичний апарат використовується для доведення.

Назвемо кілька загальних прийомів доведення за першою основою, тобто з урахуванням того, як будується обґрунтування тези.

Прямі прийоми пошуку доведення:

а) прийом перетворення умови судження (синтетичний);

б) прийом перетворення висновку судження:

- відшукання достатніх основ справедливості висновку (висхідний аналіз);
- відшукання необхідних ознак справедливості судження з наступною перевіркою оборотності міркувань (спадний аналіз);

в) прийом послідовного перетворення то умови, то висновку судження.

Непрямі прийоми пошуку доведення:

а) «метод від супротивного» (істинність твердження, що доводиться, встановлюється з допомогою спростування суперечного йому судження);

б) метод виключення (теза розглядається як один із можливих варіантів припущень, коли всі припущення відкидаються, крім одного).

Методи доведення, виділені за другою основою, тобто коли спосіб зв'язку аргументів узгоджується з певною математичною теорією в шкільному курсі математики, такі:

а) метод геометричних перетворень, при реалізації котрого поряд з логічною основою використовується апарат геометричних перетворень;

б) алгебраїчні методи (рівнянь, нерівностей, тотожних перетворень);

в) векторний, що використовує апарат векторної алгебри;

г) координатний, що дозволяє встановлювати перехід від геометричних відношень до аналітичних.

При доведенні математичних речень використовуються різні математичні методи. Іноді цікаво перевірити силу й оригінальність різних методів для доведення одного й того ж речення.

Завдання 1. Доведіть різними способами, що в рівнобічної трапеції, в якої діагоналі перетинаються під прямим кутом, висота дорівнює середній лінії. Для кожного зі способів визначте структуру доведення.

І спосіб. Прийом перетворення умови судження (синтетичний) (рис. 14-1).

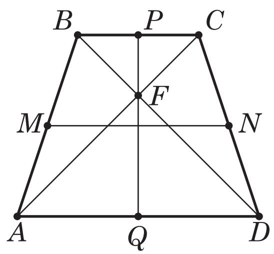


Рис. 14-1

Дано: $ABCD$ — трапеція, $AB = CD$, $\angle AFD$ — прямий, MN — середня лінія, PQ — висота трапеції, що проходить через точку перетину діагоналей.

Довести: $PQ = MN$.

Доведення. ΔBFC — прямокутний (оскільки діагоналі перетинаються під прямим кутом), рівнобедрений (через те, що трапеція є рівнобічною) — тому $\angle PBF = 45°$, $\angle BFP = 45°$ і FP є його висотою, бісектрисою та медіаною, проведеними до основи. Отже, ΔBPF — рівнобедрений, а тому $BP = PF$. Аналогічно доводимо, що $AQ = QF$. Тоді маємо: $MN = (BC + AD)/2 = BP + AQ = PF + FQ = PQ$.

ІІ спосіб. Відшукання достатніх основ справедливості висновку (висхідний аналіз) з використанням допоміжної побудови (рис. 14-2).

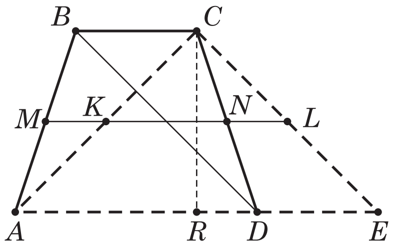


Рис. 14-2

Дано: $ABCD$ — трапеція, AB = = CD, діагоналі трапеції перетинаються під прямим кутом, MN — середня лінія, CR — висота трапеції, опущена з вершини верхньої основи.

Довести: $CR = MN$.

Доведення. Використаємо для доведення додаткову побудову: проведемо з точки C пряму CE, паралельну до діагоналі BD. Отримали прямокутний трикутник ACE (KL — його середня лінія, а CR — висота). Для того, щоб довести рівність $CR = MN$, розглянемо трикутник ACE і доведемо рівність $KL = CR$ (очевидно, що оскільки MK — середня лінія трикутника MBC і NL — середня лінія трикутника CDE, то справджуються такі рівності: $MK = BC/2 = DE/2 = NL$. Отже, $MN = MK + KN = NL + KN = KL$).

Щоб довести, що $KL = CR$, доведемо факт рівності відрізків AR та CR (справді, тому що KL – середня лінія трикутника ACE, то KL =

= $AE/2 = AR$). Прямокутний трикутник ACE рівнобедрений (бо діагоналі рівнобічної трапеції рівні), тому $\angle CAR = 45°$, ΔARC — також рівнобедрений (бо $\angle CAR = 45°$, $\angle CRA = 90°$, а тому і $\angle ACR = 45°$), отже, $AR = CR$, а тому $KL = CR$ і $MN = CR$.

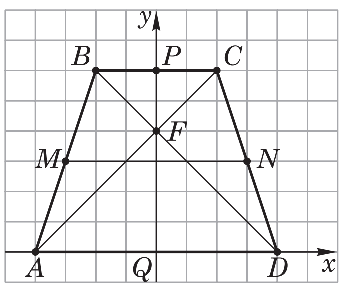


Рис. 14-3

III спосіб. Координатний (рис. 14-3).

Уведемо систему координат. Вісь x проходить по стороні AD, вісь y — по висоті PQ трапеції. Тоді елементам трапеції задамо такі координати (див. рис. 14-3):

$$A(-a;0),\ B(-b;c),\ C(b;c),\ D(a;0),$$
$$P(0;c),\ Q(0;0),$$
$$M\left(-\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right),\ N\left(\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right).$$

Знайдемо довжини відрізків MN та PQ:

$$PQ = c,\quad MN = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2} = a+b\,.$$

Отже, щоб довести рівність MN та PQ, треба довести рівність $a+b=c$, або треба довести рівність $AQ + BP = PQ$. А цей факт уже був нами встановлений у першому способі розв'язування.

IV спосіб. Векторний (рис. 14-4).

Розглянемо вектор $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DQ}.$$

Або: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}.$ Помноживши останню рівність на 2, отримаємо:

$$2\cdot\overrightarrow{PQ} = 2\cdot\overrightarrow{PB} + 2\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{DQ} =$$
$$= 2\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}.$$

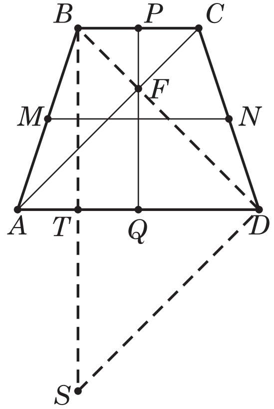


Рис. 14-4

З іншого боку: $2\cdot\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$. Почленно віднявши дві останні векторні рівності, отримаємо:

$2\cdot\overrightarrow{PQ} - 2\cdot\overrightarrow{NM} = 2\cdot\overrightarrow{BD}$, або: $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NM}$.

Піднесемо останню рівність векторів до квадрата:

$$\overrightarrow{PQ}^2 - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{NM}^2.$$

Оскільки $\overrightarrow{BD}^2 - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - 2\cdot\overrightarrow{BT}\right) =$

$= \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BS}\right) = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SD} = 0$, то, отже, $\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{NM}^2$, а тому відрізки PQ та MN є рівними.

Аналізуючи кожний зі способів доведення, неважко з'ясувати, що в основі кожного з них об'єктивно лежить логічнаоснова доведення; тому навчити розуміти дедуктивне доведення і опанувати прийомами його пошуку й виконання є одна з істотних особливостей навчання курсу математики. Для того, щоб учні опанували прямим і непрямим доведеннями, необхідно сформувати в них певну послідовність умінь.

Уміння доводити — складне вміння, воно складається з:

- уміння шукати доведення (аналізувати речення); одержувати продуктивні наслідки з умови; з'ясовувати умови, при яких можливий висновок; висловлювати правдоподібну гіпотезу й т. ін.;
- уміння проводити доведення (на основі отриманої гіпотези, що виникла як результат пошуку доведення), виконувати послідовність висновків й обґрунтовувати правомірність отриманих висновків;
- уміння оформляти доведення теореми.

ІІ. Формування вмінь шукати доведення

1. Тенденція побудови підручників з геометрії для середньої школи в основному орієнтована зараз на аксіоматичну теорію. Або відразу на початку курсу (як у підручнику [46]) викладаються всі аксіоми шкільного предмета геометрії, або в міру змістовної необхідності в них (як в [1], [10] або в підручнику [34]), але такий підхід став об'єктивною реальністю. А коли такий підхід став визначальним, то і знайомство з *аксіоматичним методом* доведення є методично виправданим відносити до шкільного курсу геометрії. Тому формування основних компонентів даного методу здійснюється в основному на навчальному матеріалі курсу геометрії.

У *навчанні аксіоматичного методу*, як це було відзначено вище, можна виділити кілька *етапів*.

Перший етап спрямований на формування загальних прийомів пошуку й проведення доведення, які потім будуть використовуватися на всіх наступних етапах. Цей етап необхідно здійснювати при вивченні перших тем шкільного курсу геометрії. Даний етап містить у собі наступне:

- аналіз тексту речення;
- розгортання умови;
- послідовний аналіз висновку й умови речення;
- розкриття змісту прямого й непрямого методів доведення.

Другий етап включає засвоєння специфічних прийомів пошуку й проведення доведення речень залежно від конкретного їхнього змісту та власне математичних методів, що використовуються при доведенні речень.

Третій етап містить у собі розкриття сутності побудови шкільного предмета на основі аксіоматичної теорії.

У *побудові шкільних курсів математики* можна виділити три *підходи*:

- побудова курсу на змістовній основі, коли матеріал розташовується в систематичному порядку. Причому система ця визначається як прийнятими математичними трактуваннями фундаментальних понять (число, фігура, функція й т. ін.), так і розгортанням наступних означень об'єктів і доведення окремих властивостей цих об'єктів. Система аксіом при такій побудові не вводиться. Для аргументації використовуються раніше доведені теореми та властивості, «прочитані» на кресленні;
- побудова курсу заснована на дедуктивному підході, тобто на певній аксіоматиці, що вводиться поступово. Ступінь обґрунтування доведення математичних речень поступово підсилюється;

- побудова курсу на дедуктивній основі. Система аксіом уводиться на початку курсу. Розкривається зміст термінів: аксіома, теорема, доведення. Обумовлюються аргументи доведення. На початку курсу доведення будуються відповідно до можливої для цього віку учнів та особливостей шкільного предмета строгості з метою розкриття деяких положень дедуктивного методу в математиці.

Осмислити третій етап розуміння аксіоматичного методу можна або на завершенні курсу планіметрії, або при розкритті логічної побудови курсу стереометрії.

Найбільш істотний і складний перший етап навчання аксіоматичного методу в школі, тому відзначимо деякі найбільш важливі його особливості.

2. Формування загальних прийомів доведення математичних речень.

Перший етап на початку вивчення курсу геометрії може бути реалізований в основному на репродуктивно-алгоритмічному рівні. Цей рівень характеризується вмінням розпізнавати раніше вивчене доведення, розкривати його структуру та відтворювати найчастіше по тому ж рисунку, що наведений у підручнику. Учень повинен уміти відтворити доведення в аналогічній ситуації.

При формуванні окремих загальних прийомів навчання доведення математичних речень необхідно розкрити його операційний склад, способи формування операцій і критерії сформованості. Аналіз тексту речення має наступний операційний склад:

- прочитатиречення;
- виділити умову(и) і висновок(и);
- уточнити висновок: назвати його, з'ясувати, про які фігури йде мова, за якою властивістю можна їх встановити, що в умові є для того, щоб одержати висновок;
- уточнити умову: перелічити фігури, про які йде мова, з'ясувати їхню кількість, якими властивостями вони володіють, що в них є для того, щоб прийти до висновку;
- зробити креслення (якщо воно необхідне) і короткий запис;
- якщо після виконання аналізу доведення знайдене, записати його.

Щоб навчити учнів читати математичні речення, необхідно показати можливі конструкції речень. Наприклад: $A \Rightarrow B$. Ця конструкція може читатися такими варіантами речень:

- *якщо дано А, то В;*
- *оскільки дано А, то В;*
- *через те, що дано А, то В;*

- *для того, щоб було дано A, необхідно, щоб B;*
- *для того, щоб B, досить, щоб було дано A.*

Завдання 2. Прочитайте всіма наведеними вище способами:

- *Кути суміжні* $\Rightarrow$ *сума кутів дорівнює* 180°.
- *Фігура трикутник* $\Rightarrow$ *сума внутрішніх кутів дорівнює* 180°.
- *Два числа від'ємні* $\Rightarrow$ *сума чисел є число від'ємне.*
- *Трикутник прямокутний* $\Rightarrow$ *квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.*
- *Дві прямі паралельні третій* $\Rightarrow$ *дві прямі паралельні між собою.*
- *Кути вертикальні* $\Rightarrow$ *кути рівні.*
- *Фігура паралелограм* $\Rightarrow$ *протилежні сторони та кути фігури рівні.*
- *Два числа з різними знаками* $\Rightarrow$ *добуток чисел є число від'ємне.*
- *Знаменник виразу не дорівнює нулю* $\Rightarrow$ *вираз має значення.*

Щоб виділити умову, учень повинен відповісти на запитання, про що говориться в реченні. Для виділення висновку треба відповісти на запитання, що говориться про даний об'єкт у реченні. Добрим засобом для формування вміння виділяти умову і висновок є складання списків властивостей основних (первинних), зафіксованих в означенні, і вторинних.

Наприклад: кут $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{1) два промені;} \\ \text{2) має загальну початкову точку.} \end{cases}$

В міру вивчення кута з'являються нові властивості, і список значно розширюється:

$$\text{кут} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1) два промені;} \\ \text{2) має загальну початкову точку;} \\ \text{3) має градусну міру, більшу за нуль;} \\ \text{4) градусна міра дорівнює сумі градусних мір кутів,} \\ \text{на як він розбивається будь-яким променем,} \\ \text{який проходить між його сторонами.} \end{cases}$$

Завдання 3. а) З'ясуйте, про що говориться в наведених нижче реченнях і що говориться про виділений об'єкт:

- *якщо знаменник виразу не дорівнює нулю, то даний вираз має зміст*;
- *сума суміжних кутів дорівнює* 180°;
- *у трикутнику сторони пропорційні синусам протилежних кутів*;
- *діагоналі паралелограма у точці перетину діляться навпіл*;
- *середня лінія трапеції паралельна основам та дорівнює їхній півсумі*;

- *діагоналі ромба перпендикулярні*;
- *вертикальні кути рівні.*

б) Складіть список властивостей наступних об'єктів: промінь, відрізок, трикутник, паралелограм, пряма.

При формуванні прийому розгортання умови необхідно розкрити його операційний склад, який можна представити у вигляді схеми (подається нижче).

Оскільки більшість висновків у шкільному курсі математики робиться за *законами логіки*, то на змістовному рівні можливо ознайомити з ними учнів.

1. Правило висновку: $\dfrac{A, A \Rightarrow B}{B}$ (читається: якщо речення A є істинним та істинною є імплікація $A \Rightarrow B$, то і речення B є істинним).
2. Правило силогізму: $\dfrac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$.
3. Правило заперечення: $\dfrac{A \Rightarrow B, \overline{B}}{\overline{A}}$.
4. Правило контрапозиції: $\dfrac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$.
5. Правило кон'юнкції: $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$ (закони, записані у пунктах 2–5, прочитайте самостійно).

Завдання 4. Розберіть та проаналізуйте доведення теореми про вертикальні кути на предмет використання в доведенні аксіоматичного методу. Акцентуйте увагу на законах логіки, що були використані при проведенні висновків у доведенні.

Завдання 5. Використовуючи прийом розгортання умови, здійсніть доведення речення:«Якщо пряма, що не проходить ні через одну з вершин трикутника, перетинає одну зі сторін трикутника, то вона перетинає тільки одну із двох інших сторін трикутника».

Для формування вміння знаходити достатні умови можна використати, наприклад, наступні завдання.

1. Дано дві півпрямі. Що повинно бути відомо, щоб можна було стверджувати, що ці дві півпрямі утворюють кут? Що повинно бути відомо, щоб можна було стверджувати, що даний кут розгорнутий?
2. Що досить знати для того, щоб стверджувати, що даний трикутник рівнобедрений?

3. Відомо, що виконуються наступні рівності: $AB = MP$, $BC = PK$ Доповніть цю умову так, щоб можна було зробити висновок, що $\Delta ABC = \Delta MPK$.
4. Знайдіть умови, яких бракує у тексті завдання, для того, щоб можна було прийти до висновку:

Дано: α і β — кути. ? **Довести:** $\angle\alpha = \angle\beta$.	**Дано:** a, b і c — прямі, $a \perp c$. ? **Довести:** $a \parallel b$.

Хорошим засобом для розв'язування наведених задач є складання карток такого виду:

Для того, щоб довести	Досить довести:
рівність трикутників,	1) рівність двох пар відповідних сторін і рівність кутів між ними; 2) рівність трьох пар відповідних сторін; 3) і т. д.

