МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ

КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

О.М. Вороний

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ
В ОЛІМПІАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Методичний посібник

Кіровоград – 2010

УДК   51(075)
ББК   22.1 д.72
В 75

О.М. Вороний

В 75

Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: Методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2010 – 68 с.

У посібнику вміщені функціональні рівняння, які протягом останніх десятиліть пропонувались школярам на різних математичних змаганнях, зокрема на Всеукраїнській олімпіаді юних математиків, та сторінках фахових періодичних видань. Розглянуто основні способи розв’язування цих та інших функціональних рівнянь.

Видання розраховане на вчителів математики, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, обдарованих учнів, які цікавляться математикою.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 7 грудня 2010 року (протокол №5).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ББК   22.1 д.72
В 75

Передмова

Функціональні рівняння постійно входять до завдань різних математичних змагань. Головними серед них є Всеукраїнські олімпіади юних математиків. Функціональні рівняння можна знайти у розділах «Задачі» науково-популярних журналів «Квант» і «У світі математики», методичного журналу «Математика в школі» та однойменного журналу, що видається в Росії, газети «Математика» та в інших виданнях.

І це не випадково. Розв’язування кожного функціонального рівняння, навіть у випадку вдало установленого методу, перетворюється на невеличке самостійне дослідження, яке розвиває творчі здібності учня. Вивчення функціональних рівнянь сприяє глибшому засвоєнню таких понять, як функція, композиція функцій, границя послідовності й функції, неперервність та ін., що входять до програми шкільного курсу математики.

Постановка задач, пов’язаних з функціональними рівняннями, досить проста, розв’язання задач не потребує додаткової математичної підготовки. Водночас функціональні рівняння вимагають творчого використання знань шкільної математики, глибокого логічного мислення, знань основних способів і пошуку оригінальних способів їх розв’язування.

У посібнику розглядаються як добре відомі прийоми розв’язування функціональних рівнянь – спосіб підстановок, метод граничного переходу, метод Коші, так і менш відомі – спосіб невизначених коефіцієнтів, спосіб відокремлення змінних, застосування принципу крайнього.

Посбник покликаний допомоготи вчителю у проведенні позаурочної роботи з учнями, які бажають досконало, поглиблено і всебічно вивчати шкільну математику, допомогти розширити їх математичний кругозір, підготувати до участі в математичнх олімпіадах та інших математичних змаганнях. Він буде корисний учням, які захоплюються математикою, а також вчителям загальноосвітніх шкіл, керівникам математичних гуртків.

1. ФУНКЦІЇ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Функція – одне з основних математичних і загально наукових понять, яке виражає залежність між змінними величинами. Це поняття пройшло довгу й досить складну еволюцію. Термін „*Функція*” вперше з’явився 1692 року в роботах німецького математика Г.В.Лейбніца[1], правда, в дещо іншому розумінні. У значенні близькому до сучасного його використав швейцарський математик Й.Бернуллі[2]. Сучасний зміст функціональної залежності формувало багато видатних математиків. Означення функції, яке майже співпадає з сучасним, наводиться в підручниках з математики початку 19-го століття. За його основу взяті трактування поняття функції, які належать російському математику М.І.Лобачевському[3] і німецькому математику П.Г.Діріхле[4].

Означення. *Якщо кожному числу $x \in X \subset \boldsymbol{R}$ за певним законом f поставлено у відповідність одне дійсне число $y \in Y \subset \boldsymbol{R}$, то кажуть, що на множині X задано функцію f і записують $y = f(x)$.*

При цьому множина X називається областю визначення функції, Y – областю значень; x називається незалежною змінною або аргументом функції, y – залежною змінною, f – законом відповідності, $f(x)$ – значенням функції в точці x.

Із означення випливає, що для задання функції потрібно вказати закон відповідності, область визначення й область значень. Якщо функція задана аналітично і не вказані область визначенння і область значень, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень аналітичного виразу, а під областю значень – множину дійсних чисел.

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як відображення множини X у множину Y:

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ або } f : X \to Y.$$

Тоді y називають образом елемента x, а x – прообразом елемента y.

Означення. *Якщо функція g відображує множину X в множину U:*

$$u = g(x),$$

а функція f – множину U в множину Y:

$$y = f(u),$$

[1]Готфрід Вільгельм Лейбніц (1.7.1646 – 14.11.1716) – німецький математик, фізик і філософ; перший президент Берлінської АН (1700).

[2]Іоганн І Бернуллі (27.7.1667 – 1.1.1748) – швейцарський математик.

[3] Микола Іванович Лобачевський (1. 12. 1792 – 24. 02. 1856) – російський математик, засновник неевклідової геометрії. У 1827-1846 роках – ректор Казанського університету.

[4] Петер Густав Лежен Діріхле (13. 02. 1805 – 5. 05. 1859) – німецький математик.

то функція $y = f(g(x))$, яка відображує множину X в множину Y, називається складеною функцією (композицією функцій f і g); функція g називається внутрішньою функцією, f – зовнішньою функцією.

Прикладом складеної функції є функція $y = \lg(x^2+1)$, у якій $g(x) = x^2+1$ – внутрішня функція, $f(u) = \lg u$ – зовнішня.

Оскільки функцію задають область визначення, область значень і закон відповідності, то стосовно функції, заданої аналітично, можна розглядати три типи задач: обчислення значення функції за заданим значенням аргументу, знаходження значення незалежної змінної за заданим значенням функції (розв'язування рівняння) і встановлення закону відповідності за заданими областю визначення і областю значень. Перші дві задачі успішо розв'язуються в шкільній математиці, третя задача пов'язана з функціональними рівняннями.