Завдання 6. Складіть картку достатніх умов:
- що даний трикутник рівнобедрений;
- що дані прямі паралельні.

Завдання 7. Розкрийте у вигляді схеми (структури доведення) прийом розгортання умови й висновку на прикладі наступної задачі: «У трикутнику проведені дві бісектриси. Доведіть, що коли їхні відрізки від точки перетину до вершин рівні, то цей трикутник рівнобедрений».

Зміст прямого методу висновку розкрито в раніше наведених загальних прийомах пошуку доведення речень.

Розкриємо операційний склад непрямого методу:
- робимо припущення (будуємо заперечення того, що потрібно довести);
- розглядаємо разом умову речення й припущення і робимо висновок;
- шукаємо протиріччя з відомим істинним реченням (аксіомою, раніше доведеною теоремою, умовою речення);
- знайшовши протиріччя, робимо висновок, що наше припущення неправильне, а правильним є його заперечення, тобто те, що потрібно довести.

Для формування всіх операцій прийому необхідно показати, що таке протиріччя і як будується заперечення.

Завдання 8. а) З'ясуйте, чи можуть бути одночасно істинними або хибними такі висловлення:
- $2 + 11 = 13$ і $2 + 11 \neq 13$.
- Прямі a та b перетинаються і Прямі a та b не перетинаються.

б) Побудуйте заперечення наступних висловлень:
- Числове значення даного виразу дорівнює 5.
- Число 586 ділиться на 3.
- Велосипедист не має права їхати на червоне й жовте світло.

в) Установіть, які із запропонованих речень у наступних парах є запереченнями один одного:

• $x = 5$;	$x \neq 5$.
• Він мій друг.	Він мій ворог.
• Він мій друг.	Він друг мого ворога.
• ΔABC — гострокутний;	ΔABC — тупокутний.
• $4 < 0$;	$4 \geq 0$
• $5 < 0$;	$5 > 0$.

Ефективною умовою, що дозволяє говорити про сформованість методу, є розв'язування логічних задач.

Другий етап формування аксіоматичного методу здійснюється протягом вивчення всього курсу математики.

Завдання 9. З'ясуйте найбільш характерні утруднення учнів, що виникають при вивченні аксіоматичного методу на всіх трьох етапах його формування. У відповідності з цим запропонуйте свої варіанти формування даного методу в школі.

Самостійна робота

Розробіть форми контролю результативності етапів вивчення методу, найбільш характерних прийомів і їхніх операційних складів. Запропонуйте реальні задачі і завдання, за виконанням яких можна зробити висновок про сформованість окремих прийомів та їхніх операцій. Результати дослідження оформіть у вигляді реферату на тему «Аксіоматичний метод у шкільному курсі математики й можливі методики його формування».

Література до написання реферату: [39], с. 67-82, [51], с. 226–234.

Література: [1], [2], [3], [4], [15], [18], [19], [24], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [50], [51], [52], [53], [55].

Лабораторна робота №15

Метод рівнянь і нерівностей у курсі математики загальноосвітньої школи

Мета роботи. Встановити зв’язок між методом математичного моделювання й методом рівнянь і нерівностей, виділити етапи формування методу рівнянь і нерівностей у курсі математики загальноосвітньої школи.

Основний зміст

Метод рівнянь і нерівностей — метод математики, в якому найбільш повно і яскраво відбиваються характерні риси, знаходять чітку реалізацію етапи процесу математичного моделювання. Цей метод можна вважати конкретизацією методу моделювання й з погляду тих основних дій, які характеризують метод моделювання і які необхідно виконувати в процесі використання цього методу для розв’язування конкретних практичних задач.

Які питання варто висвітлити у зв’язку з навчанням методу рівнянь і нерівностей? Виділимо основні:

- цілі вивчення методу рівнянь і нерівностей;
- суть і зміст методу;
- можливості формування методу в курсі математики середньої школи;
- етапи формування методу;
- завдання, які стоять перед учителем й учнями.

1. Оскільки рівняння, нерівності, їхні конструкції є математичними моделями дуже багатьох явищ (фізичних, хімічних та ін.), то розв’язування різних задач (у тому числі й тих, з якими ми зіштовхуємося на практиці) в остаточному підсумку зводиться до розв’язування рівнянь, нерівностей, їхніх систем чи сукупностей. Тому цілі зазначеного методу полягають у пізнанні явищ, процесів дійсності та в одержанні способу (часто найбільш раціонального, особливо якщо врахувати можливості сучасних ЕОМ) розв’язування багатьох практичних і наукових задач.

Зазначені цілі методу рівнянь і нерівностей є й цілями його вивчення. Але крім них можна говорити і про інші, які мають як освітнє, світоглядне, так і дидактичне значення.

Найбільш значиме серед них полягає в можливості формування в учнів уміння математизації реальних ситуацій, а це, як указувалося вище, пов’язане з формуванням такої важливої дії, як дія моделювання. Вивчення методу рівнянь і нерівностей певною мірою має на меті встановлення міжпредметних і внутрішньопредметних зв’язків, а отже, формування системності знань. Крім того, створюються сприятливі умови для узагальнення й систематизації знань, пов’язаних з курсами алгебри й геометрії (рівносильність рівнянь та нерівностей; способи розв’язування рівнянь, нерівностей та їхніх конструкцій; опис рівнянням, нерівністю чи конструкцією рівнянь, нерівностей заданої безлічі точок та ін.).

Завдання 1. Наведіть приклади, що ілюструють положення про те, що вивчення методу рівнянь і нерівностей сприяє встановленню: а) міжпредметних зв’язків (наприклад, з курсами фізики, хімії, географії); б) внутрішньопредметних зв’язків.

Завдання 2. Продумайте можливості систематизації знань при вивченні теми «Тригонометричні рівняння». За якими напрямками може здійснюватися систематизація знань учнів?

2. Суть, основна ідея *методу рівнянь і нерівностей* полягає у:

- встановленні основних зв’язків, залежностей між елементами, що характеризують досліджуване явище (процес), тобто в побудові словесної моделі явища (процесу);
- переведенні словесної моделі на мову математики: виявлені зв’язки, залежності між характеристиками явища записуються у вигляді рівнянь, нерівностей або їхніх конструкцій. У цьому випадку маємо справу з побудовою математичної (іноді її називають розв’язуючою або аналітичною) моделі;
- розв’язуванні поставленої задачі усередині математичної моделі: розв’язування рівняння, нерівності або їхніх конструкції (аналітичні, графічний способи);
- переведенні отриманого результату на ту мову, на якій було сформульоване вихідне завдання (мається на увазі встановлення відповідності отриманого результату вихідному явищу, процесу).

Розкриття сутності методу рівнянь і нерівностей фактично пов’язане з виділенням етапів діяльності людини, яка його застосовує (зрівняйте з етапами процесу математичного моделювання).

При вивченні курсу математики загальноосвітньої школи учні, як правило, не зіштовхуються з необхідністю здійснення діяльності, що відповідає першому етапу (у підручниках і різного роду посібниках звичайно вже представлені словесні моделі досліджуваних явищ). Тому надалі, розкриваючи зміст методу рівнянь і нерівностей, не будемо враховувати етап побудови словесної моделі.

Завдання 3. Задайте практичну ситуацію (задачу), для розв'язування якої потрібно побудувати її словесну модель. Які величини і їхні значення, необхідні для побудови словесної моделі, треба було виділити?

Перелічимо діяльнісні компоненти методу рівнянь і нерівностей:

- вибір і позначення одного або декількох основних невідомих;
- уведення позначень для інших невідомих з урахуванням: а) зв'язків і залежностей, зафіксованих у словесній моделі досліджуваної ситуації; б) позначень основних невідомих;
- складання розв'язуючої моделі (рівняння, нерівності або конструкції рівнянь, нерівностей);
- розв'язування отриманої моделі;
- дослідження результату (розв'язування рівняння, нерівності й т ін.) відповідно до умови поставленої задачі.

Діяльність, основу якої становлять зазначені дії, здійснюється, як правило, з допомогою інтелектуальних засобів; рідше використовуються предметні засоби (наприклад, схеми, графічні інтерпретації тощо).

Завдання 4. Укажіть ті інтелектуальні засоби, які використовуються при виконанні дій, що є компонентами методу рівнянь і нерівностей. Охарактеризуйте особливості використання цих засобів.

Завдання 5. Проілюструйте можливості використання предметних засобів у діяльності, що реалізує метод рівнянь і нерівностей (наведіть конкретні приклади).

Завдання 6. Співвіднесіть дії, що входять до методу рівнянь і нерівностей, з етапами діяльності із застосування цього методу для розв'язування задач.

Зміст гносеологічних компонентів методу рівнянь і нерівностей визначається в такий спосіб:

- знання основних залежностей між величинами, які присутні в описі явища, процесу, що виступає як об'єкт застосування методу (наприклад, залежності між шляхом, часом, швидкістю; обсягом роботи, часом, продуктивністю праці; вартістю, ціною, кількістю продукції й т. ін.), і способів їх математичного вираження.

- результат дослідження явища, процесу, що характеризує одну або кілька величин, що перебувають у певній залежності; наслідок із цього результату.
- у колі завдань, розв'язуваних даним методом, виділимо типи за ознакою «тип розв'язуючої моделі»: задачі на складання рівнянь, задачі на складання нерівностей, задачі на складання систем рівнянь, задачі на складання систем нерівностей, задачі на складання систем рівняння (рівнянь) і нерівності (нерівностей). Кожний із зазначених типів може бути розділений на види у відповідності, наприклад, з видом розв'язуючої моделі (задачі на складання лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь і т. ін.).

Серед усіх видів задач особливо відзначимо задачі на оптимізацію, а серед них — задачі на знаходження: а) найбільшого або найменшого значення функції, що є неперервною на відрізку та має на цьому відрізку скінченне число критичних точок; б) найбільшого або найменшого значення лінійної функції в деякій області, що задана системою лінійних нерівностей і лінійних рівнянь (задача лінійного програмування).

Розв'язування кожної із цих задач пов'язане з одержанням рівняння, що задає деяку функцію (на відрізку в першому випадку та на підмножині точок координатної площини в другому).

Особливості використання методу залежно від сфери його застосування пов'язані з необхідністю раціонального вибору виду розв'язуючої моделі запропонованої задачі й проявляються в діях із застосування методу рівнянь і нерівностей (див. приклад розв'язування текстової задачі у лабораторній роботі №7).

Це й раціональний вибір невідомого, і особливості побудови розв'язуючої моделі (наприклад, одержання рівняння, що задає деяку функцію, і використання похідної для знаходження її критичних точок), і особливості розв'язування окремих видів рівнянь, нерівностей, конструкцій рівнянь і нерівностей, зокрема застосування аналітичного й графічного способів розв'язування, і особливості інтерпретації отриманого результату у відповідності, з одного боку, з видом розв'язуючої моделі, а з іншого боку — з умовою конкретної задачі.

Найбільш яскраво особливості використання методу рівнянь і нерівностей проявляються в процесі розв'язування задач геометричного та фізичного змісту, тому що вибір виду розв'язуючої моделі часто пов'язаний з попереднім встановленням і використанням суто геометричних та фізичних властивостей розглядуваних об'єктів чи явищ.

Завдання 7. Наведіть приклад конкретної задачі лінійного програмування. Виділіть етапи її розв'язування, укажіть дії, які повинен виконати учень на кожному етапі. Відзначте ті особливості, які характеризують розглянутий вид задач і дану задачу зокрема.

Завдання 8. Підберіть завдання, що допускало б побудову різних розв'язуючих моделей залежно від вибору невідомого (див. приклад розв'язування текстової задачі в частині дослідження розв'язаної задачі у лабораторній роботі №7).

3. Щоб встановити можливості для формування методу рівнянь і нерівностей у курсі математики загальноосвітньої школи, потрібно встановити, по-перше, ті знання й уміння, які є базовими стосовно діяльнісних та гносеологічних компонентів методу; по-друге, місце й зміст матеріалу, пов'язаного з методом, у підручниках математики; по-третє, можливості цього матеріалу з погляду формування окремих компонентів методу.

Для успішного застосування *методу рівнянь і нерівностей* учням необхідні такі знання й уміння:

- знання про рівняння, нерівності, їхні конструкції: поняття кореня (рівняння, нерівності та їхні конструкцій); розв'язування рівняння, нерівності, системи рівнянь, нерівностей, рівносильність рівнянь, нерівностей; графік рівняння, нерівності; властивості числових рівностей, нерівностей; види рівнянь, нерівностей; способи розв'язування рівнянь, нерівностей, їхніх конструкцій (аналітичний, графічний);
- знання залежностей між основними величинами, властивостей геометричних й інших об'єктів, досліджуваних у курсі математики середньої школи, способів математичного вираження цих залежностей, властивостей;
- уміння, пов'язані з розв'язуванням окремих видів рівнянь, нерівностей, їхніх конструкцій: одержання рівняння, нерівності, рівносильних даному, з допомогою основних теорем рівносильності рівнянь, нерівностей на базі використання властивостей функцій; вибір раціонального для кожного конкретного випадку способу розв'язування (у тому числі аналітичного або графічного); побудова множини точок за її аналітичним заданням; опис рівнянням, нерівністю заданої множини;

- уміння здійснювати переведення задачі з мови словесної моделі на мову математичної моделі (тобто скласти рівняння, нерівність відповідно до зазначених в умові задачі властивостей, залежностей величин);
- уміння інтерпретувати результат розв'язування математичної моделі відповідно до умови запропонованої задачі.

Завдання 9. Познайомтеся з матеріалом, пов'язаним з методом рівнянь, у таких шкільних підручниках математики: [59], [60]. З якими поняттями знайомляться учні, чи вводяться означення цих понять? Якого виду рівняння розв'язуються в V класі, в VI класі? Які способи при цьому використовують учні? Чи пропонуються завдання, розв'язування яких пов'язане зі складанням рівнянь? Чи можна стверджувати, що в цих класах проводиться цілеспрямована, систематична робота з формування методу рівнянь?

Завдання 10. Орієнтуючись на підручники алгебри для VII класу [7], [31], встановіть, які види рівнянь, нерівностей, їхніх конструкцій вивчають учні, які способи їх розв'язування (особливу увагу зверніть на зв'язок питань, пов'язаних з темами «Рівняння» й «Функція»).

Чи можна стверджувати, що в курсі алгебри VII класу метод рівнянь стає предметом спеціального розгляду? Якщо так, то в чому це конкретно проявляється? Які види задач учні розв'язують методом рівнянь (орієнтуйтеся на вид розв'язуючої моделі)?

Завдання 11. При вивченні якого виду рівнянь у курсі алгебри восьмирічної школи вперше з'являється необхідність обов'язкової реалізації етапу інтерпретації результату розв'язування математичної моделі відповідно до умов поставленої задачі?

Наведіть приклад задач, у процесі розв'язування яких методом рівнянь ми зобов'язані звернути увагу учнів на етап інтерпретації. Як методично правильно організувати діяльність учнів на цьому етапі реалізації методу рівнянь?

Завдання 12. У якому класі й при вивченні матеріалу якої теми учні знайомляться з елементами методу нерівностей, з якими саме елементами (поняття, їхні властивості, способи дій з ними)?

Чи розглядаються завдання, розв'язуючою моделлю яких є нерівності, системи нерівностей? Наведіть приклади.

Чи звертається спеціальна увага на особливості використання методу нерівностей при розв'язуванні практичних задач?

Завдання 13. Маючи на увазі виконаний аналіз матеріалу шкільних підручників, зіставивши результати цього аналізу з компонентами методу рівнянь і нерівностей, а також з тими знаннями й уміннями, які лежать в основі його використання, дайте відповідь на питання:

- Чи є в шкільному курсі математики можливості для формування не тільки окремих компонентів, але й методу в цілому?
- Чи реалізовані ці можливості, чи формується метод рівнянь і нерівностей (у прийнятому нами трактуванні) у випускників основної школи?

4. Реалізація можливостей засвоєння учнями методу рівнянь і нерівностей пов'язана з розв'язуванням двох завдань. Перше полягає в тому, щоб домогтися розуміння учнями суті методу й оволодіння діями із його застосування (діяльнісні компоненти). Друге завдання полягає в навчанні застосування методу для розв'язування різних видів задач (у процесі його розв'язування відбувається й подальше засвоєння діяльнісних компонентів, і розкриття об'єктивної сторони, гносеологічної основи методу).

Обидва ці завдання повинні стати метою діяльності не тільки вчителя, але й учнів. Їх розв'язування припускає обов'язкове виділення в процесі *формування методу рівнянь і нерівностей наступних етапів*:

I. *Етап прийняття учнями поставленого навчального завдання.* Основна мета цього етапу полягає в тому, щоб показати учням значення методу рівнянь і нерівностей та «вийти» на розуміння учнями мети наступної діяльності — засвоєння спеціального методу розв'язування багатьох задач (у тому числі й задач практичного змісту).

Основним засобом, що вчитель використовує на цьому етапі, можуть бути задачі, у процесі розв'язування яких найбільш яскраво буде проявлятися доцільність використання саме розглянутого методу.