Означення. *Функціональним рівнянням називаются рівняння, в яких невідома функція пов'язана з відомими з допомогою арифметичних дій та операції утворення складеної функції.*

Найбільшого поширення зазнали функціональні рівняння, у складених функціях яких шуканими є зовнішні функції, а внутрішніми – або відомі функції, або поєднання з допомогою арифметичних операцій відомих і шуканої функції. Зазвичай шукані функції є функціями однієї змінної, а внутрішні можуть залежати як від одної, так і від кількох змінних. Одну з них вважають незалежною, а інші називають вільними змінними. Теоретичні й практичні застосування саме таких рівнянь спонукали видатних математиків до їхнього вивчення. Досить лише навести рівняння Коші[1]

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1.1}$$

яке використовується у проективній геометрії і теорії ймовірностей; рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \tag{1.2}$$

до якого прийшов Даламбер[2], розв'язуючи проблему паралелограма сил; рівняння

$$f^2(x) = f(x-y)\cdot f(x+y), \tag{1.3}$$

використане Лобачевським при визначенні кута паралельності у своїй геометрії.

У кожному з цих рівнянь $f: R \to R$ – невідома функція однієї змінної, $x+y, x-y$ – відомі функції двох змінних, x – незалежна змінна, y – вільна змінна.

Прикладами функціональних рівнянь є також рівняння

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = (x-y)^2 f(x+y), \tag{1.4}$$

$$2f(x) + f(1-x) = x^2 \tag{1.5}$$

[1]Коші Огюстен Луї (21.8.1789–23.5.1857) – французький математик, чл. Паризької АН (1816), Петербургської АН (1831).

[2]Даламбер Жан Лерон (16.11.1717–29.10.1783) – французький математик, механік і філософ, чл. Паризької АН (1741), Петербургської АН (1764) та ін. академій.

Означення. *Розв'язком функціонального рівняння називається функція, яка на заданій множині перетворює рівняння в тотожність.*

Функціональне рівняння вважається розв'язаним, якщо знайдені всі його розв'язки або доведено, що їх немає. Прикладом функціонального рівняння, яке не має розв'язків, є рівняння

$$f(x+f(y))=y^2+f(x); \tag{1.6}$$

рівняння (1.5) має єдиний розв'язок $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$; дві функції $f(x)=0,\ f(x)=-x^2$ є розв'язками рівняння (1.4); рівняння Коші (1.1) має множину розв'язків $f(x)=cx$, де c – довільна стала. Кожна з указаних функцій на множині дійсних чисел перетворює відповідне рівняння в тотожність.

Зазначимо, що на складність розв'язування функціонального рівняння впливає не тільки залежність невідомої і відомих функцій у рівнянні, а й від області визначення та області значень невідомої функції. (Див. задачу **6.10**)

Прикладами функціональних рівнянь, які є в шкільному курсі математики, є рівності

$$f(x)-f(-x)=0, \quad f(x)+f(-x)=0, \quad f(x)-f(x+T)=0,$$

які використовуються для означення парних, непарних і періодичних функцій. Розв'язками цих рівнянь є парні, непарні та періодичні функції відповідно.

Степенева, показникова і логарифмічна функції є розв'язками функціональних рівнянь

$$f(xy)=f(x)f(y), \quad f(x+y)=f(x)f(y), \quad f(xy)=f(x)+f(y)$$

відповідно. У цьому нескладно переконатися, використовуючи дії над степенями і властивості степенів та логарифмів.

Якщо в кінці XVIII ст. і на початку XIX ст. розвитком функціональних рівнянь і їх застосуванням займалися такі видатні математики як Даламбер, Коші , Лобачевський та ін. то в кінці XX ст. і на початку XXI ст. функціональні рівняння стали об'єктом посиленої уваги на учнівських математичних олімпіадах та інших математичних змаганнях. Постановка задач, пов'язаних з функціональними рівняннями досить проста, розв'язання задач не вимагає додаткової математичної підготовки. Водночас розв'язання функціональних рівняння вимагє творчого використання знань шкільної математики, глибокого логічного мислення, пошуку оригінальних способів розв'язання.

Зауважимо, що термін "*функціональні рівняння*" в шкільній математиці не введений, тому в постановках задач для учнів його намагаються уникати. Увівши означення функціонального рівняння, будемо, залежно від ситуації, користуватися цим терміном, а також формулювати задачі «мовою оригіналу», тобо так, як вони формулювалися на олімпіадах чи інших математичних змаганнях.

2. СПОСІБ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Цей спосіб вдається застосувати у тих випадках, коли за зовнішнім виглядом функціонального рівняння можна встановити загальний вигляд шуканої функції. Перш завсе це стосується цілих і дробово-раціональних функцій. Корисно пам'ятати, що для цілих і дробово-раціональних функцій $f(x)$ і $g(x)$ функції $\varphi(x) = af(x) + bg(x)$, де a, b – сталі числа, і $\phi(x) = f(g(x))$ є цілими і дробово-раціональними відповідно; при цьому, якщо $f(x)$ і $g(x)$ лінійні або дробово-лінійні, то й $\varphi(x), \phi(x)$ також лінійні або дробово-лінійні.

Для прикладу розглянемо випадок, коли $f(x)$ і $g(x)$ – лінійні функції. Нехай $f(x) = ax + b, \quad g(x) = cx + d$, де a, b, c, d – дійсні числа. Тоді

$$\phi(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b).$$

Отже, композиція $f(g(x)) = acx + (ad + b)$ двох лінійних функцій є лінійною функцією.

Пояснимо суть способу невизначених коефіцієнтів на наступних задачах.

2.1. Знайти всі функції $f : R \to R$ (R – множина всіх дійсних чисел), якщо рівність

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2. \qquad (2.1)$$

виконується для всіх $x \in R$.