II. *Етап засвоєння учнями суті методу.* На цьому етапі учні під керівництвом учителя виділяють дії, що визначають операційний склад методу рівнянь та нерівностей; встановлюють їх послідовність; відзначають, що потрібно знати й уміти для того, щоб застосовувати метод.

III. *Етап формування компонентів методу рівнянь і нерівностей.* Використовуючи задачі, як основний засіб, на цьому етапі вчитель повинен звернути увагу в першу чергу на формування в учнів таких дій — вибір і позначення одного або декількох основних невідомих, уведення позначень для інших невідомих та інтерпретація результату у відповідності з умовою поставленої задачі.

У дії «складання розв'язуючої моделі» варто виділити операцію, пов'язану з виділенням основного відношення даної задачі, що і використовується в підсумку для одержання рівняння (нерівності або їхніх конструкцій).

Зауваження. Тут не вказується на необхідність формування дії «розв'язування отриманої моделі», тому що воно спеціально формується в процесі вивчення певних видів рівнянь, нерівностей, їхніх систем.

IV. *Етап навчання учнів застосування методу для розв'язування задач певного виду.* Цей етап основною своєю метою має формування в учнів умінь, пов'язаних не з реалізацією окремих компонентів методу, а із застосуванням методу в цілому (при цьому вид задачі, а виходить, і вид розв'язуючої моделі є визначеним однозначно).

V. *Етап навчання учнів застосування методу для розв'язування широкого кола математичних задач.* Основна мета цього етапу – формування в учнів уміння здійснювати раціональний вибір виду розв'язуючої моделі запропонованої задачі.

Виділення в процесі формування методу рівнянь і нерівностей перерахованих етапів дає можливість стверджувати, що формування діяльнісних компонентів методу (розв'язування першого навчального завдання) більшою мірою здійснюється на першому–четвертому етапах, а гносеологічних компонентів — на четвертому та п'ятому етапах. Варто мати на увазі, що запропонована етапізація аналізованого процесу є умовною, тому що відокремити розв'язування одного навчального завдання від іншого неможливо. В іншому випадку ми не зможемо говорити про формування всіх компонентів, а виходить, і методу рівнянь та нерівностей у цілому.

Завдання 14. З курсу алгебри (або геометрії) VII класу підберіть дві задачі практичного змісту, робота над розв'язуванням яких, на вашу думку, переконає учнів у доцільності спеціального вивчення методу рівнянь як методу розв'язування задач (розв'язуючі моделі задач: лінійне рівняння з однією змінною; система двох лінійних рівнянь із двома змінними).

Завдання 15. Опишіть методику організації вчителем етапу засвоєння учнями суті методу рівнянь і нерівностей (на прикладі задачі, розв'язуючою моделлю якої буде система лінійних нерівностей з однією змінною).

Завдання 16. Складіть набори задач, направлених на формування в учнів операцій:

- уведення позначень для невідомих, якщо основне невідоме встановлене;
- виділення основного відношення даної задачі, що використовується для одержання рівняння.

Орієнтуйтеся на курс математики V–VI класів.

Завдання 17. Опишіть методику формування вміння застосовувати метод рівнянь і нерівностей при розв'язуванні задач певного виду.

Зробіть це на прикладі такої задачі. В 5 л розчину, що містить 30% кислоти, почали вливати розчин, що містить 70% кислоти. Скільки потрібно влити другого розчину в перший, щоб їхня суміш містила не менше 60% кислоти?

Завдання 18. Орієнтуючись на курс математики IX класу, складіть набір задач, який можна використовувати з метою формування в учнів умінь здійснювати раціональний вибір виду розв'язуючої моделі запропонованої задачі.

При виконанні завдань до даної лабораторної роботи використайте в якості зразка розв'язану текстову задачу з лабораторної роботи №7 та приклад роботи над задачею, що поданий нижче.

Задача. Маємо два сплави (розчини і таке подібне) з концентрацією речовини P відповідно x та y відсотків. У якому співвідношенні слід взяти ці сплави (розчини і таке подібне), щоб отримати сплав з концентрацією речовини P рівною z?

Дана задача лежить в основі розв'язування більш складних задач на відсотки та частини. Зобразимо *ієрархію задачної ситуації* (рис. 15-1), а потім від неї перейдемо до структурної моделі у вигляді матриці інформації.

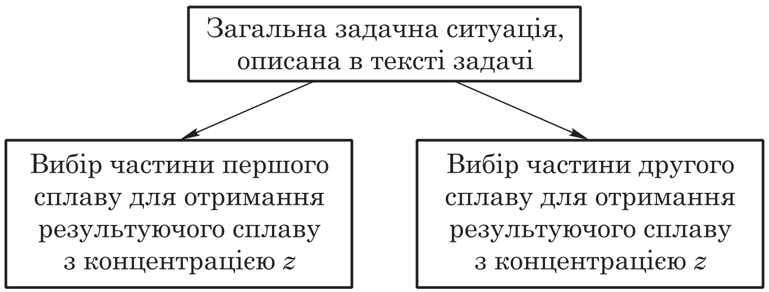


Рис. 15-1. Ієрархічна модель задачної ситуації задачі

Не втрачаючи загальності, покладемо, що $y < z < x$. Ми пропонуватимемо такий метод розв'язування задачі, який відображатиме структуру задачної ситуації. Нехай результуючий сплав (розчин і таке подібне) отримано у кількості $a + b$. Врахуємо, що ми для цього візьмемо першого сплаву у кількості a, а другого сплаву — у кількості b. Надалі потрібно заповнити клітинки *матриці інформації*, виходячи з умови задачі та позначень невідомих величин. Пояснимо основні особливості створення *структурної моделі задачної* ситуації (рис. 15-2), яка містить опис обох ситуацій, зображених ієрархічною моделлю (див. рис. 15-1). По горизонталі задачна ситуація характеризується трьома параметрами — вагою речовини P у сплаві, вагою сплаву та частиною речовини P у сплаві. Вертикальні стовпчики описують кількісні характеристики першого та другого сплавів та кількісні характеристики сплаву, що отримався. Оскільки, за умовою задачі, x — відсотковий вміст речовини P у першому сплаві, y — відсотковий вміст речовини P у другому сплаві, z — відсотковий вміст речовини P у сплаві, що отримався, то частина речовини P у першому сплаві становить $\frac{x}{100}$, у другому сплаві — $\frac{y}{100}$, у сплаві, що отримався — $\frac{z}{100}$, а вага речовини P у першому сплаві — $a\cdot\frac{x}{100}$, у другому сплаві — $b\cdot\frac{y}{100}$, а в результуючому сплаві — $(a+b)\cdot\frac{z}{100}$.

Вага речовини P у сплаві	$a\cdot\frac{x}{100}$	+	$b\cdot\frac{y}{100}$	=	$(a+b)\cdot\frac{z}{100}$
	‖		‖		‖
Вага сплаву	a	+	b	=	$a+b$
	×		×		×
Частина речовини P у сплаві	$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	1-й сплав (розчин і т. ін.)		*2-й сплав (розчин і т. ін.)*		*Сплав (розчин і т.ін.), що отримався*

Рис. 15-2. Структурна модель задачної ситуації задачі

Ідея створення матриці інформації задачної ситуації полягає в тому, що:

1) після введення невідомих величин x, y, z заповнюємо клітинки матриці інформації;

2) у матриці інформації зображуємо зв'язки між її елементами (клітинками) у вигляді рівностей у стовпчиках та в рядках;

3) серед цих рівностей знаходимо рівняння чи систему рівнянь і, цим самим, побудуємо модель задачної ситуації у вигляді рівнянь, із яких і знайдемо відповідь.

Модель задачної ситуації у вигляді рівняння є розв'язуючою (з якої отримуємо розв'язок) і позначається на *структурній моделі* (див. рис. 15-2) зафарбованими клітинками. В результаті отримаємо рівняння:

$$a \cdot \frac{x}{100} + b \cdot \frac{y}{100} = (a+b) \cdot \frac{z}{100} \quad . \qquad (1)$$

Здійснивши елементарні перетворення: помножимо рівність на 100, зведемо подібні доданки при a та b, розділимо отриману рівність на добуток $b \cdot (x - z)$, отримаємо співвідношення (або пропорцію):

$$\frac{a}{b} = \frac{z-y}{x-z} \, . \qquad (2)$$

Задача. Два шматки сплаву з масами 6 кг і 8 кг мають різний відсотковий вміст міді. Від першого шматка відтяли деяку частину, а від другого — частину, у два рази більшу за масою, ніж від першого. Кожну з відтятих частин сплавили з рештою іншого шматка, після чого дістали два нових сплави з однаковим відсотковим вмістом міді. Яка маса кожної з частин, відтятих від кожного зі шматків початкових сплавів?

Умова задачі у вигляді тексту є вербальною моделлю певної проблемної ситуації і, по суті, задає задачну ситуацію як систему даних і запитання задачі.

Першою евристикою процесу розв'язання задачної ситуації *буде створення* моделі задачної ситуації у вигляді ієрархії її складових

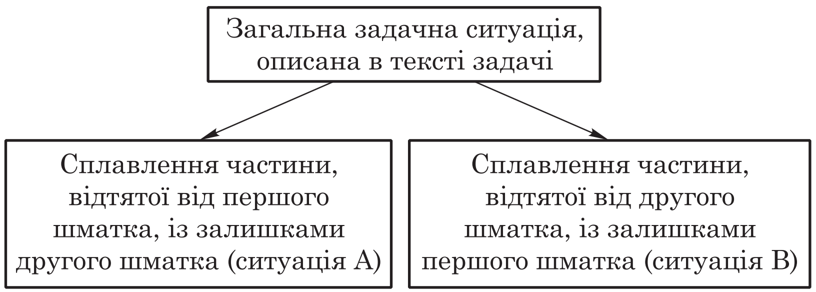


Рис. 15-3. Ієрархічна модель задачної ситуації

(рис 15-3). *Така модель створюється на основі даних задачі і відображатиме порядок складових* (*субординацію*) *у системі «задачна ситуація». Однак створена* ієрархічна модель задачної ситуації *не відображає проблему задачної ситуації* (*запитання задачі*) *та зв'язки між складовими системи «задачна ситуація».*

Другою основною евристикою процесу розв'язання задачної ситуації *буде створення її моделі у вигляді матриці* (*таблиці*) *інформації.* Ця модель створюється на основі умови задачі й попередньої ієрархічної моделі. «Частковими» евристиками створення моделі задачної ситуації на цьому етапі будуть такі :

1. Матриця інформації матиме три основні рядки, які характеризуватимуть кількісні показники частини цілого, цілого та відсотка частини в цілому, а також дві групи стовпців, які відображають дві складові ієрархічної моделі (ситуації А та В). Елементарними складовими такої системної моделі задачної ситуації будуть клітинки матриці інформації.

Окрім цього потрібно між основними рядками і стовпцями виділити ще вільні рядки і стовпці для відображення зв'язків між елементами системи «матриця інформації».

2. Уводимо невідомі величини і заповнюємо клітинки матриці інформації у відповідності з даними вербальної та ієрархічної моделей задачі.

3. Зображуємо зв'язки між основними компонентами (клітинками) матриці інформації:

3.1. Вертикальні зв'язки визначаються співвідношенням $a = b \cdot \frac{n}{100}$, де a — частина цілого, b — ціле, n — відсоток частини в цілому.

3.2. Горизонтальні зв'язки визначаються з умов задачі та з аналізу задачної ситуації на основі її попередніх моделей.

4. Серед можливих рівностей у матриці інформації визначаємо рівняння, з яких буде визначена невідома величина (чи невідомі величини).

Реалізуємо вказані евристики на прикладі згаданої задачі. Визначимо такі компоненти ієрархічної моделі задачної ситуації: сплавлення частини, відтятої від першого шматка, із залишками другого шматка (ситуація А); сплавлення частини, відтятої від другого шматка, із залишками першого шматка (ситуація В) (див. рис. 15-3). Введемо позначення невідомих величин: x — відсотковий вміст міді у першому шматку сплаву, y — відсотковий вміст міді у другому шматку сплаву, z — відсотковий вміст міді у шматках сплавів, що отрималися, m — маса частини, відтятої від першого шматка.

Вага міді у сплаві	?	=	?	+	?	?	+	?	=	?
	‖		‖		‖	‖		‖		‖
Вага сплаву	$8-m$	=	m	+	$8-2m$	$6-m$	+	$2m$	=	$6+m$
	×		×		×	×		×		×
Частина міді у сплаві	$\frac{z}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$	$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	сплав, що отримався		*1-й сплав*		*2-й сплав*	*1-й сплав*		*2-й сплав*		*Сплав, що отримався*
	Ситуація А					*Ситуація В*				
	Загальна задачна ситуація, описана в тексті задачі									

Рис. 15-4. Структурна модель задачної ситуації задачі.

Тепер заповнимо клітинки матриці інформації, виходячи з умови основної задачі та позначень невідомих величин. Пояснимо основні особливості створення такої матриці, яка зображає *структурну модель задачної ситуації* (рис. 15-4). Структурна модель містить опис обох ситуацій, зображених в ієрархічній моделі (див. рис. 15-3). По горизонталі задачна ситуація характеризується аналогічно до структурної моделі попередньої задачі трьома параметрами — вагою міді у сплаві, вагою сплаву та частиною міді у сплаві. Вертикальні стовпці описують кількісні характеристики ситуацій А та В. При аналізі ситуації А виділимо три її компоненти: кількісні характеристики шматка, відтятого від першого сплаву; кількісні характеристики залишку другого сплаву; кількісні характеристики сплаву, що отримався.

Справді, оскільки x — відсоток частки міді у першому шматку сплаву, y — відсоток частки міді у другому шматку сплаву, z — відсоток частки міді у шматках сплавів, що отрималися, то частина міді у першому сплаві — $\frac{x}{100}$, у другому сплаві — $\frac{y}{100}$, у сплаві, що отримався — $\frac{z}{100}$.

Через те, що m — маса частини, відтятої від першого шматка, то від другого шматка, за умовою задачі, відтяли $2m$. Тоді маємо, що

m кг першого шматка сплавляють з частиною другого шматка, що лишилася, а це $8-2m$ кг. Тому маса шматка, що отримався у результаті сплавляння, визначиться так:

$$8-2m+m=8-m(\text{кг}).$$

Позначимо на рис. 15-4 незаповнені клітинки знаками питання: вагу міді у шматку, що отримався в результаті сплавляння; вагу міді у частині, що відтяли від першого шматка; вагу міді у частині, що залишилася від другого шматка. Враховуючи змістовний зв'язок (1), характерний для таких задач, ми легко можемо визначити перелічені величини, відповідно позначивши їх як $(8-m)\cdot\frac{z}{100}$, $m\cdot\frac{x}{100}$, $(8-2m)\cdot\frac{y}{100}$ (на структурній моделі ці зв'язки вказані як вертикальні).

Зазначимо, що логічно буде вказати і той факт, що сума вмістів міді у частині, що відтяли від першого шматка, та у частині, що залишилася від другого шматка, дорівнює вмісту міді у шматку, що отримався в результаті сплавляння. Цей факт позначений на структурній моделі наявністю горизонтального зв'язку в рядку «вага міді у сплаві» у характеристиках «ситуації А». Відмітимо, що вказане співвідношення буде компонентом розв'язуючої моделі задачі, яка буде представлена у даному випадку системою алгебраїчних рівнянь. Аналогічним способом аналізуємо ситуацію В і заповнюємо клітинки правої частини матриці інформації (див. рис. 15-4) і оформимо матрицю інформації, що зображена на рис. 15-5.

Вага міді у сплаві	$(8-m)\cdot\frac{z}{100}$	=	$m\cdot\frac{x}{100}$	+	$(8-2m)\cdot\frac{y}{100}$	$(6-m)\cdot\frac{x}{100}$	+	$2m\cdot\frac{y}{100}$	=	$(6+m)\cdot\frac{z}{100}$
	‖		‖		‖	‖		‖		‖
Вага сплаву	$8-m$	=	m	+	$8-2m$	$6-m$	+	$2m$	=	$6+m$
	×		×		×	×		×		×
Частина міді у сплаві	$\frac{z}{100}$		$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$	$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	сплав, що отримався		*1-й сплав*		*2-й сплав*	*1-й сплав*		*2-й сплав*		Сплав, що отримався
	Ситуація А					*Ситуація В*				
	Загальна задачна ситуація, описана в тексті задачі									

Рис. 15-5. Побудова системи рівнянь за структурною моделлю

Третьою основною евристикою процесу розв'язання задачної ситуації буде створення її *моделі у вигляді алгебраїчного рівняння* (*або системи алгебраїчних рівнянь*), яке одержимо зі структурної моделі задачної ситуації – «матриці інформації».