(IX Всерос. матем. ол., III етап, 10 кл., 1982 – 1983 рр.).

Розв'язання. Оскільки в лівій частині рівняння (2.1) над незалежною змінною x і значеннями функції f виконуються лише лінійні операції, а правою частиною рівняння є квадратична функція, то логічно припустити, що шукана функція є також квадратичною: $f(x) = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – коефіцієнти, які підлягають визначенню, тобто невизначені коефіцієнти. З того, що ця функція має бути розв`язком рівняння (2.1), випливає тотожність

$$2(ax^2 + bx + c) + a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c \equiv x^2,$$

яка після виконання перетворень у лівій частині, набуває вигляду

$$3ax^2 + (b - 2a)x + (a + b + 3c) \equiv x^2.$$

Рівність двох многочленів буде виконуватися для всіх $x \in R$ тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти біля однакових степенів змінної x будуть рівні:

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ b - 2a = 0, \\ a + b + 3c = 0. \end{cases}$$

З одержаної системи рівнянь знаходимо коефіцієнти $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}$, які визначають функцію $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 1\right)$, що є розв`язком функціонального рівняння (2.1). Однак стверджувати, що задача **2.1** розв`язана повністю, ще не можна, бо не виключена можливість, що є й інші функції, які справджують рівність (2.1).

Припустимо, що $g(x)$ саме така функція – вона задовольняє рівність (2.1) при всіх $x \in R$ і відмінна від $f(x)$, тобто існує таке $x_0 \in R$, що $g(x_0) \neq f(x_0)$. Тоді при $x = x_0$ і $x = 1 - x_0$ повинні виконуватися рівності $2g(x_0) + g(1 - x_0) = x_0^2$ і $2g(1 - x_0) + g(x_0) = (1 - x_0)^2$, з яких маємо $g(x_0) = \frac{1}{3}\left(x_0^2 + 2x_0 - 1\right) = f(x_0)$.

Здобута рівність суперечить припущенню.

Отже, задача має єдиний розв'язок $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 1\right)$.

2.2. Функція $y = f(x)$ для всіх $x \in R$ визначена, неперервна і задовольняє умову

$$f\left(f(x)\right) = f(x) + x. \tag{2.2}$$

Знайти дві такі функції.

(Квант. – 1986. – №7; задача М995.).

Розв`язання. Запишемо рівняння так:

$$f\left(f(x)\right) - f(x) = x. \tag{2.3}$$

Над шуканою функцією f виконуються дві дії – операція утворення складеної функції і дія віднімання. Зважаючи на те, що права частина рівності (2.3) є лінійною функцією, доречно функцію $f(x)$ шукати серед лінійних: $f(x) = ax + b$, де a і b – невизначені коефіцієнти. Підставляючи її в (2.3) і виконуючи перетворення, дістанемо рівність $(a^2 - a)x + ab = x$, яка повинна виконуватися для всіх $x \in R$. Це можливо тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a^2 - a = 1, \\ ab = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $a = 0{,}5\left(1 \pm \sqrt{5}\right), b = 0$. Отже, маємо дві неперервні функції $f(x) = 0{,}5\left(1 \pm \sqrt{5}\right)x$, які є розв`язками функціонального рівняння (2.2).

Можна довести, що це рівняння інших розв`язків не має (Квант. – 1986. – №12; задача №995). Варто зауважити, що це доведення досить складне.

2.3. Знайти всі пари многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що для всіх x і y виконується рівність

$$f(xy) = f(x) + g(x) f(y). \tag{2.4}$$

(XXXVIII Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл., 1998 р.).

Розв'язання. Нескладно переконатися, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ в парі мають однаковий степінь. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Далі, використовуючи рівність (2.4), коефіцієнти многочленів можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Поступимо по-іншому. Покладемо в рівності (2.4) $y=0$:

$$f(0)=f(x)+g(x)f(0) \Leftrightarrow f(x)=(1-g(x))c, c=f(0).$$

Здобуту функцію f підставимо в рівність (2.4). Після виконання тотожних перетворень маємо рівність

$$g(xy)=g(x)g(y).$$

З цієї рівності методом невизначених коефіцієнтів дістаємо $g(x)=x^n$.

Далі переконуємося, що пара многочленів $f(x)=(1-g(x))c$, $g(x)=x^n$ справджує рівність при будь-якій сталій c.

2.4. Знайти функцію $f:R_+ \to R_+$ (R_+ – множина дійсних додатних чисел) таку, що:

а) $f(xf(y))=yf(x)$ для всіх $x, y \in R_+$;

б) $f(x) \to 0$, якщо $x \to +\infty$.

Розв'язання. Взявши $x=1$, з умови *а*) матимемо рівність $f(f(y))=ky$, де $k=f(1)$, яка підказує шукати функцію f серед лінійних або дробово-лінійних функцій. Оскільки для лінійної функції $f(x)=ax+b$ маємо $f(x)\to\infty$, якщо $x\to+\infty$, то шукана функція не може бути лінійною. Тому

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Щоб знайти невизначенікоефіцієнти a,b,c,d, скористаємося першою умовою задачі, з якої маємо таку рівність:

$$\frac{a^2xy+abx+cby+bd}{acxy+cbx+cdy+d^2}=\frac{axy+by}{cx+d}. \tag{2.5}$$

Ця рівність може виконуватися при всіх додатних x, y за умови, що $c=0, d\neq 0$ або $c\neq 0, d=0$. У першому випадку рівність (2.5) рівносильна рівності $a^2xy+abx+bd=adxy+bdy$, з якої маємо $b=0, a=d$. Тому $f(x)=x.$ Проводячи дослідження у другому випадку, одержимо $a=0, b=c,$ а $f(x)=\frac{1}{x}.$

Із знайдених функцій тільки функція $f(x)=\frac{1}{x}$ задовольняє другу умову задачі.

2.5. Знайти: *а*) хоч би один многочлен; *б*) всі многочлени, які для всіх $x\in R$ задовольняють рівність

$$f(x)f(2x^2)=f(2x^3+x). \tag{2.6}$$

(Квант. – 1994. – №5; задача М1465.).

Розв'язання. Спочатку доведемо, що шукані многочлени не мають дійсних коренів. Якщо $x=0$, то з (2.6) маємо рівність $f^2(0)=f(0)$. Припустимо, що

$f(0)=0$. Тоді $f(x)=x^k g(x)$, де k – натуральне число, $g(x)$– деякий многочлен, для якого $g(0)\neq 0$. Повертаючись до (2.6), дістаємо рівність

$$2^k x^{3k} g(x) g(2x^2) = (2x^3+x)^k g(2x^3+x),$$

яка повинна виконуватися для довільних x. Це можливо, коли коефіцієнти при однакових степенях змінної рівні. Зокрема, для коефіцієнтів біля x^k повинна виконуватися рівність $0=g(0)$, яка суперечить припущенню. Отже, 0 не є коренем многочлена f, а $f(0)=1$.

Припустимо, що $x_0\neq 0$ – корінь многочлена, тобто $f(x_0)=0$. Тоді з (2.6) маємо рівність

$$f(x_0)\,f(2{x_0}^2) = f(2{x_0}^3 + x_0),$$

з якої випливає, що число $x_1 = 2x_0^3 + x_0$ є іншим коренем цього многочлена. Але тоді $x_2 = 2x_1^3 + x_1$ – також корінь, причому $x_2 \neq x_1$ і $x_2 \neq x_0$, бо

$$x_2 - x_1 = 2x_1^3 \neq 0\ ,\ x_2 - x_0 = 2(2x_0^3 + x_0)^3 + 2x_0^3 = 2x_0^3\left(\left(2x_0^2+1\right)^3+1\right)\neq 0.$$

Аналогічними міркуваннями можна здобути різні числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, які є коренями многочлена n-го степеня, і тим самим дістати суперечність, бо такий многочлен не може мати більше ніж n коренів.

Оскільки f не має дійсних коренів, то він не може бути многочленом непарного степеня, а тому будемо шукати його серед многочленів парних степенів.

Нехай $f(x)=ax^2+bx+c$. Тоді з рівності (2.6) маємо

$$\left(ax^2+bx+c\right)\left(4ax^4+2bx^2+c\right)=a\left(2x^3+x\right)^2+b\left(2x^3+x\right)+c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2x^6+4abx^5+\left(2ab+4ac\right)x^4+2b^2x^3+\left(ac+2bc\right)x^2+bcx+c^2=$$

$$=4ax^6+4ax^4+2bx^3+ax^2+bx+c.$$

Порівнюючи коефіцієнти біля однакових степенях x, отримаємо $a=c=1$, $b=0$. Тому $f_1(x)=x^2+1$ – один з шуканих многочленів.

Припустимо, що $f_n(x)=\left(x^2+1\right)^n, n>1$ – ціле число, задовольняє рівність (2.6). Доведемо, що $f_{n+1}(x)=\left(x^2+1\right)^{n+1}$ також задовольняє цю рівність. Оскільки

$$f_{n+1}(x)=\left(x^2+1\right)^{n+1}=\left(x^2+1\right)^n\left(x^2+1\right)=f_n(x)(x^2+1),$$

то

$$f_{n+1}(x)\,f_{n+1}(2x^2)=f_n(x)(x^2+1)\,f_n(2x^2)\left(\left(2x^2\right)^2+1\right)=f_n(x)\,f_n(2x^2)(4x^6+4x^4+x^2+1)=$$

$$=f_n(2x^3+x)\left(\left(2x^3+x\right)^2+1\right)=\left(\left(2x^3+x\right)^2+1\right)^n\left(\left(2x^3+x\right)^2+1\right)=$$

$$=\left(\left(2x^3+x\right)^2+1\right)^{n+1}=f_{n+1}(2x^3+x).$$

За методом математичної індукції всі многочлени $f_n(x)=\left(x^2+1\right)^n, n\in N$, задовольняють задану рівність.

Припустимо, що многочлен $g(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots+ax+1$ задовольняє рівність (2.6). (Старший коефіцієнт многочлена визначається рівністю $a_{2n}=a_n^2$, тому $a_{2n}=1$). Тоді многочлен $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, степінь якого m менший за степінь $2n$ многочленів f і g, повинен задовольняти рівність

$$\varphi(2x^3+x)=f(x)\varphi(2x^2)+g(2x^2)\varphi(x)$$

на множині дійсних чисел. Але цього бути не може, бо ліва частина рівності – многочлен степені $3m$, а права – многочлен степені $4mn$.

Відповідь: $\left(x^2+1\right)^n, n\in N$.

2.6. Довести, що існує функція $f(x)$, визначена на множині невід'ємних чисел, така, що

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots f(x)\ldots\right)\right)}_{n}=1+x+2\sqrt{x}. \tag{2.7}$$

(Квант. – 1994. – №1; задача 1414.).