Алгебраїчна модель задачної ситуації — система рівнянь (4) (на рис. 15-5 зафарбована сірим кольором), яка в результаті елементарних перетворень (множимо обидва рівняння системи на 100, розкриємо дужки, з першого рівняння виразимо $8(z-y)$, а з другого — $6(x-z)$) перетворюється в систему (4. 1):

$$\begin{cases} (8-2m)\cdot\dfrac{y}{100}+m\cdot\dfrac{x}{100}=(8-m)\cdot\dfrac{z}{100}, \\ (6-m)\cdot\dfrac{x}{100}+2m\cdot\dfrac{y}{100}=(6+m)\cdot\dfrac{z}{100}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 8\cdot(z-y)=m\cdot(x+z-2y), \\ 6\cdot\left(x-z\right)=m\cdot\left(x+z-2y\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

Із системи (4.1) отримуємо:

$$\frac{z-y}{x-z}=\frac{3}{4}. \tag{5}$$

Враховуючи результати розв'язання першої задачі, робимо висновок, що для виконання умови другої задачі у процесі сплавляння шматків маса шматка першого сплаву має відноситися до маси шматка другого сплаву, як 3:4. Складемо пропорцію (див. ліву або праву частину матриці інформації на рис. 15-5 — рядок «вага сплаву»):

$$\frac{m}{8-2m}=\frac{3}{4} \text{ або } \frac{6-m}{2m}=\frac{3}{4}.$$

У результаті розв'язування будь-якого з рівнянь отримаємо результат $m = 2{,}4$ кг. Тобто, від першого шматка відтяли 2,4 кг, а від другого (за умовою, у 2 рази більше) — 4,8 кг.

Це ж співвідношення випливає і з наочного порівняння рівняння (1) з другим рівнянням системи (4).

Для цього використаємо схематичне зображення.

a	$\times$	$\frac{x}{100}$	+	b	$\times$	$\frac{y}{100}$	=	$a+b$	$\times$	$\frac{z}{100}$
$6-m$	$\times$	$\frac{x}{100}$	+	$2m$	$\times$	$\frac{y}{100}$	=	$6+m$	$\times$	$\frac{z}{100}$

Як показано раніше, із першого рівняння цього схематичного зображення отримуємо розв'язок першої задачі у вигляді пропорції:

$$\frac{a}{b}=\frac{z-y}{x-z}.$$

На основі цієї пропорції і співвідношення (5) отримуємо:

$$\frac{6-m}{2m}=\frac{z-y}{x-z}=\frac{3}{4}.$$

Звідси знаходимо $m = 2{,}4$ *кг*.

Використання результатів першої задачі як допоміжної для розв'язування другої задачі дозволяє здійснити декомпозицію розв'язування другої задачі до двох задач, які розв'язуються послідовно, що значно полегшує розв'язання другої задачі.

Самостійна робота

1. **Укажіть конкретні особливості, пов'язані із застосуванням методу рівнянь і нерівностей до розв'язування наступних задач.**

Задача 1. Основи трапеції відносяться, як 2:3, а середня лінія трапеції дорівнює 5 м. Знайти основи трапеції.

Задача 2. Середня лінія трапеції дорівнює 7 см, а одна з основ більша від іншої на 4 см. Знайти основи трапеції.

Задача 3. Човен перебуває на відстані 3 км від найближчого пункту A берега озера. Пасажир човна хоче потрапити в село B, що знаходиться на березі на відстані 5 км від A. Човен рухається зі швидкістю 4 км/год, а пасажир, вийшовши із човна, може за годину пройти 5 км. До якого пункту берега повинен пристати човен, щоб пасажир досяг села за найкоротший час?

Якими знаннями, уміннями повинні володіти учні, щоб використати метод рівнянь і нерівностей при розв'язуванні кожної із цих задач?

2. **Складіть конспект уроку з теми «Розв'язування задач з використанням системи двох лінійних рівнянь із двома змінними».**
3. **Складіть підсумкову контрольну роботу з теми «Квадратні рівняння», включивши до неї задачу, для розв'язування якої потрібно застосувати метод рівнянь. Запропонуйте норми оцінки цієї контрольної роботи, вказавши конкретно, правильність виконання яких дій учнів і яким чином буде оцінюватися.**

4. **Маючи на увазі конкретну задачу (набір задач), розробіть засоби наочності (наприклад, набір кодопозитивів або сценарій мультимедійної презентації), які доцільно використати в процесі навчання учнів реалізації кожного з етапів процесу математичного моделювання при розв'язуванні задач методом рівнянь і нерівностей.**

Література: [4], [5], [7], [8], [9], [15], [24], [25], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [47], [49], [50], [52], [53], [54], [55].

Лабораторна робота №16

Методика формування й використання координатного методу в школі

Цілі роботи. 1. Визначити цілі й навчальні завдання введення й використання координатного методу в школі.

2. Систематизувати понятійний апарат й основний зміст знань з питань використання координатного методув школі.

3. Розкрити специфіку використання координатного методу в шкільних курсах алгебри й геометрії.

4. Проаналізувати шкільні підручники з питань формування й використання координатного методу в школі.

5. Розробити конкретну методику формування окремих компонентів методу й використання координатного методу в школі.

Основний зміст

I. Цілі й навчальні завдання вивчення координатного методу в школі.

1. Показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, використовуючи які можна виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою у вигляді рівнянь, нерівностей, їхніх систем чи сукупностей, функцій з подальшим переведенням указаних моделей на геометричну мову (графіків).

2. Сформувати понятійний апарат координатного методу (координатна пряма й координатна площина, координати точки, рівняння прямої, кола, параболи, гіперболи, довжина відрізка, координати середини відрізка).

3. Сформувати конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри й геометрії.

II. Понятійний апарат координатного методу для прямокутної системи координат.

Абсциса (лат. «відтинати») — це відрізок, що відтинається на осі Ox.

Ордината (лат. «упорядкований») — це відрізок, що відтинається на осі Oy .

Координати (точки) — числа, узяті в певному порядку, й точки, що характеризують положення точки на лінії, на площині, у просторі.

Пряма, на якій застосовано зазначений спосіб зображення дійсних чисел, називається *координатною*.

Зауважимо, що у математиці є теорема (аксіома), що вводить *координатну пряму* або *координати на прямій*. У школі координатна пряма вводиться поступовим «присвоєнням» точкам прямої певних чисел у зв'язку з розширенням числових множин й осмисленням операції відкладання відрізка (вимірювання відрізка).

Координатна площина — площина, на якій розглядаються два класи таких ліній, що кожна лінія одного класу перетинається з кожною лінією іншого класу тільки в одній точці. Початкові лінії вибрали $x = 0$ і $y = 0$ (їх назвали осями координат). Лінії $x = const$ і $y = const$ — координатні лінії.

Координатний метод — спосіб визначення положення точки (на прямій, на площині, у просторі) з допомогою чисел (для декартової системи координат). Використовуючи координатний метод, алгебраїчні рівняння можна витлумачити у вигляді геометричних образів (графіків) і, навпаки, шукати розв'язування геометричних задач з допомогою аналітичних формул (рівнянь і їхніх систем).

III. Основні знання й навчальні задачі, що формують координатний метод:

- знати запис точки в координатній формі й за даною координатною формою будувати її на координатній площині (прямій);
- знати задання прямої в координатній формі і за даною координатною формою будувати пряму на координатній площині.

Пряма однозначно визначається рівнянням, якщо: а) його задовольняють координати $(x; y)$ будь-якої точки цієї прямої, і навпаки; б) будь-яка пара чисел $(x; y)$, що задовольняє рівняння прямої, являє собою координати відповідної точки прямої. Будь-яка пряма на координатній площині має рівняння виду $ax + by + c = 0$ (або прийняте для шкільного курсу алгебри $y = kx + b$). Знайшовши координати двох точок, можна одержати геометричний образ прямої на координатній площині. Використовуючи аналітичну і геометричну мови, можна описати властивості прямої аналітичноюта геометричною мовами (див. завдання для самостійної роботи).

Аналогічно рівняння кола із центром $C(a; b)$ і з радіусом r буде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (якщо центр кола лежить на початку координат, то рівняння кола $x^2 + y^2 = r^2$); рівняння параболи $y = ax^2$, $a \neq 0$ (шляхом зсувів осей координат можна перейти й до рівняння виду $y = ax^2 + bx + c$).

В аналітичній геометрії канонічний вид гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; якщо $b = a$, то гіпербола рівнобічна і її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$. Якщо за осі координат прийняти асимптоти рівнобічної гіперболи, то рівняння буде $xy = \frac{a^2}{2}$ або, поклавши $\frac{a^2}{2} = k$, одержимо шкільне рівняння гіперболи $y = \frac{k}{x}$.

Необхідно пам'ятати *основну вимогу до рівняння будь-якої лінії*. Рівняння буде *рівнянням лінії*, якщо його задовольняють координати $(x; y)$ будь-якої точки цієї лінії, і навпаки: будь-яка пара чисел $(x; y)$, що задовольняє рівняння лінії, являє собою координати точки.

Дана обставина в шкільних математичних задачах виражається в завданнях: а) з'ясувати, чи належить дана точка лінії (прямій, параболі, колу, гіперболі); б) дано точку на лінії, рівняння якої відоме, знайти її координати.

Знання рівнянь основних ліній, досліджуваних у шкільному курсі геометрії, зводиться до розв'язування *двох типів навчальних задач*: а) за заданими геометричними властивостями лінії скласти її рівняння; б) за заданим рівнянням лінії з'ясувати її геометричні властивості. У курсі алгебри друге завдання формулюється інакше: за заданим рівнянням побудувати графік (зобразити графік) лінії і з допомогою графічної мови з'ясувати властивості функції, а потім з'ясовані властивості перевести на аналітичну мову. Перше завдання розв'язується у випадку застосування координатного методу в геометрії і звичайно називається «складанням рівняння лінії».

У шкільному курсі математики використовується ще одна група фактів з аналітичної геометрії:

- відстань між точками;
- поділ відрізків у даному відношенні (окремий випадок – знаходження координат середини відрізка).

Дана група фактів в основному застосовується в геометрії для знаходження відстані між точками й координат середини відрізка.

IV. Обґрунтування доцільності використання координатного методу в школі й основні його етапи.

Як приклад можна навести розв'язування задачі координатним способом з лабораторної роботи №14. Крім того, розглянемо розв'язування координатним способом ще двох математичних задач.

Завдання 1. Розв'яжіть координатним методом задачу: «У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола поділяє висоту, проведену до основи, у відношенні 17:15, починаючи від вершини. Основа трикутника дорівнює 60 см. Знайти радіус вписаного кола».

Дано: ABC — трикутник, $AB = BC$, $AC = 60$ см, M — центр вписаного кола, $\frac{BM}{MO} = \frac{17}{15}$.

Знайти MO.

Суть використання координатного методу зводиться до декількох найбільш істотних дій: а) написання (складання) рівняння лінії (прямої, кола, параболи й ін.); б) знаходження відстані між точками, знаходженню координат точок на відрізку (частіше — середини відрізка; іноді — точки, що ділить відрізок у даному відношенні).

Етапи використання координатного методу при розв'язуванні задач з геометрії (на матеріалі конкретного математичного завдання) такі:

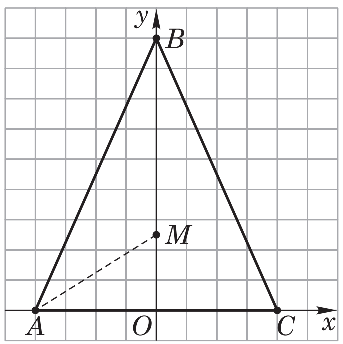


Рис. 16-1

I етап. Розмістити фігури на координатній площині так, щоб більш раціонально можна було виразити в координатній формі відрізки фігури (як дані, так і шукані) і «побачити» використання координатного методу для знаходження шуканого елемента.

На рис. 16-1 шуканий елемент — це радіус вписаного у трикутник кола — довжина відрізка MO. Введемо систему координат. Початок координат співпадає з точкою O, вісь Ox містить основу AC трикутника ABC, вісь Oy містить висоту BO трикутника.

II етап. Записати в координатній формі з урахуванням даних задачі координати точок – елементів трикутника: $A(-30;\,0)$, $C(30;\,0)$, $B(0;\,b)$, $M\left(0;\frac{15}{32}b\right)$.

III етап. Записати, виходячи із плану розв'язування задачі, рівняння ліній, відстань між точками, координати середин відрізка й т. ін.

У нашому прикладі треба записати співвідношення, що випливає з умови задачі:

$$OM = \frac{15}{32}\cdot OB = \frac{15}{32}\cdot b\,.$$

IV етап. Виконати перетворення отриманого в координатній формі виразу.

У подальшому вся проблема буде полягати у визначенні значення b. З трикутника AOB маємо:

$$\frac{BO}{AO} = \frac{b}{30} = \operatorname{tg}\angle A = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\angle A}{2}}\,,\text{ або } 60\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = b - b\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\angle A}{2}\,.$$

Розв'язавши рівняння відносно $\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}$, матимемо:

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{-30+\sqrt{900+b^2}}{b}\,.$$

З прямокутного трикутника AOM визначивши $OM = AO\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = 30\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}$, отримаємо:

$$\frac{15}{32}\cdot b = 30\cdot\frac{-30+\sqrt{900+b^2}}{b}\,,$$

або після елементарних перетворень:

$$b^4 - 4\cdot 64\cdot b^2 = 0\,,$$

звідки маємо, що $b = 16$.

Отже, $OM = \frac{15}{32}\cdot 16 = 7{,}5$ (см).

V этап. Осмислити отримані результати на тій мові, на якій було написане завдання.

Відповідь: $OM = 7{,}5$ см.

У розв'язуванні задачі використані етапи моделювання: переведення тексту задачі на «координатну» мову; робота над виразом у координатній формі; переведення з координатної мови на геометричну, осмислення результатів на цій мові.

Завдання 2. Розв'яжіть систему рівнянь координатним способом:

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 8, \\ x - y^2 = -2. \end{cases}$$

Спроба розв'язати рівняння аналітичним шляхом приводить до рівняння $4x^4 - 32x^2 - x + 62 = 0$, що елементарними прийомами розв'язати неможливо. Для знаходження пар розв'язків даної системи можна скористатися координатним методом, тільки в іншому порядку.

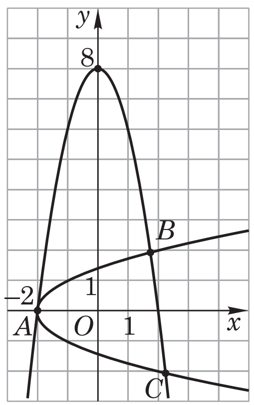


Рис. 16-2

Можна використати побудову графіків рівнянь системи вручну, або ж з використанням одного з прикладних математичних пакетів — наприклад, Advanced Grapher. Зображуємо графіки даних у системі рівнянь і позначаємо точки перетину графіків (рис. 16-2). Координати цих точок і є пари розв'язків даної системи. Використавши доступне у згаданому пакеті меню «Перетини», ми можемо встановити координати точок: $A(-2;\ 0)$, $B(1{,}74;\ 1{,}93)$, $C(2{,}24;\ -2{,}06)$ (координати двох останніх точок обчислені наближено з точністю до сотих).

Завдання 2(а). Оцініть, скільки розв'язків має кожна із систем:

а) $\begin{cases} 2x^2 + y = 8, \\ x - y^2 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + y = 8, \\ x - y^2 = 0{,}5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 + y = 8, \\ x - y^2 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 + y = 8, \\ x - y^2 = 2{,}7. \end{cases}$

V. Аналіз шкільних підручників з питань формування й застосування координатного методу в дев'ятирічній школі.

Для того, щоб здійснити аналіз, виділимо: а) основні знання й уміння, необхідні для того, щоб можна було стверджувати, що метод сформований; б) завдання, які показують, що метод застосовується усвідомлено.

До *знань та умінь, необхідних для засвоєння понятійного апарату методу*, необхідно віднести: 1) розуміння двох основних задач методу (побудова точки за її координатами і знаходження координат заданої точки на промені, прямій і площині); 2) знання формул фігур, що найбільш часто зустрічаються в школі (прямої, параболи, гіперболи, кола) і прийомів їх побудови за характеристичними властивостями; 3) знання формули відстані між точками і вміння знайти цю відстань (сюди ж належить уміння знаходити середину відрізка); 4) уміння виконати переведення з аналітичної мови на графічну й навпаки.

Про усвідомленість застосування координатного методу можна судити, якщо учні: а) обґрунтовують застосування графічної або аналітичної мови залежно від конкретної ситуації задачі; б) уміють найбільш раціонально розмістити фігуру на координатній площині для застосування координатного методу при розв'язуванні математичної задачі.

Завдання 3. На основі аналізу навчального матеріалу підручників з'ясуйте, які знання є «стрижневими» у формуванні координатного методу, в яких класах ці знання формуються, які змістовні зв'язки між ними встановлені.

Завдання 4. Проаналізуйте завдання з §8 підручника [3] і §8 (8 клас) підручника [46] і виберіть по одній найбільш «представницькій» математичній задачі, що ефективно ілюструє всі етапи реалізації координатного методу в школі.

Нагадаємо основні *етапи вивчення в школі координатного методу*: а) переведення з аналітичної мови на графічну основного відношення задачі (із графічної на аналітичну, якщо задача задана графічною мовою); б) перетворення або дослідження об'єкта новою мовою, більш зручною і результативною для вивчення об'єкта; в) переведення результату перетворення або дослідження на мову розв'язуваної задачі; г) осмислення отриманого результату.

VI. Розробка конкретної методики формування окремих компонентів координатного методу в школі.

У *формуванні координатного методу* в школі можна виділити кілька *етапів*:

1. Засвоєння основного понятійного апарату.

Це засвоєння здійснюється в основному в V–VI класах і систематизується в курсі геометрії, якщо цей курс активно використовує даний метод, як це зроблено в підручниках[3] та [36].

2. Уведення на основі цього понятійного апарату графіків рівнянь і графіків функцій.

Два ці навчальні завдання розв'язуються в різних предметах (геометрії й алгебрі), з різною змістовною метою; тому учні часто не бачать між ними зв'язку, а виходить, і не засвоюють головної суті методу.

3. Розкриття основних етапів застосування методу в курсах алгебри й геометрії.
4. Використання координатного методу для розв'язування різних математичних задач.

Завдання 5. У підручнику [46] основний понятійний апарат координатного методу вводиться повторно у VIII класі. Чи є в цьому необхідність? Якщо є, то якими прийомами актуалізувати знання з даного питання, отримані в курсі алгебри, і як побудувати вивчення цього питання в курсі геометрії? Запропонуйте варіант методики вивчення цього питання у VIII класі.

Найбільш складним є другий етап формування координатного методу. І ці труднощі пов'язані з тим, що в курсі алгебри VII класу графіки основних функцій уводяться шляхом побудови ряду точок, координати яких обчислюються за формулою функції. У курсі геометрії рівняння прямої і кола вводяться на основі геометричних характеристичних властивостей множини точок (рівновіддаленості від двох точок — для прямої і від однієї точки — для кола).

Строгих обґрунтувань у курсі алгебри того, що графік прямої пропорційності є пряма, не дається. Вперше до цього звертаються в курсі геометрії. Різні підручники цю проблему розв'язують методично по-різному: в одних використовується явно подібність, в інших — рівновіддаленість від двох точок, що в підсумку теж зводиться до подібності, у третіх для часткових випадків $k = 1$ розглядається бісектриса першого і третього координатних кутів і т. ін.

Завдання 6. Проаналізуйте підручники [8] та [32] у контексті обґрунтувань того факту, що функції виду $y = kx$ і $y = kx + b$, де k і b — числа, а x — змінна, мають графіком пряму лінію.

Оцініть ефективність кожного з варіантів викладу цього матеріалу з урахуванням зв'язку з курсом геометрії і наступності з іншими питаннями алгебри.

Завдання 7. Розробіть методику узагальнюючого уроку на тему «Рівняння ліній, досліджуваних у шкільному курсі математики». У матеріалі уроку передбачте, де вперше і якою мовою (алгебраїчною чи геометричною) вводиться кожна з ліній (пряма, парабола, гіпербола, коло). Як аргументується вигляд кожної лінії? Які її властивості і якою мовою вивчаються? Які відомі прийоми переведення кожної з ліній з однієї мови на іншу?

Докладний розгляд цього етапу формування методу дає учням у руки ряд прийомів, що допомагають використовувати більш ефективно координатний метод.

Третій етап може бути розкритий на прикладі двох конкретних задач, аналогічних до тих, які наведені в IV розділі лабораторної роботи.

Завдання 8. На прикладі задачі «Катети прямокутного трикутника дорівнюють 2 см та 6 см. Знайти довжину бісектриси прямого кута» проілюструйте методичні особливості використання координатного методу для розв'язування задач із геометрії.

Самостійна робота

Підберіть набір математичних задач із курсів алгебри й геометрії, на прикладі розв'язування яких можна буде перевірити сформованість в учнів умінь використовувати координатний метод. Для цього заплануйте пред'явлення учням завдань з розгорнутою відповіддю з урахуванням цілей, поставлених на початку лабораторної роботи. Виділіть основні навчально-пізнавальні дії, володіння якими учні повинні показати при розв'язуванні цих задач. Розробіть змістовні критерії оцінки володіння цими діями і співвіднесіть їх з обов'язковими результатами навчання.

Література: [1], [2], [3], [4], [10], [11], [12], [15], [18], [19], [24], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [50], [51], [52], [53], [55].

Лабораторна робота №17

Методика навчання учнів векторного методу в шкільному курсі геометрії

Мета роботи. Розглянути особливості вивчення та використання векторного методу в школі, виділити основні компоненти розв'язування задач цим методом, розглянути понятійний апарат (перелічити основні поняття, які повинен знати учень, основні дії, які він повинен опанувати) векторного методу розв'язування задач, розглянути методику навчання учнів векторного методу за різними шкільними підручниками.

Основний зміст

1. *Вектор* — одне з фундаментальних понять сучасної математики й широко використовується в різних її областях. У роботах Г. Бесселя, Ж. Аргана й К. Ф. Ґаусса з теорії комплексних чисел встановлено зв'язок між арифметичними операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами у двовимірному просторі. У роботах В. Гамільтона, Г. Ґрассмана, Ф. Мебіуса поняття вектора знайшло широке застосування при вивченні властивостей тривимірного й багатомірного просторів. У цей час на векторній основі викладаються лінійна алгебра, аналітична й диференціальна геометрія, функціональний аналіз та ін.

До поняття вектора як направленого відрізка приводять багато завдань механіки й інших областей фізики: теорії пружності, теорії електромагнітних полів тощо.

У методиці викладання математики вектор виступає як сполучна ланка між мірою і напрямком.

Цілі вивчення векторного методу в школіє такими:

- дати ефективний метод розв'язування різних геометричних задач (як аффінних, так і метричних) і доведення теорем;
- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії, лінгвістиці й т. д. — і на базі цього формувати в учнів поняття про матеріальну картину світу;
- використати векторний метод при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення й конкретизацію;
- формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість (нешаблонність), цілеспрямованість, раціональність, критичність.

У процесі проведення занять з розв'язування математичних задач векторному методу приділяється велика увага з виділенням основних компонентів розв'язування задач цим методом. Як приклад можна навести розв'язування задачі векторним методом з лабораторної роботи №14. Розглянемо розв'язування ще однієї задачі.

Задача. У трикутній піраміді $DABC$ плоскі кути при вершині D рівні по 90°. Бічні ребра $AD = 6$, $DB = 8$, $DC = 24$. Точка M рівновіддалена від усіх вершин піраміди. Знайти відстань DM.

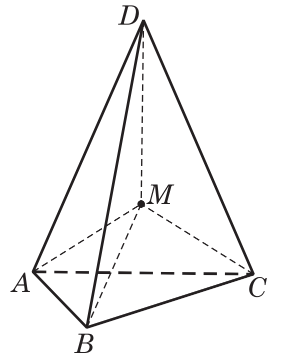


Рис. 17-1

Розв'язування. Виберемо напрямок осей прямокутної системи координат, помістивши в її початок вершину D, так (рис. 17-1): точка A лежить на осі Ox, B — на осі Oy, C — на осі Oz. Нехай $M(x;\ y;\ z)$. Виберемо базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді розкладання векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{DM}$ за базисними запишеться так:

$$\overrightarrow{AM} = (x-6)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-0)\vec{k};$$
$$\overrightarrow{BM} = (x-0)\vec{i} + (y-8)\vec{j} + (z-0)\vec{k};$$
$$\overrightarrow{CM} = (x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-24)\vec{k};$$
$$\overrightarrow{DM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Запишемо умову рівновіддаленості точки M від вершин векторною мовою: $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2$ або:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{DM}^2, \\ \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{DM}^2, \\ \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2; \end{cases} \quad \begin{cases} ((x-6)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-0)\vec{k})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2, \\ ((x-0)\vec{i} + (y-8)\vec{j} + (z-0)\vec{k})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2, \\ ((x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-24)\vec{k})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 + (y-8)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ x^2 + y^2 + (z-24)^2 = x^2 + y^2 + z^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6)^2 = x^2, \\ (y-8)^2 = y^2, \\ (z-24)^2 = z^2; \end{cases} \begin{cases} 12x = 36, \\ 16y = 64, \\ 48z = 576; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \ \ \overrightarrow{DM}(3;4;12), \\ y = 4, \ \ \overrightarrow{DM}^2 = 9 + 16 + 144 = 169, \\ z = 12; \ \ DM = 13. \end{cases}$$

Відповідь: $DM = 13$.

2. Основні *компоненти векторного методу* розв'язування задач.

1) Переклад умови задачі на мову векторів, у тому числі:

- уведення в розгляд векторів;
- вибір системи координат (якщо це необхідно);
- вибір базисних векторів;
- розкладання всіх уведених векторів за базисними.

2) Складання системи векторних рівностей (або однієї рівності). Відмітимо, що в школі частіше використовуються векторні тотожності і їхні перетворення, рідше — векторні рівняння. Тому ми будемо використовувати термін «рівність».

3) Спрощення векторних рівностей.

4) Заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язування.

5) Пояснення геометричного змісту отриманого розв'язування системи рівнянь (або одного рівняння).

3. *Понятійний апарат та уміння*, які повинен опанувати учень, щоб навчитися розв'язувати задачі *векторним методом*:

- *основні поняття*: вектор, початок вектора, кінець вектора, однаково направлені вектори, протилежно направлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, неколінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між ненульовими векторами;
- *основні дії, уміння, виконання яких має бути сформоване в учнів*: додавання векторів (користуючись «правилом трикутника», «правилом паралелограма», «правилом паралелепіпеда»); віднімання векторів; множення вектора на число; подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, у вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним з допомогою паралельного перенесення; подання вектора у вигляді його розкладуза двома неколінеарними векторами; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між їхніми довжинами й виконання зворотної дії; вираження довжини вектора через його скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжини цих векторів;
- *дії для оволодіння компонентами методу*: переведення геометричних термінів на мову векторів і розв'язування зворотної задачі; переведення умови задачі на мову векторів, тобто складання системи векторних рівностей за умовою задачі; вибір базисних векторів, розкладання введених у розгляд векторів за базисними векторами; спрощення системи векторних рівностей; заміна векторних рівностей алгебраїчними.

4. Основні етапи формування в учнів векторного методу.

Підготовчий етап. Його мета — оволодіння перерахованими основними поняттями й основними діями.

Мотиваційний етап. Його завдання — показати необхідність оволодіння цим методом і домогтися усвідомлення того факту, що на наступних етапах метою діяльності учнів буде саме засвоєння цього методу розв'язування задач. Прийоми, що використовуються при цьому, — розв'язування таких задач, які векторним методом розв'язуються простіше, ніж будь-яким іншим, або іншим узагалі розв'язати неможливо.

Етап орієнтування. Його мета — роз'яснити суть методу й виділити його основні компоненти на прикладі аналіза розв'язаної цим методом задачі.

Етап оволодіння компонентами методу. Мета — використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компонента, потім — двох, трьох і т. д.).

Етап формування методу «в цілому». Мета етапу — розв'язування задач, у яких працюють всі або більшість компонентів методу (в тому числі й на матеріалі фізики, хімії та інших предметів).

Розподіл формування методу на етапи є досить умовним, тому що перелічені етапи тісно взаємопов'язані. Очевидно, не варто чітко розділяти учням задачі на формування компонентів, але сам учитель повинен чітко знати, який компонент з допомогою якої із задач він буде формувати в учнів. Однак мета кожного етапу повинна бути ясна і вчителеві, і учням.

Завдання 1. Проаналізуйте §12–§15 підручника [3].

А. Виконайте логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу.

В. З'ясуйте, чи дозволяє система задач підручника сформувати в учнів векторний метод розв'язування задач. (При підготовці відповіді на це питання врахуйте, що серед задач цього підручника: відсутні такі, при розв'язуванні яких необхідно всі введені вектори розкладати за базисними; немає завдань, на яких можна було б показати застосування векторного апарату в інших областях знань, крім математики).

C. З'ясуйте, чи досить у даній системі задач для формування кожного ввідного поняття при навчанні теорем, що містяться в цьому параграфі. Назвіть номери задач і вкажіть, на формування якого поняття й вироблення якого вміння «працює» та або інша задача.

Завдання 2. На основі аналізу виконаного завдання 1, сформулюйте цілі вивчення векторного методу в IX класі.

5. *Методика формування векторного методу* розв'язування задач.

I. Підготовчий етап формування методу (введення понятійного апарату, основних понятьта основних дій) є в кожному з розглянутих навчальних посібників, хоча він і не зосереджений на якій-небудь короткій частині викладу.

II. На мотиваційному етапі можна розглянути з учнями розв'язування конкретної задачі.

Задача. У трапеції $ABCD$ кути A та B рівні по 90°, а сторони $AB = 2$, $BC = 1$, $AD = 4$. Доведіть, що діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні.

Задача розв'язується декількома способами й показується, що векторний метод розв'язування задачі є більш простим. Розглянемо розв'язування задачі цим методом.

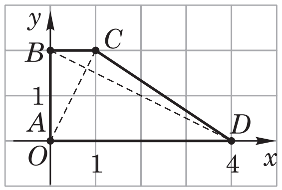


Рис. 17-2

Виберемо систему координат та розмістимо у ній дану в умові задачі трапецію: вершину A трапеції помістимо у початок координат, тоді, за умовою задачі, точка B лежатиме на осі Oy, а точка D — на осі Ox. Оскільки BC — основа трапеції і її довжина дорівнює 1, то вершина C має координати (1; 2) (рис. 17-2). Отже, визначимо координати векторів, що позначають діагоналі трапеції, перпендикулярність яких нам треба довести:

$$\overrightarrow{AC}(1;2),\ \ \overrightarrow{BD}(4;-2)\,.$$

Доведемо, що скалярний добуток цих векторів рівний нулю:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) = 4 - 4 = 0\,.$$

Отже, $AC \perp BD$, що й потрібно було довести.

Завдання 3. Розробіть інші способи розв'язування цієї задачі, не пов'язані з використанням векторного методу. Порівняйте ці способи розв'язування й оцініть ефективність кожного.

Завдання 4. Розв'яжіть задачу: «Точки M_1 і M_2 є відповідно точками перетину медіан граней ABD і BCD тетраедра $ABCD$. Довести, що $M_1M_2 \parallel AC$» різними методами: а) векторним; б) координатним; в) традиційним; г) методом геометричних перетворень. Який з методів розв'язування цієї задачі ефективніший?

Перша дія, якої необхідно навчити учнів, — це переведення геометричних співвідношень на векторну мову. Для формування вміння виконувати цю дію доцільно з учнями розв'язувати задачі типу:

A. Точка A належить відрізку BC. Запишіть це співвідношення у векторній формі. ($\overrightarrow{BA} = \alpha\cdot\overrightarrow{BC},\ 0 < \alpha < 1$.)

B. Прочитайте запис геометричною мовою $\overrightarrow{AM} = \alpha\cdot\overrightarrow{AB}$. (Точка M належить прямій AB.)

C. Відрізки AB і MK паралельні. Запишіть це співвідношення у векторній формі. ($\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{MK}$.)

D. Точка C — середина відрізка AB. Як це співвідношення записати у векторній формі? ($\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$.)

E. Прямі AC й MP паралельні. Як записати це співвідношення у векторній формі? Чи є різниця в записі розв'язків завдань A та C? Чому?

F. Запишіть у векторній формі умову перпендикулярності прямих AB і PK. ($\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PK} = 0$.)

Розв'язування цих й інших подібних задач бажано оформити у вигляді таблиці і користуватися нею при розв'язуванні задач векторним методом.

Учням показується найбільш доцільний вибір системи координат (у тому випадку, коли це необхідно) і вибір базисних векторів.

Ця дія формується в учнів з допомогою таких задач:

A. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = (1;-2), \vec{b} = (-3;1)$.

B. Чотири точки задані своїми координатами: $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(1;\ 0)$, $D(4;\ 5)$. Визначте кут між прямими AB й CD.

C. У прямокутній трапеції $MPKC$ ($\angle M = 90°$, $\angle P = 90°$) довжини сторін $MP = 4$, $PK = 2$, $MC = 8$. Доведіть, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Не розв'язуючи задачу, покажіть, яка система координат найбільш доцільна для пошуку розв'язування даної задачі.

D. Дано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якій бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α, точка K — середина ребра BS. Знайдіть кут φ між прямими AK й SC. Не розв'язуючи задачу, вкажіть, яке розташування системи координат найбільш доцільне для її розв'язування.

E. До вершини куба прикладені три сили в 1 Н, 2 Н, 3 Н, спрямовані по діагоналях граней куба, що проходять через цю вершину. Знайдіть величину рівнодійної цих трьох сил.

Зауваження. У задачах А та В система координат вибирається довільно, після чого будуються точки за координатами й умова задачі записується у векторній формі.