Розв'язання. Оскільки $1+x+2\sqrt{x}=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$, то функцію f будемо шукати серед функцій $\left(a+b\sqrt{x}\right)^2$. Спочатку коефіцієнти a і b визначимо так, щоб

$$f\left(f(x)\right)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2. \tag{2.8}$$

Враховуючи, що

$$f\left(f(x)\right)=f\left(\left(a+b\sqrt{x}\right)^2\right)=\left(a+b\sqrt{\left(a+b\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(a+ab+b^2\sqrt{x}\right)^2,$$

рівність (2.8) буде виконуватися для всіх невід'ємних x, якщо $a+ab=1, b^2=1$. Звідси $a=\frac{1}{2}, b=1$ і $f(x)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)^2$. Здобута функція дає підстави для гіпотези, що функція $f(x)=\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2$ повинна задовольняти рівність (2.7). Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції. Спочатку встановимо базу індукції:

$$f\left(f(x)\right)=f\left(\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{n}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(\frac{2}{n}+\sqrt{x}\right)^2.$$

Припустимо, що для k, $2<k<n$, рівність

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots f(x)\ldots\right)\right)}_{k}=\left(\frac{k}{n}+\sqrt{x}\right)^2 \tag{2.9}$$

виконується для всіх $x\geq 0$. Тоді

$$\underbrace{f\left(f\left(f\ldots f(x)\ldots\right)\right)}_{k+1}=f\left(\underbrace{f\left(f\ldots f(x)\ldots\right)}_{k}\right)=$$

$$= f\left(\left(\frac{k}{n}+\sqrt{x}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{n}+\sqrt{\left(\frac{k}{n}+\sqrt{x}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{n}+\sqrt{x}\right)^2,$$

тобто рівність (2.9) виконується для $k+1$. Тому за методом математичної індукції рівність (2.9) виконується для всіх $k = 1, 2, \ldots, n.$ Якщо $k = n$, то з рівності (2.9) маємо рівність (2.7).

Відповідь: $f(x) = \left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2$.

2.7. Знайти всі функції $f : R \to R$, які є розв'язками функціонального рівняння

$$f(p+x) - f(p-x) = 4px, \tag{2.10}$$

де p – довільне фіксоване число.

(Математ. в шк. РФ, – 1978. – №3; задача 2002.).

Розв'язання. Способом невизначених коефіцієнтів легко встановити, що квадратичні функції $g(x) = ax^2 + 2(1-a)px + c$, де a, c – довільні дійсні числа, є розв'язками рівняння. Нехай $f(x)$ – довільний розв'язок цього рівняння. Розглянемо функцію $\varphi(x)$. де

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Тоді $f(x) = g(x) + \varphi(x)$. Оскільки за припущенням функція $f(x)$ – розв'язок рівняння, то рівність

$$f(p+x) - f(p-x) = 4px$$

рівносильна рівності

$$\big(g(p+x) - g(p-x)\big) + \big(\varphi(p+x) - \varphi(p-x)\big) = 4px,$$

з якої маємо

$$\varphi(p+x) - \varphi(p-x) = 0.$$

Останню рівність задовольняють функції $\varphi(x) = \psi(x-p)$, де ψ – довільна парна функція:

$$\varphi(p+x) - \varphi(p-x) = \psi\big((p+x)-p\big) - \psi\big((p-x)-p\big) = \psi(x) - \psi(-x) = 0.$$

Таким чином, будь-який розв'язок рівняння (2.10) можна подати формулою:

$$f(x) = ax^2 + 2(1-a)px + c + \psi(x-p),$$

де a, c – довільні дійсні числа, $\psi(x)$ – довільна парна функція.

Описаний прийом знаходження розв`язків функціональних рівнянь називають способом невизначених коефіцієнтів. Він дає можливість будувати частинні розв`язки тих функціональних рівнянь, за зовнішнім виглядом яких можна передбачити загальний вигляд шуканих функцій. Іноді цього досить для повного розв`язання задачі, іноді це допомагає знайти всі розв`язки функціонального рівняння.

Задачі для самостійного розв’язування.

2.8. Чи існує лінійна функція $y = f(x)$, яка при всіх x з множини дійсних чисел справджує рівність

а) $2f(x+2) + f(4-x) = 2x+7$, б) $f(x+3) - 2f(2-x) = 3x+1$?

2.9. Знайдіть квадратичну функцію $y = f(x)$, яка при всіх x з множини дійсних чисел справджує рівність $f(1-x) - f(2-x) = 7-2x.$

2.10. При яких значеннях a, b, c функція $f(x) = ax^2 + bx + c$ задовольняє умову

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

для всіх $x, y \in R$?

2.11. Знайдіть усі функції $f : R \to R$, для яких рівність

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)(1+y) = 2xy(3y - x^2)$$

виконується при всіх $x, y \in R$.

2.12. Знайдіть усі многочлени $f(x)$, для яких

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$$

при всіх x і y.

2.13. Знайдіть всі многочлени $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$, які на всій множині дійсних чисел справджують рівність $P(x^2) = (P(x))^2$.

2.14. Доведіть, що існує функція $f(x)$, визначена на множині невід’ємних чисел і така, що

$$\underbrace{f(f(f\ldots(f(x))\ldots))}_{n} = \frac{x}{x+1}.$$

2.15. Знайдіть усі функції $f : R \to R$, якщо рівність

$$f(x+T) = f(x) + x + a,$$

де $T \neq 0$ і a – деяке дійсне число, виконується при всіх $x \in R$.

Відповіді

2.8. а) $f(x0 = 2x - 3;$ б) ні, не існує. **2.9**. $f(x) = -x^2 - 4x + c,$ c – довільна стала. **2.10**. $a = 0{,}5, c = 0, b$ – довільна стала. **2.11.** x^3 **2.12**. $x^3 + cx, c$ – довільна стала. **2.13.** $P(x) = x^n$. **2.14**. $\frac{nx}{x+n}$. **2.15.** $\frac{1}{2T}x^2 + \frac{2a-T}{2T}x + g(x),$ $g(x)$ – довільна T – періодична функція.