Самостійна робота

1. **Проаналізуйте підручники з геометрії [2], [3], [11], [12], [35], [36] і дайте відповіді на питання:**
   1) Яке трактування поняття «вектор» прийняте кожним авторським колективом?
   2) Які елементи векторного апарату та в яких класах уводяться?
   3) Чи дозволяє система завдань сформувати понятійний апарат, окремі компоненти векторного методу та векторний метод розв'язування задач у цілому?
2. **Користуючись зазначеною нижче літературою, підберіть системи задач на формування кожного компонента векторного методу.**

Література: [1], [2], [3], [4], [10], [11], [12], [15], [18], [19], [24], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [50], [51], [52], [53], [55].

Лабораторна робота №18

Метод геометричних перетворень при вивченні математики в школі

Мета роботи. Виділити характеристичні ознаки методу геометричних перетворень і розглянути особливості його вивчення за різними шкільними підручниками математики.

Основний зміст

Сутність будь-якого математичного методу, в тому числі й *методу геометричних перетворень*, полягає в побудові моделі однієї теорії (у нашому випадку традиційної евклідової геометрії) в об'єктах іншої (групи геометричних перетворень). Істотною ознакою математичної моделі є наявність ізоморфізму між моделлю й модельованою теорією. Установимо наявність зазначеного ізоморфізму між безліччю точок і прямих евклідової площини й безліччю елементів групи рухів. Кожній точці A ставиться у відповідність центральна симетрія із центром у даній точці A, кожній прямій a — осьова симетрія з віссю a.

Різні відношення між точками й прямими евклідової площини можуть бути інтерпретовані з допомогою композицій осьової й центральної симетрій. Наприклад, відношення «точка A належить прямій a» відповідає тому, що композиції центральної симетрії щодо центра A та осьової симетрії з віссю a, осьової симетрії відносно прямої a й центральної симетрії із центром A являють собою те саме перетворення площини.

Наявність зазначеного вище ізоморфізму й дозволяє застосовувати метод геометричних перетворень при розв'язуванні задач, сформульованих у термінах евклідової геометрії.

Метод геометричних перетворень у школі використовується як засіб обґрунтування деяких відношень між елементами евклідової геометрії (наприклад, конгруентності, паралельності й т. д.). При цьому його *застосування звичайно припускає виконання наступної послідовності кроків*:

- вибирається геометричне перетворення, яке володіє властивістю, що дозволяє обґрунтувати наявність зазначеного відношення між об'єктами евклідової геометрії;

- виконується перетворення, при якому один об'єкт переходить в інший;
- обґрунтовується наявність зазначеного відношення між об'єктами з допомогою властивостей обраного геометричного перетворення.

Виділені кроки використання методу геометричних перетворень обумовлюють необхідність актуалізації основних понять теорії геометричних перетворень і властивостей (загальних і специфічних) окремих видів перетворень й оволодіння вмінням будувати образи фігур при тому або іншому перетворенні.

Покажемо реалізацію виділеної послідовності кроків при розв'язуванні наступної задачі методом геометричних перетворень.

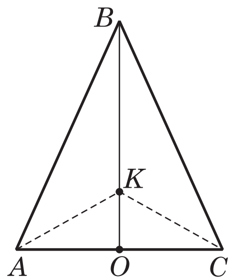


Рис. 18-1

Задача. На висоті *BO* трикутника *ABC* є точка *K*, така, що *AK* = *KC*. Доведіть, що трикутник *ABC* рівнобедрений (рис. 18-1).

У задачі необхідно встановити конгруентність відрізків *AB* і *BC* (або рівність їхніх довжин).

Перший крок полягає у виборі геометричного перетворення, що має властивість зберігати відстань. Саме ця властивість дозволить обґрунтувати відношення рівності між відрізками *AB* і *BC*. У якості такого перетворення доцільно вибрати осьову симетрію відносно прямої *BO*.

Другий крок полягає в доведенні, що при симетрії відносно прямої *BO* відрізок *AB* перейде у відрізок *CB*. Це можна довести досить просто. Точка *B* перейде сама в себе при обраній симетрії, тому що вона є точкою осі симетрії. Точка *A* перейде в точку *C* при даній симетрії, тому що ці точки лежать на перпендикулярі до осі симетрії й *AK* = *CK* (*K* — точка осі симетрії).

Третій крок — заключний етап розв'язування задачі. Оскільки відрізки *AB* і *CB* симетричні відносно осі *BO*, а симетрія є переміщенням (рухом), то довжини відрізків *AB* і *CB* рівні.

До *основних понять теорії геометричних перетворень* можна віднести поняття відображення, перетворення, переміщення (руху), зворотного перетворення, способу задання геометричного перетворення, конкретні види геометричних перетворень.

До *загальних властивостей геометричних перетворень* належать такі:

- композиція переміщень (рухів) є переміщенням (рухом) ;
- перетворення, зворотне переміщенню (руху), є переміщенням (рухом);

- при переміщенні (русі), а також при перетворенні подібності прямі переходять у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки; при зазначених перетвореннях зберігаються кути між півпрямими;
- при переміщенні (русі) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

Виділяються специфічні властивості кожного з конкретних *видів геометричних перетворень* (осьової й центральної симетрій, повороту, паралельного перенесення, гомотетії, перетворення подібності), розглянутих у шкільному курсі математики.

Для кожного виду перетворення актуалізується спосіб побудови образу фігури при відповідному перетворенні.

Геометричні перетворення в школі розглядаються, по-перше, як об'єкт вивчення й, по-друге, як основний інструмент методу.

У систематичному курсі геометрії вивчаються перетворення фігур на площині й у просторі. При цьому перетворення фігури розуміється як її зсув. Серед перетворень виділяються рухи й перетворення подібності. Розглядаються часткові види рухів: осьова симетрія, центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення. Частковим видом перетворення подібності є гомотетія.

Необхідно звертати увагу на задання того або іншого виду перетворення, окремо обумовлювати набір умінь, які формуються в учнів при розгляді видів перетворень.

Потім необхідно з'ясувати, які види перетворень розглядаються в пропедевтичному курсі геометрії (V–VI класи), які знання й уміння формуються при їх розгляді.

Розглянемо використання методу геометричних перетворень у курсі алгебри, взявши за основу розв'язування задач на побудову графіків функцій. Проаналізуємо перетворення функцій та результати дії цих перетворень на загальний вигляд графіка функції. Види перетворень, що використовуються для побудови графіків функцій, такі:

1. Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ по горизонталі (або вздовж осі *Ox*). Очевидно, що при цьому кожній точці *A* графіка функції $y = f(x)$ з координатами $\left(x; f(x)\right)$ буде відповідати точка A_1 з координатами $\left(x+a; f(x)\right)$, яка утворена паралельним перенесенням точки *A* на *a* одиниць праворуч уздовж осі *Ox*, якщо $a > 0$, або на $|a|$ одиниць ліворуч вздовж осі *Ox*, якщо $a < 0$. Множина точок A_1 утворить графік функції $y = f(x-a)$. Отже, для того, щоб побудувати графік функції $y = f(x-a)$ за відомим графіком функції $y = f(x)$, треба останній паралельно перенести на вектор $(a; 0)$.

2. Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ по вертикалі (або вздовж осі Oy). Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y = f(x)$ з координатами $(x; f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x; f(x)+b)$, яка утворена паралельним перенесення точки A на a одиниць вгору вздовж осі Oy, якщо $b > 0$, або на $|b|$ одиниць вниз уздовж осі Oy, якщо $b < 0$. Множина точок A_1 утворить графік функції $y = f(x)+b$. Отже, щоб побудувати графік функції $y = f(x)+b$ за відомим графіком функції $y = f(x)$, треба останній паралельно перенести на вектор $(0; b)$.

3. Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $y = l$ (при $l = 0$ отримаємо частковий випадок симетрії відносно осі Ox). Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y = f(x)$ з координатами $(x; f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x; 2\cdot l - f(x))$, яка буде симетричною точці A відносно прямої $y = l$. Множина точок A_1 при $l = 0$ утворить графік функції $y = -f(x)$, або частину графіка функції $y = |f(x)|$, де $f(x) < 0$. Отже, прийнявши $l = 0$, маємо, що графік функції $y = -f(x)$ отримується шляхом відображення графіка функції $y = f(x)$ симетрично осі Ox, а при побудові графіка функції $y = |f(x)|$ треба залишити без змін усі частини графіка $y = f(x)$, які лежать вище осі Ox, а ті фрагменти графіка, які лежать нижче осі Ox, відобразити симетрично відносно цієї осі.

4. Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $x = l$ (при $l = 0$ отримаємо частковий випадок симетрії відносно осі Oy). Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y = f(x)$ з координатами $(x; f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(2\cdot l - x; f(x))$, яка буде симетричною точці A відносно прямої $x = l$. Множина точок A_1 при $l = 0$ утворить графік функції $y = f(-x)$, або частину графіка функції $y = f(|x|)$, де $x < 0$. Отже, прийнявши $l = 0$, маємо: щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$ за відомим графіком функції $y = f(x)$, треба відобразити останній симетрично осі Oy, а при побудові графіка функції $y = f(|x|)$ треба побудувати графік

функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$, а потім відобразити цю криву симетрично відносно осі Oy. Ці дві частини утворять шуканий графік функції $y = f(|x|)$. Крім того, аналогічно до останнього прикладу перетворення симетрії відносно прямої $x = 0$ при побудові графіка функції може бути використане і у випадку встановлення парності функції $y = f(x)$.

5. Стиск-розтяг графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $y = l$ вздовж осі Oy (при $l = 0$ отримаємо частковий випадок стиску-розтягу відносно осі Ox уздовж осі Oy). Це перетворення можна розглядати як гомотетію відносно прямої $y = l$. Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y = f(x)$ з координатами $(x; f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(x; m\cdot(f(x)-l)+l)$, яка утворена перетворенням гомотетії точки A відносно прямої $y = l$ з коефіцієнтом m. Множина точок A_1 при $l = 0$ утворить графік функції $y = m\cdot f(x)$. Отже, графік функції $y = m\cdot f(x)$ (покладемо, що $m > 0$) отримується з графіка функції $y = f(x)$ розтягом останнього в m раз від осі Ox, якщо $m > 1$, та стисненням графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{m}$ раз до осі Ox, якщо $0 < m < 1$.

6. Стиск-розтяг графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $x = l$ уздовж осі Ox (при $l = 0$ отримаємо частковий випадок стиску-розтягу відносно осі Oy уздовж осі Ox). Це перетворення можна розглядати як гомотетію відносно прямої $x = l$. Очевидно, що при цьому кожній точці A графіка функції $y = f(x)$ з координатами $(x; f(x))$ буде відповідати точка A_1 з координатами $(k\cdot(x-l)+l; f(x))$, яка утворена перетворенням гомотетії точки A відносно прямої $x = l$ з коефіцієнтом k. Множина точок A_1 при $l = 0$ утворить графік функції $y = f(k\cdot x)$. Отже, графік функції $y = f(kx)$ (покладемо, що $k > 0$) отримується з графіка функції $y = f(x)$ стисненням останнього в k раз до осі Oy, якщо $k > 1$, та розтягом графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз від осі Oy, якщо $0 < k < 1$.

Загальну задачу сформулюємо так: побудувати графік функції $y = m\cdot f(kx-a)+b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$. Розв'яжемо задачу за планом послідовної побудови графіків таких функцій: 1) $y = f(x)$; 2) $y = f(kx)$; 3) $y = f(kx-a)$; 4) $y = m\cdot f(kx-a)$; 5) $y = m\cdot f(kx-a)+b$.

Відзначимо, що порядок використання перетворень не грає особливої ролі. Розглянемо одну з можливих послідовностей перетворень, поклавши при цьому для спрощення міркувань, що $m > 0$, $k > 0$.

1) Будуємо графік функції $y = f(kx)$, «стиснувши» графік функції $y = f(x)$ в k раз до осі Oy, якщо $k > 1$, «розтягнувши» графік функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз від осі Oy, якщо $k < 1$.

2) Будуємо графік функції $y = f(kx - a)$, попередньо записавши функцію у вигляді $y = f(k(x - \frac{a}{k}))$, паралельно перенісши графік функції $y = f(kx)$ на вектор $\left(\frac{a}{k}; 0\right)$.

Зауваження 1. Ці два перетворення можна здійснити і в зворотному порядку, спочатку перенісши графік функції $y = f(x)$ на вектор $\left(\frac{a}{k}; 0\right)$, а потім отримати графік функції $y = f(kx - a)$, провівши операцію «стиску-розтягу», але вже не відносно осі Oy, а відносно прямої $x = \frac{a}{k}$. Або побудуємо графік функції $y = f(x - a)$, паралельно перенісши графік функції $y = f(x)$ на вектор $(a; 0)$, а потім проведемо операцію «стиску-розтягу» відносно осі Oy.

3) Будуємо графік функції $y = m \cdot f(kx - a)$, провівши перетворення стиску-розтягу відносно осі Ox над графіком функції $y = f(kx - a)$.

4) Будуємо шуканий графік, перенісши графік функції $y = m \cdot f(kx - a)$ на вектор $(0; b)$.

Зауваження 2. Пункти (3) і (4) можна виконати і у зворотному порядку, спочатку перенісши графік функції $y = f(kx - a)$ на вектор $(0; \frac{b}{m})$, а потім над отриманим графіком функції виконати стиск-розтяг відносно осі Ox.

Усі зазначені в пп. 1)–3) перетворення можна виконувати у довільному порядку, але треба мати на увазі, що величини, на які графіки переносяться вздовж осей координат, залежать від порядку виконання перетворень. Реалізація такого підходу до навчання учнів, як показала практика, дає можливість сформувати у старшокласників узагальнені вміння використання геометричних перетворень до побудови графіків функцій. Проілюструємо це на прикладі.

Задача. Побудувати графік функції: $y = 2 \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 - 4$.

Початковий графік функції $y = x^2$. Побудуємо його за точками $A(-2; 4)$, $B(-1; 1)$, $O(0; 0)$, $C(1; 1)$, $D(2; 4)$ (на рис. 18-2 графік показаний суцільною лінією). Розв'яжемо задачу за таким планом:

1) використавши гомотетію відносно прямої $x = 0$, побудуємо графік функції $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$, $\left(k = \frac{1}{3}\right)$. Спочатку виконаємо перетворення над точками A, B, C, D, O. Очевидно, що точка O залишиться на місці, а відстані від точок A, B, C, D до осі Oy у 3 рази збільшаться (відповідні точки показані на рисунку 18-2 квадратами, а графік — дрібним пунктиром);

2) використовуючи паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y = \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2$, $(a = 3)$, записавши формулу функції у вигляді $y = \left(\frac{1}{3}(x - 3)\right)^2$. Це означає, що кожну з точок попереднього графіка треба паралельно перенести на вектор $(3; 0)$(відповідні точки показані на рисунку 18-2 ромбами, а графік — пунктиром з крапками);

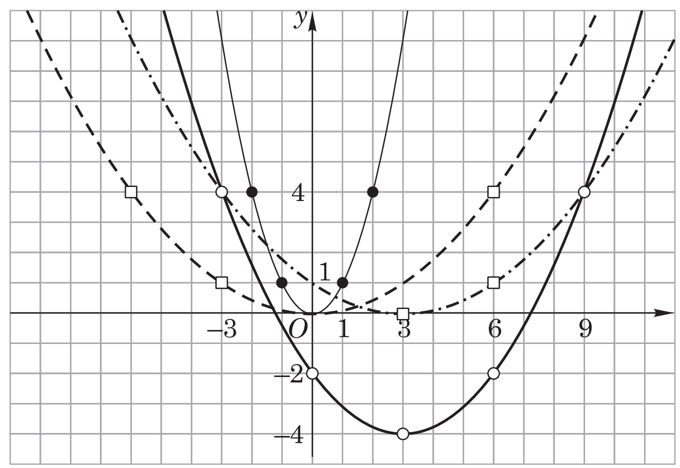


Рис. 18-2

3) використовуючи гомотетію відносно прямої $y=0$, побудуємо графік функції $y=2\cdot\left(\frac{x}{3}-1\right)^2$, $m=2$, а потім, використовуючи паралельне перенесення, побудуємо графік функції $y=2\cdot\left(\frac{x}{3}-1\right)^2-4$. При цьому точки попереднього графіка будуть зміщені в результаті паралельного перенесення на вектор (0; –4) (відповідні точки показані на рис. 18-2 кругами, а графік – жирною суцільною лінією).

Зауваження 3. Корисно було б змінити план розв'язування цієї задачі у частині п. 1) і п. 2). А саме, спочатку побудувати графік функції $y=(x-3)^2$, перенісши графік функції $y=x^2$ вправо на три одиниці, а потім розширити його у 3 рази від лінії $x = 3$, отримавши таким чином графік функції $y=\left(\frac{1}{3}(x-3)\right)^2$.

Завдання 1. Виконайте аналіз системи практичних робіт, поміщених після параграфа «Геометричні перетворення та їх властивості» (див. [2]). Підсумком роботи може бути заповнення таблиці.