3. СПОСІБ ПІДСТАНОВОК

Спосіб підстановок – найбільш поширений і найбільш дієвий спосіб розв'язування функціональних рівнянь. Він дає змогу розв'язування функціональних рівнянь звести до розв'язування рівнянь відомих типів, зокрема алгебраїчних рівнянь та їх систем. Однак конкретних рекомендацій, коли і як його можна використати, не існує. Суть цього способу викладемо, розв'язуючи конкретні рівняння.

3.1. Знайти всі функції $f : R \to R$ (R – множина всіх дійсних чисел), якщо рівність

$$2f(x) + f(1-x) = x^2 \qquad (3.1)$$

виконується для всіх $x \in R$.

Розв'язання. Рівність (3.1) є функціональним рівнянням, бо невідома функція f пов'язана з відомими функціями $1-x$ і x^2 за допомогою дії утворення складеної функції $f(1-x)$, множення на число 2 і додавання. Припустимо, що функція f є розв'язком цього рівняння. Тоді воно перетворюється в тотожність на множині усіх дійсних чисел. Візьмемо довільне дійсне число a і покладемо $x = a$. Дістанемо рівність

$$2f(a) + f(1-a) = a^2. \qquad (3.2)$$

з двома невідомими $f(a)$ і $f(1-a)$, для визначення яких потрібна ще одна рівність з цими невідомими. Її дістанемо, якщо в (3.1) покладемо $x = 1-a$:

$$2f(1-a) + f(a) = (1-a)^2. \qquad (3.3)$$

Отримані рівності утворюють систему лінійних рівнянь відносно невідомих $f(a)$ і $f(1-a)$:

$$\begin{cases} 2f(a) + f(1-a) = a^2, \\ 2f(1-a) + f(a) = (1-a)^2. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Звідси знаходимо $f(a) = \frac{1}{3}\left(a^2 + 2a - 1\right)$. Оскільки a – довільне дійсне число, то

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 1\right). \qquad (3.5)$$

Отже, зробивши припущення, що функція f є розв'язком рівняння (3.1), ми встановили, розв'язком може бути тільки квадратична функція (3.5). Зробимо перевірку, яка є обов'язковою при розв'язуванні функціональних рівнянь способом підстановок:

$$2f(x) + f(1-x) = 2\cdot\frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 1\right) + \frac{1}{3}\left((1-x)^2 + 2(1-x) - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x^2 + 4x - 2 + 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x - 1\right) = x^2.$$

Одержана рівність, що виконується для всіх $x \in R$, дозволяє стверджувати, що функція (3.5) є єдиним розв’язком рівняння (3.1).

Зауважимо, що саме *підстановка* $x = 1 - a$ дозволила розв’язування функціонального рівняя (3.1) звести до розв’язуванння системи лінійних рівнянь (3.4).

Необхідність перевірки проілюструємо, розв’язуючи наступну задачу.

3.2. Знайти всі функції $f : R \to R$ такі, що

$$x\left(f(x) + f(-x) + 2\right) + 2f(-x) = 0 \tag{3.6}$$

для всіх $x \in R$.

(XXXIII Всеукр. олімп. юн. математ., III етап, 1993 р., 10 кл.).

Розв’язання. Припустимо, що розв’язком рівняння (3.6) є парна функція f: $f(-x) = f(x)$. Тоді з (3.6) дістаємо функцію $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$. Перевіримо виконання припущень. Спочатку дослідимо парність функції. Оскільки область її визначення не є симетричною відносно точки 0, то функція не може бути парною, а отже, не може бути й розв’язком рівняння. Припущення не справдилися.

Припустимо, що розв’язком рівняння (3.6) є довільна функція f. Виконаємо заміну $x \to -x$ у рівності (3.6):

$$-x\left(f(-x) + f(x) + 2\right) + 2f(x) = 0. \tag{3.7}$$

Додаючи рівності (3.6) і (3.7), матимемо $f(x) + f(-x) = 0$. З рівності (3.7) знаходимо єдину функцію $f(x) = x$. Перевіркою переконуємося, що $f(x) = x$ – розв’язок рівняння (3.6).

Розв’язуючи функціональні рівняння способом підстановок, ми фактично визначаємо яким повинен бути розв’язок. Тому перевіркою треба переконатися, що здобута функція дійсно є розв’язком рівняння.

У тих випадках, коли розв’язування функціональних рівнянь зводиться до розв’язування системи двох алгебраїчних рівнянь, підстановки визначаються досить просто. Значно складніше це робиться, коли функціональне рівняння зводиться до системи трьох і більше рівнянь.

Проте для рівнянь вигляду

$$af(x) + bf\left(g(x)\right) = c, x \in X \subset R, \tag{$*$}$$

де a, b, c – відомі сталі або змінні величини, $g(x)$ – відома функція, $f(x)$ – шукана функція, вибір підстановок і подальше розв’язування можна здійснювати за такою схемою. Для довільного $x_1 \in X$ будуємо рекурентну послідовність (x_n), члени якої, починаючи з другого, визначаємо за формулою $x_{n+1} = g(x_n)$. Якщо ця послідовність періодична з періодом p, $p > 1$, то з допомогою підстановок $x = x_n, n = 1, \ldots, p$, функціональне рівняння зводимо до системи p лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 f(x_1) + b_1 f(x_2) = c_1, \\ a_2 f(x_2) + b_2 f(x_3) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p f(x_p) + b_p f(x_1) = c_p, \end{cases} \tag{3.8}$$