Вид перетворення	Спосіб задання	Теоретичний матеріал, при розгляді якого використовуються властивості перетворення

Завдання 2. Виконайте аналіз розв'язування задачі, текст якої наведений у завданні 2 для самостійної роботи.

- Виділіть етапи розв'язування цієї задачі методом геометричних перетворень.
- Виділіть уміння, які повинні опанувати учні, щоб використати метод при розв'язуванні даної задачі.
- Розробіть методику пошуку розв'язування даної задачі.
- Після цього перейдіть до аналізу завдання 31, поміщеного після § 25 підручника [2]. Виділіть задачі, спрямовані на засвоєння знань про геометричні перетворення; задачі, що розв'язуються методом геометричних перетворень.
- Для одержання необхідних узагальнень про вивчення методу геометричних перетворень у школі виконайте логіко-дидактичний аналіз матеріалу, пов'язаного з геометричними перетвореннями в неповній середній школі.

Самостійна робота

1. **Складіть список основних понять, що використовуються у теорії геометричних перетворень, і основних властивостей окремих геометричних перетворень, розглянутих у шкільному курсі математики.**
2. **Розв'яжіть задачу, використавши метод геометричних перетворень, і виділіть основні етапи її розв'язування.**

Задача. Точка B лежить між точками A і C. По одну сторону від прямої AC побудовані рівносторонні трикутники AMB та BFC. Довести, що трикутник з вершинами в серединах відрізків AF та MC і точці B — рівносторонній.

3. **Виконайте аналіз теоретичного матеріалу та системи завдань до § 23 підручника [2]. Виділіть та розв'яжіть задачі, в яких доцільно використати метод геометричних перетворень.**
4. **Наведіть приклади використання методу геометричних перетворень при вивченні курсу алгебри.**

Література: [1], [2], [3], [4], [15], [18], [19], [24], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [50], [51], [52], [53], [55].

Лабораторна робота №19

Дослідницький метод при вивченні математики в школі

Мета роботи. Виділити характеристичні ознаки дослідницького підходу та дослідницького методу та визначити умови використання дослідницького методу в навчанні математики.

Основний зміст

Дослідницькі підходи у навчанні набувають усе більшої сили, проте це дуже складна і якісна зміна, яка передбачає велику творчу компетентність учителя математики у багатьох прикладних математичних аспектах [49]. *Дослідницький підхід у навчанні* – це розгляд кожного курсу, кожної теми курсу, кожного питання з точки зору дослідження, що у свою чергу означає *складові дослідницької компетентності*:

- формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач;
- будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач;
- висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи, а також на власний досвід досліджень;
- інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області та інших (актуальних у контексті дослідження) предметних областей;
- систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосувань отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікуючи вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики.

Поняття дослідницького підходу в навчанні загальніше, ніж поняття дослідницького методу навчання. *Дослідницький підхід* означає, що він завжди може бути використаний у кожній темі, у кожній формі навчальної роботи, а глибина його використання має визначатися навчальними та педагогічними доцільностями, кваліфікацією вчителя, підготовленістю аудиторії.

Дослідницький метод у навчанні на практиці зустрічається найчастіше через розгляд неповністю визначених задач (методисти інколи використовують для них термін *відкриті задачі*) — у задачі

може бути «недовизначена» умова або неповністю визначене твердження задачі. Розв'язування такої задачі слід починати з «довизначення» її умови і лише після цього приступити до знаходження її розв'язку. Наведемо приклади таких задач.

- Визначити умови, за яких трикутник заданого параметра обмежує найбільшу площу.
- Знайти найменше значення відношення об'ємів правильної піраміди та відповідної правильної призми, описаних навколо однієї сфери.
- Дослідити властивості чотирикутника, який має вісь симетрії.
- Дослідити положення графіка квадратичної функції у залежності від величин коефіцієнтів її формули (див. дослідження з лабораторної роботи №4).
- Визначити умови, за яких чотирикутник має 1, 2, 3, 4, 5 осей симетрії.
- Дослідити властивості довільного трикутника.

Розгляд «відкритих задач» у навчальних курсах з математики наближає навчальний процес до творчого математичного процесу, а термінологія дослідницького підходу в навчанні відповідає термінології професійної математичної діяльності.

Кожна математична задача вимагає власного творчого підходу до свого розв'язання. Загальний підхід у вигляді загальноприйнятих правил (евристик) щодо аналізу та розв'язання задач виглядає так: 1) аналіз структури умови задачі у вигляді певної схеми; 2) створення математичної моделі задачі (зазвичай у вигляді рівняння чи системи рівнянь); 3) перетворення математичної моделі відомими засобами та отримання розв'язку моделі задачі; 4) трансляція розв'язків моделі задачі на її умову. Найбільш складними для реалізації є перші два етапи. Саме тут суб'єкт розв'язування задачі зустрічається з практично неструктурованим полем можливостей власної діяльності щодо процесу розв'язування задачі і відповідними складними творчими пошуками моделі задачі у вигляді певної схеми, а потім і рівняння чи системи рівнянь. Метою роботи над задачею є вивчення можливостей створення евристичних алгоритмів, перетворення моделей задачної ситуації на різних рівнях процесуальної ієрархії структурування задачної ситуації, що й приводить до знаходження розв'язку математичної задачі.

Дослідницький метод у навчанні — метод залучення учнів до самостійних і безпосередніх спостережень, на основі яких вони встановлюють зв'язки предметів і явищ дійсності, роблять висновки, пізнають закономірності. Внесення елементу дослідження в навчальні заняття сприяє вихованню в учнів активності, ініціативності, допитливості, розвиває їхнє мислення.

Розглянемо на прикладах використання дослідницького методу у процесі навчання розв'язування задач з використанням моделей та модельних переходів та при розв'язуванні нових класів задач, які без застосування інформаційно-комп'ютерних технологій (ІКТ) розв'язати важко, а то й неможливо у межах «класичної математики». Вже відмічалося, що серед різноманіття комп'ютерних програм, розроблених для розв'язування широкого кола математичних задач різних рівнів складності з допомогою прикладного програмного забезпечення комп'ютерної техніки найбільш придатними видаються програмні засоби, які розраховані на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вузів, що лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики. Це GRAN2, GRAN3, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія). Для використання цього програмного забезпечення не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. Названі прикладні програми прості у користуванні, оснащені досить зручним інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), контекстно-чутливою допомогою. Від учнів при використанні названих прикладних програм не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо (за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів).

Задача 1. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-(a+1)\cdot x+a<0, \\ x^2+(a+3)\cdot x+3a<0, \end{cases}$$

Система є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб установити залежність між розв'язками системи нерівностей та параметром *a*. Задачу можна розв'язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

Спосіб 1. Створимо *математичну модель задачі*. Ліва частина кожної з нерівностей — це квадратний тричлен, у якому x — змінна, a — параметр. Тому ліву частину нерівностей можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв'язання якої приведе до знаходження розв'язків системи. Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданих квадратичних функцій:*

$$y=x^2-(a+1)\cdot x+a\,,\;\; y=x^2+(a+3)\cdot x+3a\,,$$

які впливають на визначення знака значень функцій.

1) $y=x^2-(a+1)\cdot x+a$. Дискримінант квадратного тричлена відносно x, що знаходиться у лівій частині нерівності, $D=(a-1)^2\ge 0$. Розглянемо такі випадки:

а) $D=0 \Leftrightarrow a=1$. Очевидно, враховуючи властивості квадратичної функції, можна стверджувати, що при $a=1$ $x\in\varnothing$.

б) $D>0 \Leftrightarrow a\in\Re\setminus\{1\}$. При цьому квадратний тричлен буде мати корені:

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+1+|a-1|}{2}, \\ x=\dfrac{a+1-|a-1|}{2}. \end{array}\right.$$

Отже, для першої нерівності системи — при $a<1$ $x\in(1;a)$, при $a>1$ $x\in(a;1)$.

2) $x^2+(a+3)\cdot x+3a<0;\; D=(a+3)^2-4\cdot 3a=(a-3)^2\ge 0$. Маємо такі випадки:

а) $D=0 \Leftrightarrow a=3$. Тому при $a=3$ $x\in\varnothing$.

б) $D>0 \Leftrightarrow a\in R\setminus\{3\}$. При цьому квадратний тричлен лівої частини нерівності матиме корені:

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-(a+3)+|a-3|}{2}, \\ x=\dfrac{-(a+3)-|a-3|}{2}. \end{array}\right.$$

Отже, сформулюємо відповідь для другої нерівності — при $a<3$ $x\in(-3;-a)$, при $a>3$ $x\in(-a;-3)$.

Очевидно, що для знаходження розв'язків системи треба знайти переріз множин розв'язків кожної нерівності. Для наочності проілюструємо це графічно. Зобразимо в системі координат xOa графіки функцій $a=x$ і $a=-x$ та ліній $x=-3$ і $x=1$, позначимо розв'язки

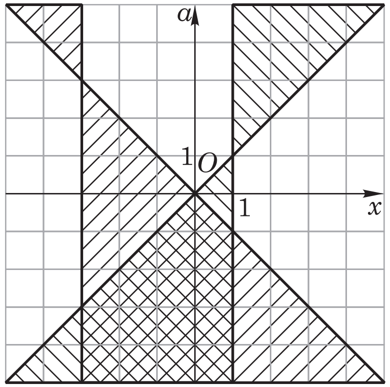


Рис. 19-1

першої нерівності штриховкою з нахилом уліво, а розв'язки другої нерівності — штриховкою з нахилом управо. В результаті буде легко побачити спільний розв'язок цієї системи нерівностей як переріз заштрихованих множин (рис. 19-1).

На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично переріз заштрихованих областей. Для цього знаходимо значення аргументу x при деяких фіксованих значеннях a. Це можна зробити шляхом проектування заштрихованої області на вісь Ox у залежності від зміни параметра a. Проектування здійснюється рухом деякої прямої, паралельної осі Ox знизу вгору вздовж осі Oa. Відповіддю і буде аналітичний опис тих областей, де умова виконується:

$$\left[\begin{array}{l} \text{при } a \in (-\infty;-3)\ x \in (-3;1), \\ \text{при } a \in [-3;-1]\ x \in (a;1), \\ \text{при } a \in (-1;0)\ x \in (a;-a), \\ \text{при } a \in [0;+\infty)\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Спосіб 2. Змінимо *вигляд математичної моделі задачі.* Представимо кожну нерівність системи рівнянням і побудуємо його графік. Графіки рівнянь розіб'ють координатну площину на декілька областей, кожну з яких перевіримо на предмет виконання умови системи нерівностей. Відповіддю буде аналітичний опис тих областей, де умова системи нерівностей виконується. Отже:

$$x^2-(a+1)\cdot x+a=0 \text{ та } x^2+(a+3)\cdot x+3a=0\,.$$

Дані рівняння — це *модель вихідної задачі*. Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо: $(x-1)\cdot(x-a)=0$ для першої нерівності та $(x+3)\cdot(x+a)=0$ — для другої.

Побудуємо графіки рівнянь у системі координат xOa (рис. 19-2). Побудовані лінії ділять усю площину на десять областей $D_1, \ldots, D_{10}$. Визначивши знаки виразів, що стоять у лівій частині кожної з нерівностей системи, бачимо, що єдина область, яка задовольняє умови системи — це область D_9. Скориставшись для аналітичного опису

області D_9 способом, описаним вище, прийдемо до вже знайденої відповіді.

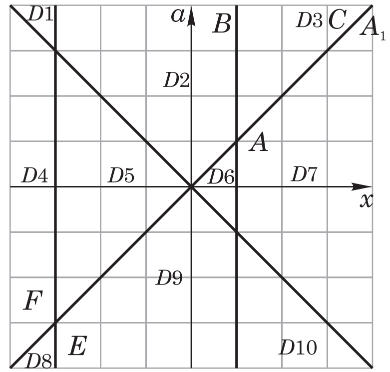


Рис. 19-2

Очевидно, що рис. 19-2 може бути використаний для подальшої роботи над вправою. Наприклад, даємо учням завдання: за результатами графічного способу розв'язування вправи скласти нові завдання. Очевидно, що коли взяти об'єднання областей D_2, D_4, D_7, то бачимо, що ця множина є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-(a+1)\cdot x+a>0, \\ x^2+(a+3)\cdot x+3a>0. \end{cases}$$

Можлива також робота і з нестрогими нерівностями системи. Наприклад, розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-(a+1)\cdot x+a\le 0, \\ x^2+(a+3)\cdot x+3a<0 \end{cases}$$

буде об'єднання областей D_3, D_8 та ліній AB, AC та EF.

Важливим моментом використання геометричної картини розв'язку задачі (див. рис. 19-2) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв'язування з новими умовами:

- розв'язати системи нестрогих нерівностей;
- змінити питання до вправи на таке: при яких значеннях параметра розв'язки системи (або інших систем, похідних від даної), є додатними (від'ємними);
- змінити питання до вправи на таке: при яких значеннях параметра розв'язки системи лежать у заданому проміжку.

Наведемо ще один спосіб розв'язування вправи. Пропонуємо скористатися прикладним комп'ютерним пакетом «Advanced Grapher», з допомогою якого будуватимемо графік системи нерівностей. Ще раз зауважимо, що це можна робити лише після того, як основні знання і уміння про властивості функцій та основні способи їх використання до розв'язування математичних задач певною мірою в учнів уже сформовані.

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію «Додати графік» та вводимо формули нерівностей системи.

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж x та y, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так — змінимо параметр рівняння з a на y.

На робочій області будується *модель системи* — графік системи (рис. 19-3). Залишається лише оформити пропорції міток на осях Ox та Oy як 1:4, задати для більш точного відображення графіка в меню «Параметри побудови» максимальну кількість кроків по горизонталі та по вертикалі — 200 та максимальний розрив, рівний 10.

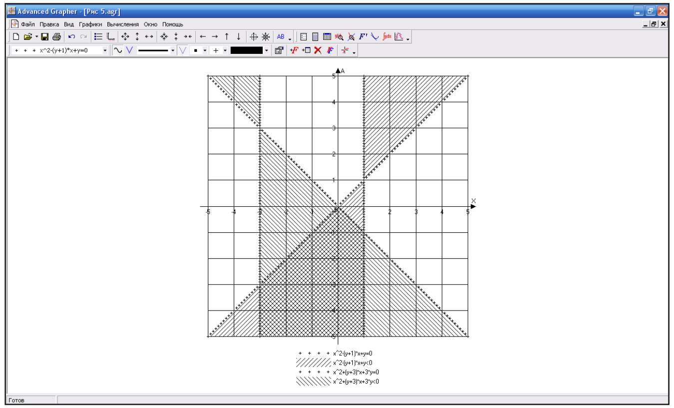


Рис. 19-3. Графічні розв'язки системи

Очевидно, що побудований графік системи ще потребує аналітичного дослідження (див. аналітичні викладки вище). Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для системи.

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про властивості функцій та уміння вести дослідження цих властивостей різними способами досить часто знаходять своє використання у процесі розв'язування математичних навчальних задач творчого типу. Запропонований нами евристичний алгоритм дозволяє використати знання учнів про властивості функцій та уміння вести їх дослідження для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для нелінійних рівнянь.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв'язування моделі задачі.

Разом з тим укажемо, що даний підхід (а саме, використання на основі наведеного евристичного алгоритму знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для відшукання наближених розв'язків нелінійних рівнянь) має обмеження. Зокрема, його використання є проблематичним у тому випадку, коли побудова графіка функції (моделі) та дослідження її властивостей є досить складною задачею.

Розглянемо використання дослідницького методу на прикладі роботи із задачами на знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку. Продемонструємо це шляхом проведення змістовного узагальнення у процесі розв'язування циклу стереометричних задач в 11 класі. За основу візьмемо таку задачу.

Задача 2. Знайти найменше значення відношення об'ємів правильної чотирикутної піраміди та правильної чотирикутної призми, описаних навколо однієї сфери.

Очевидно, що при розв'язуванні даної вправи слід використовувати аналітичні викладки. Позначимо радіус заданої сфери через фіксовану величину r, а довжину половини сторони основи правильної чотирикутної піраміди, що буде описана навколо сфери, через змінну величину x. Тоді об'єм правильної чотирикутної призми, описаної навколо сфери (очевидно, що це буде куб зі стороною $2r$) знайдемо так:

$$V_{\text{призми}} = 8r^3.$$

Для знаходження об'єму правильної чотирикутної піраміди, описаної навколо сфери, скористаємося рис. 19-4. Нехай ΔASB — переріз указаної піраміди площиною, що проходить через вершину S піраміди, точку O — центр сфери — паралельно до однієї зі сторін основи піраміди. Очевидно, що відрізок AB на рис. 19-4 буде рівний стороні основи піраміди (і може бути визначений як $2x$ згідно зі встановленим позначенням), а відрізок SM буде висотою піраміди. Тоді об'єм правильної чотирикутної піраміди, описаної навколо сфери, знайдемо так:

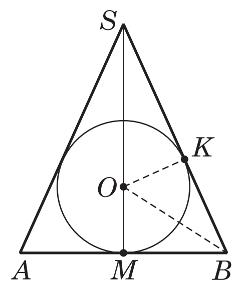


Рис. 19-4

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SM .$$

Знайдемо висоту піраміди:

$$SM = MB \cdot \mathrm{tg}\angle SBM = x \cdot \mathrm{tg}\, 2\angle OBM = x \cdot \frac{2\dfrac{r}{x}}{1-\dfrac{r^2}{x^2}} = \frac{2rx^2}{x^2-r^2}.$$

Тоді об'єм піраміди визначимо так:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3}(2x)^2 \cdot \frac{2rx^2}{x^2-r^2} = \frac{8rx^4}{3(x^2-r^2)}.$$

Отже, для визначення найменшого значення відношення об'ємів правильної чотирикутної піраміди та правильної чотирикутної призми, описаних навколо однієї сфери, треба побудувати функцію $F(x)$ та дослідити побудовану функцію на найменше значення:

$$F(x) = \frac{V_{\text{піраміди}}}{V_{\text{призми}}} = \frac{1}{3r^2} \cdot \frac{x^4}{x^2-r^2}.$$

Це можна зробити двома способами. *Перший спосіб* ґрунтується на застосуванні *правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку*. Це програмний матеріал курсу «Алгебри та початків аналізу» 11 класу. *Другий спосіб* ґрунтується на *використанні ІКТ при дослідженні властивостей функцій*. Ми будемо розглядати його використання з точки зору розширення поля можливостей учня у розв'язуванні задачі.

Отже, визначимо межі зміни x — це буде необхідно для застосування правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції. Очевидно, що $x \in (r; +\infty)$. Відмітимо певну невідповідність текстів шкільних підручників *реальним потребам використання правила знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відкритому проміжку* для розв'язування текстових задач (ці потреби полягають у необхідності знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відкритому проміжку). Тому, знайшовши точки екстремуму функції $F(x)$ на проміжку $x \in (r; +\infty)$, скориставшись правилом знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відкритому проміжку та оцінивши значення функції в точках екстремуму та на кінцях проміжку, отримаємо, що найменше значення функції $F(x)$ досягається при $x = \sqrt{2}r$ і дорівнює $\frac{4}{3}$.

Використаємо другий спосіб розв'язування задачі, проілюструвавши та вивчивши розв'язування задачі з використання пакету AG. Побудуємо графік функції $F(x)$ для різних значень радіуса сфе-

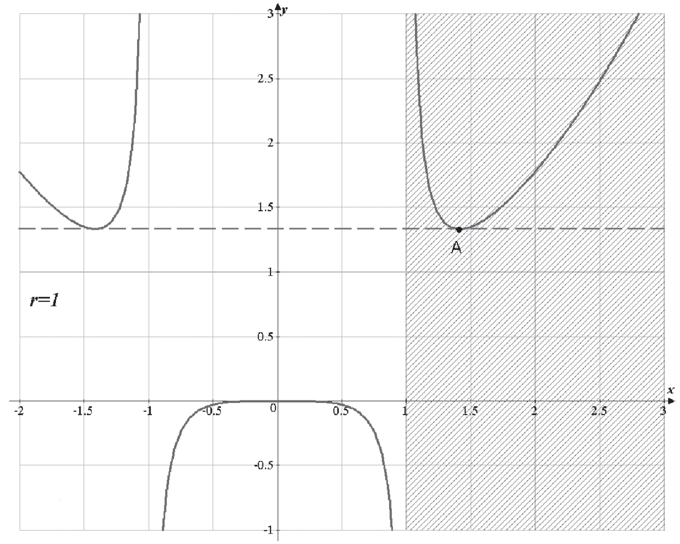


Рис. 19-5

ри. При $r = 1$ функція буде мати вигляд $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2-1}$. З рис. 19-5 видно, що на проміжку $x \in (1; +\infty)$ (заштрихована частина координатної площини) функція буде мати одне найменше значення при $x_1 \approx 1{,}41$ (це знаходимо через меню «исследование функции», на рис. 19-5 — це перша координата точки A), причому $F(x_1) \approx 1{,}33$ (на рис. 19-5 це показано пунктирною горизонтальною лінією, що проходить через точку A). Врахувавши, що $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ та $1 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}41$, робимо висновок, що найменше значення функції $F(x)$ досягається при $x = \sqrt{2}r$ і дорівнює $\frac{4}{3}$. Аналогічне дослідження можна провести для випадку $r = 2$ (рис. 19-6), де функція задається формулою $F(x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{x^4}{x^2-4}$, точка A, згідно з рис. 19-6 та дослідженням через меню «исследование функции», має координати $A(2{,}82; 1.33)$, що є наближеним значенням реальних координат цієї точки згідно із загальними результатами дослідження — $A\left(2\sqrt{2}; \frac{4}{3}\right)$.

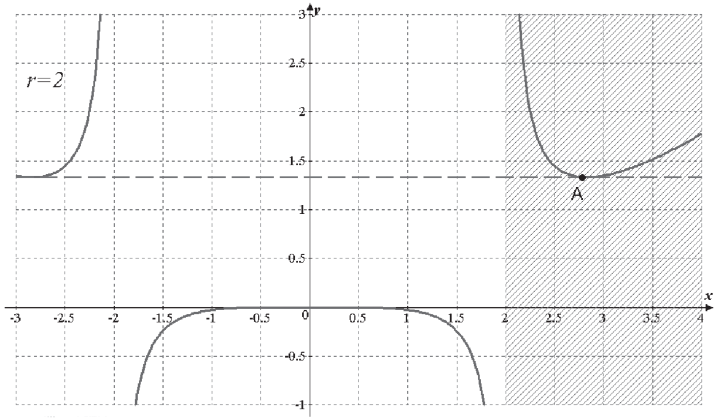


Рис. 19-6

Продовжити дослідження даної задачі можна таким чином, щоб максимально використати можливості комп'ютерного моделювання для отримання нових результатів творчого пошуку. Поставимо проблему так. А що зміниться у розв'язанні задачі, якщо замість чотирикутних правильних піраміди і призми вивчити співвідношення між об'ємами п'ятикутних піраміди і призми? Шестикутних? А чи не отримаємо ми узагальнення цієї задачі, якщо вивчити співвідношення між об'ємами описаного конуса та циліндра? Відмітимо, що розв'язування усіх цих задач буде аналогічним, а відповідь — така ж сама.

Завдання 1. Проведіть вказані у попередньому абзаці дослідження одним з описаних способів.

Можна піти іншим шляхом — дослідити відношення об'ємів описаних навколо даної сфери чотирикутної правильної зрізаної піраміди та чотирикутної правильної призми. Пропонуємо саме такий розвиток творчого вивчення розв'язаної попередньої задачі.

Задача. Знайти найменше (або найбільше) значення відношення об'ємів правильної зрізаної чотирикутної піраміди та правильної чотирикутної призми, описаних навколо однієї сфери з радіусом 1.

Використавши позначення попередньої задачі, покладемо, що половина сторони нижньої (більшої) основи зрізаної правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює x. Використаємо для знаходження об'єму зрізаної правильної чотирикутної піраміди формулу:

$$V_{\text{зріз. піраміди}} = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

де $H = 2$ (висота зрізаної піраміди, очевидно, дорівнює двом радіусам сфери), S_1 та S_2 — площі нижньої та верхньої основ піраміди. Тоді функція $F(x)$ набуде вигляду:

$$F(x) = \frac{V_{\text{зріз. піраміди}}}{V_{\text{призми}}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left((2x)^2 + 2x\cdot\frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2\right)}{8} = \frac{1}{3}\cdot\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Побудуємо в AG графік цієї функції (рис. 19-7), врахувавши при цьому, що $x \in [1; +\infty)$ (граничний варіант, коли половина сторони більшої основи піраміди дорівнює радіусу сфери, тобто піраміда стає призмою, — теж може розглядатися; варіант, коли сторона нижньої основи менша від сторони верхньої основи піраміди розглядати не будемо як такий, що не містить нової інформації). Точка A має координати (1; 1), а, отже, мінімальне значення відношення об'ємів дорівнює 1 і набувається тоді, коли половина сторони більшої основи описаної зрізаної піраміди дорівнює радіусу сфери (тобто при $x = 1$). Максимального ж значення відношення об'ємів не існує, оскільки

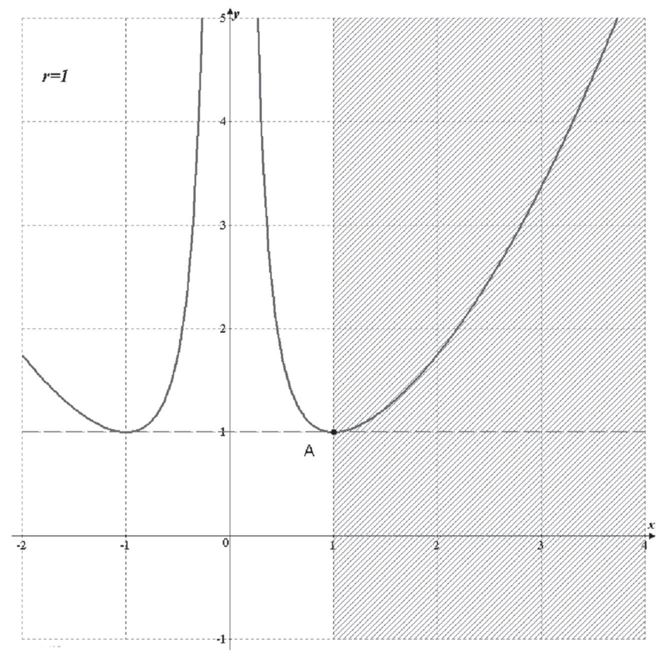


Рис. 19-7

на проміжку $x \in [1; +\infty)$ функція $F(x)$ є зростаючою (це видно з рис. 19-7 і може бути підтверджене дослідженням функції в межах пакета), тому при $x \to +\infty$ значення функції $F(x) \to +\infty$. Отже, сформульована гіпотеза розв'язування задачі виглядає так: максимальне значення відношення об'ємів не досягається ніколи, а мінімальне значення такого відношення дорівнює 1 і досягається при $x = 1$. Доводити дану гіпотезу вже треба аналітичними методами.

Розв'язавши подібним методом таку ж задачу, але при $r = 2$, отримаємо аналогічний результат — мінімальне значення відношення об'ємів досягається при $x = 2$ і дорівнює 1.

Завдання 2. Сформулюйте гіпотезу для загального випадку величини *r* та у процесі дослідження доведіть, що мінімальне значення відношення об'ємів дорівнює 1 і досягається тоді, коли $x = r$.

Завдання 3. Розробіть сценарій використання дослідницького методу при розв'язуванні задачі: «У кут, що містить 60°, у бік, протилежний від вершини, вписано п'ять кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з другого, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ усіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?». Сплануйте можливе творче вивчення та розвиток умови даної задачі.

Самостійна робота

1. **Виділіть поняття та наведіть приклад фрагменту уроку, де вибране поняття може бути введене з використанням дослідницького методу.**
2. **Розв'яжіть задачу, продумайте розвиток вивчення задачі у контексті знаходження інших способів її розв'язання. Змініть умову задачі. Проаналізуйте результат.**

Задача. Яким має бути число a, щоб існувало рівно чотири різні пари чисел $(x; y)$, для яких справджуються обидві рівності

$$25x^2 + y^2 + 2y = a - 1 \quad і \quad \sqrt{5|x|} + \sqrt{|y+1|} = 3 .$$

Література: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [18], [19], [24], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [38], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55],[56], [57],[58].

Література

1. Апостолова Г.В. Геометрія: Підручник для 7-го класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2004. – 216 с.
2. Апостолова Г.В. Геометрія: Підручник для 8-го класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2005. – 256 с.
3. Апостолова Г.В. Геометрія: Підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2006. – 256 с.
4. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища шк., 1989. – ____ с.
5. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1975. – ____ с.
6. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач. – К.: Рад. шк., 1988. – ____ с.
7. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручник для 7 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2007. – ____ с.
8. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручник для 8 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2008. – ____ с.
9. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручник для 9 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. – ____ с.
10. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підручник для 7 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2007. – ____ с.
11. Бевз Г.П., Бевз В. Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підручник для 8 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2008. – 256 с.
12. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підручник для 9 класу. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. – ____ с.
13. Болтянский В.Г. Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе. – 1973, №5. – С. 45–50.
14. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1981. – ____ с.
15. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986. – ____ с.
16. Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.

17. Дубінчук О.С. Математика в 4 і 5 класах. – Київ: Радянська школа, 1986. – ____ с.

18. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф. Геометрія. 7 клас: Пробний підручник. – Х.: Веста: АН ГРО ПЛЮС, 2007. – 224 с.

19. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф. Геометрія. 8 клас: Підручник. – Х.: Веста: АН ГРО ПЛЮС, 2008. – 256 с.

20. Ізюмченко Л.В., Лутченко Л.І., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Вирази та тотожні перетворення: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 24 с.

21. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Многочлени: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. – 50 с.

22. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Раціональні рівняння та нерівності: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. – 84 с.

23. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Цілі та комплексні числа: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. – 112 с.

24. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

25. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. – 52 с.

26. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физ. -мат. спец.

пед. ин-тов / Под ред. Е.И. Ляшенко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

27. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2-х ч. Ч. I. Пособие для учителей / О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И. Соркин, Н.Г. Федин; под ред. Л.В. Сабинина. – М.: Просвещение, 1978. – ____ с.

28. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2-х ч. Ч. II. Пособие для учителей / О.В. Мантуров, Ю.К. Солнцев, Ю.И. Соркин, Н. Г. Федин; под ред. Л.В. Сабинина. – М.: Просвещение, 1982. – ____ с.

29. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра, 8 клас: Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2008. – ____ с.

30. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра, 9 клас: Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2009. – ____ с.

31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 7 класу. – Х.: Гімназія, 2007. – 288 с.

32. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 8 класу. – Х.: Гімназія, 2008. – ____ с.

33. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 9 класу. – Х.: Гімназія, 2009. – ____ с.

34. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підручник для 7 класу. – Х.: Гімназія, 2007. – 208 с.

35. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підручник для 8 класу. – Х.: Гімназія, 2008. – ____ с.

36. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підручник для 9 класу. – Х.: Гімназія, 2009. – ____ с.

37. Метельский Н.В. Дидактика математики. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982. – ____ с.

38. Методика викладання математики: Практикум / Під редакцією Г.П. Бевза. – К.: Вища школа, 1981. – 200 с.

39. Методика преподавания математики в средней школе: Общ. методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – ____ с.

[redacted] 40. Методика преподавания математики в средней школе: Общ. методика: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Санинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1980. – ____ с.

[redacted] 41. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – ____ с.

[redacted] 42. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин и др. – М.: Просвещение, 1977. – ____ с.

43. Онищук В.А. Типы, структура и методика урока в школе. – Киев: Радянська школа, 1976. – 184 с.

44. Педагогический поиск / Ш.А. Амонашвили, С.Н. Лысенкова, В.Ф. Шаталов и др. – М.: Педагогика, 1988.

45. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 10–11 класів. – Харків: Школяр, 2001. – 128 с.

[redacted] 46. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 7–9 класів. – Харків: Школяр, 2001. – ____ с.

[redacted] 47. Практикум по педагогике математики: Учеб. пособие для вузов / Под общей ред. А.А. Столяра. – Минск: Вышэйшая школа, 1978. – ____ с.

[redacted] 48. Програми факультативів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (7–11 класи). – Київ: Навчальна книга, 2002.

49. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

50. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

[redacted] 51. Современные основы школьного курса математики. Уч. пособие для пед. ин-тов по мат. спец. / Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужин, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1980. – ____ с.

[redacted] 52. Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. ст.: Учеб. пособие для мат. и физ.-мат. спец. пед. ин-тов. / Сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – ___ с.

[redacted] 53. Столяр А.А. Педагогика математики. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – ____ с.

[redacted] 54. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1983. – ____ с.

[redacted] 55. Хинчин А.Я. Педагогические статьи. – М.: АПН СССР, 1963. – ____ с.

[redacted] 56. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – ____ с.

[redacted] 57. Шкіль М.І., Слепкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – ____ с.

[redacted] 58. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. – М.: Просвещение, 1986. – ____ с.

59. Янченко Г.М., Кравчук В.Р. Математика: Підручник для 5 класу. – Тернопіль: Підручники та посібники, 2005. – 264 с.

60. Янченко Г.М., Кравчук В.Р. Математика: Підручник для 6 класу. – Тернопіль: Підручники та посібники, 2006. – 272 с.

Предметний покажчик

Зміст

Навчальне видання

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Укладачі:
КУШНІР Василь Андрійович
РІЖНЯК Ренат Ярославович

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 19.02.2013. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 13,3. Умовн. фарбо-відб. 13,3.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-1823-4

9 789661 018234