де $a_n = a(x_n), b_n = b(x_n), c_n = c(x_n), n = 1, \ldots, n,$ якщо a, b, c залежать від x; якщо ж a, b, c сталі, $a_n = a, b_n = b, c_n = c$. З цієї системи визначається $f(x_1)$. Найзручніше це робити за формулою Крамера

$$f(x_1) = \frac{\Delta_1(x_1, \ldots, x_p)}{\Delta(x_1, \ldots, x_p)},$$

якщо $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \neq 0,$ де $\Delta(x_1, \ldots, x_p)$ і $\Delta_1(x_1, \ldots, x_p)$ – визначники p-го порядку:

$$\Delta(x_1, \ldots, x_p) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots a_{p-1} & b_{p-1} \\ b_p & 0 & 0 & \ldots 0 & a_p \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_{p-1} a_p - (-1)^p b_1 b_2 \ldots b_{p-1} b_p,$$

$$\Delta_1(x_1, \ldots, x_p) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p-1} & 0 & 0 & \ldots a_{p-1} & b_{p-1} \\ c_p & 0 & 0 & \ldots 0 & a_p \end{vmatrix}.$$

3.3 Розв’язати функціональне рівняння

$$2xf(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2x, \; x \neq 0, \; x \neq 1. \tag{3.9}$$

Розв’язання. Побудуємо послідовність (x_n), у якій x_1 – довільне дійсне число, відмінне від 0 і 1, а $x_{n+1} = \dfrac{1}{1-x_n}, n \in N$. Після обчислень маємо, що

$$x_2 = \frac{1}{1-x_1}, \; x_3 = \frac{x_1 - 1}{x_1}, \; x_4 = x_1, \; x_5 = x_2, \ldots,$$

тобто (x_n)– періодична послідовність з періодом 3. Якщо взяти $x = x_1, x = x_2, x = x_3$, то з функціонального рівняння (3.9) маємо таку систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 f(x_1) + f(x_2) = 2x_1, \\ 2x_2 f(x_2) + f(x_3) = 2x_2, \\ 2x_3 f(x_3) + f(x_1) = 2x_3 \end{cases}$$

з трьома невідомими $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)$. Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 1 \\ 1 & 0 & 2x_3 \end{vmatrix} = 8x_1x_2x_3 + 1 = 8x_1 \cdot \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{x_1 - 1}{x_1} + 1 = -7,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 2x_2 & 2x_2 & 1 \\ 2x_3 & 0 & 2x_3 \end{vmatrix} = 8x_1x_2x_3 - 4x_2x_3 + 2x_3 = -\frac{6x_1 + 2}{x_1},$$

то $f(x_1) = \dfrac{6x_1 - 2}{7x_1}$. Перевірка підтверджує, що функція $f(x) = \dfrac{6x - 2}{7x}$ є розв'язком функціонального рівняння.

Використовуючи описаний спосіб розв'язування функціональних рівнянь, можна розв'язувати й інші задачі.

3.4. Нехай функція $f : R \to R$ задовольняє такі умови:

а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всіх $x, y \in R$;

б) $f(1) = 1$;

в) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} f(x)$ для всіх $x \neq 0$.

Довести, що $f(x) = x$ для всіх x.

(І Сорос.олімп. з матем., 11 кл., 1995 р.)

Розв'язання. Покладаючи спочатку $x = y = 0$, а потім $y = -x$, встановимо, що $f(0) = 0$ і $f(-x) = -f(x)$. Виконуючи заміни $x \to 1,\ y \to -\dfrac{1}{x}$, першу умову задачі запишемо так:

$$\frac{1}{x^2} f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1,\ x \neq 0.$$

Здобуте функціональне рівняння – рівняння вигляду $(*)$. Тому утворимо послідовність (x_n), де $x_1 \neq 0$ і $x_1 \neq 1$, а $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{x_n}, n \in N$. Ця послідовність періодична періодом 3 , а $x_2 = \dfrac{x_1 - 1}{x_2}, x_3 = \dfrac{1}{1 - x_1}$. Використовуючи підстановки $x = x_1, x = x_2, x = x_3$, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2} f(x_1) + f(x_2) = 1, \\ \dfrac{1}{x_2^2} f(x_2) + f(x_3) = 1, \\ \dfrac{1}{x_3^2} f(x_3) + f(x_1) = 1, \end{cases}$$

з якої знаходимо $f(x_1) = x_1$. Враховуючи одержану рівність, а також рівності $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$, робимо висновок, що $f(x) = x$ для всіх $x \in R$.

3.5. Знайти всі функції $f : R \to R$ такі, що рівність

$$3f\left(\frac{x-1}{2-3x}\right) - 5f\left(\frac{1-x}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1} \tag{3.10}$$

виконується для всіх x, крім $\dfrac{2}{3}$, 1 і 2.

Розв'язання. Введемо заміну $\dfrac{x-1}{2-3x} = t$. Тоді

$$\frac{1-x}{x-2} = \frac{-t}{1+4t}, \quad \frac{8}{x-1} = \frac{-8(1+3t)}{t}$$

і задане рівняння набуває вигляду $(*)$, а саме:

$$3f(t) - 5f\left(\frac{-t}{1+4t}\right) = -\frac{8(1+3t)}{t}. \tag{3.11}$$

Легко переконатися, що рекурентна послідовність (x_n), перший член якої відмінний від –0,25 і 0, а $x_{n+1} = \dfrac{-x_n}{1+4x_n}, n \in N$, періодична з періодом 2. Тому підстановками $t = x_1, t = x_2$, де $x_2 = \dfrac{-x_1}{1+4x_1}$, функціональне рівняння (3.11) зводиться до системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3f(x_1) - 5f(x_2) = -\dfrac{8(1+3x_1)}{x_1}, \\ 3f(x_2) - 5f(x_1) = -\dfrac{8(1+3x_2)}{x_2}, \end{cases}$$

з якої знаходимо $f(x_1) = \dfrac{2x_1 - 1}{x_1}$. Перевіркою переконуємося, що функція $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ є шуканою.

Розглянемо функціональні рівняння, які не мають розв'язків.

3.6. Чи існує функція $f: R \to R$, що задовольняє дві наступні умови:

а) множина значень f співпадає з R;

б) для всіх $x \in R$ виконується рівність

$$f\big(f(x)\big) = \big(f(x)+1\big)(x+1)? \tag{3.12}$$

(ІІІ Сорос.олімп. з матем., 11 кл.).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Тоді для $x=-1$ і $x=0$ з (3.12) маємо рівності

$$f(f(-1)) = 0 \text{ і } f(f(0)) = f(0)+1. \tag{3.13}$$

Згідно з першою умовою задачі існує таке дійсне число a, що $f(a) = -1$.

З рівності (3.12) при $x = a$ дістаємо $f(-1) = 0$. Тому з рівностей (3.13) спочатку маємо рівність $f(0) = 0$, а потім рівність $f(0) = 1$, що їй суперечить.

Отже, функції, яка задовольняє умови задачі, не існує.

3.7. Довести, що функціональне рівняння

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0 \tag{3.14}$$

не має неперервних розв'язків на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Нехай f – неперервний розв'язок рівняння. Тоді рівність (3.14), яка виконується для всіх дійсних x, запишемо так:

$$f(x+1)\big(f(x)+1\big) = -1. \tag{3.15}$$

Зрозуміло, що $f(x+1) \neq 0$ для всіх $x \in R$, а отже, $f(x)$ також не дорівнює нулю на множині дійсних чисел. За умови неперервності на множині дійсних чисел функція f на цій множині зберігає свій знак.

Якщо $f(x+1) > 0$, то з рівності (3.15) маємо нерівність $f(x)+1 < 0$, яка не може справджуватися. Тому $f(x+1) < 0$. У цьому випадку маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x)+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < f(x) < 0.$$

Для завершення розв'язання задачі рівність (3.14) запишемо так:

$$\big(f(x+1)+1\big)\big(f(x)+1\big) = f(x). \tag{3.16}$$

Ця рівність, враховуючи здобуту нерівність $-1 < f(x) < 0$, не може справджуватись, бо її ліва частина – додатна, а права – відємна.

Отже, функціональне рівняння (3.14) не має неперервних розв'язків на множині дійсних чисел.

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти всі функції $f: R \to R$, для яких виконуються рівності:

3.8. $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ для всіх $x \neq 0$.

3.9. $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$ для всіх $x \neq 1$.

3.10. $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$ для всіх $x \neq 0, x \neq 1$.

3.11. $2f(x) - f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x$ для всіх $x \neq 0$ і $x \neq 1$.

3.12. $x^2 f(x) - xf\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\right) = 1$ для всіх $x \neq 0$ і $x \neq 1$.

3.13. $f(x) - 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$ для всіх $x \neq 0$ і $x \neq \pm 1$.

3.14. $f\left(\frac{x-1}{2x+1}\right) + f\left(\frac{4x+5}{x+2}\right) = \frac{x-1}{2x+1}$, для всіх $x \neq -2, x \neq -0{,}5$.

3.15. Чи існує така функція $f: R \to R$, що ля всіх $x \in R$ одночасно мають місце рівності $f(1 + f(x)) = 1 - x$ і $f(f(x)) = x$?

Відповіді

3.8. $\frac{1}{3x} - \frac{x}{3}$. **3.9.** $2x + 1$. **3.10.** $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)$. **3.11.** $\frac{1}{7}\left(2 + 4x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right)$.
3.12. $\frac{1}{2x^2} + \frac{x^3 + x - 1}{2\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$. **3.13.** $6 - x + \frac{24x^2 + 12x - 4}{x^3 - x}$. **3.14.** $\frac{1}{2}\left(x - 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)$.

3.15. Ні,. Не існує.

4. МЕТОД ГРАНИЧНОГО ПЕРЕХОДУ

Повернемося до функціонального рівняння $(*)$, розглянутого в п.3:

$$af(x)+bf\big(g(x)\big)=c,\ x\in X\subset R \qquad (*)$$

і послідовності (x_n), першим членом якої є довільне число з множини X, а всі інші визначаються рекурентною формулою $x_{n+1}=g(x_n), n\in N$. Надалі будемо вважати, що функція f неперервна на множині X, а послідовність (x_n) збіжна. За таких умов невідому функцію f можна знайти методом граничного переходу. Цей метод передбачає використання рівності

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big),$$

яка має місце для неперервних функцій f і збіжних послідовностей (x_n).

4.1. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$ такі, що рівність

$$f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

виконується для всіх x, відмінних від 1.

Розв'язання. Задана рівність є функціональним рівнянням вигляду $(*)$. Тому побудуємо послідовність (x_n), у якій $x_1\neq 1$, а $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1-x_n}, n\in N.$ Легко переконатися в тому, що $x_{n+1}=\dfrac{x_1}{1-nx_1}, n\in N,$ якщо додатково вимагати, щоб $x_1\neq\dfrac{1}{n}, n=2,3,\ldots.$ Очевидно, що побудована послідовність збіжна і її границя дорівнює 0:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1}{1-nx_1}=0.$$

Замінюючи в заданому рівняння почергово x на $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} f(x_1)=f(x_2), \\ f(x_2)=f(x_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_{n-1})=f(x_n), \end{cases}$$

яка складається з $(n-1)$-го рівняння і містить n невідомих $f(x_1),\ldots,f(x_n)$. З цієї системи знаходимо, що $f(x_1)=f(x_n)$. Оскільки за умовою задачі функція f неперервна, а послідовність (x_n) збіжна і її границя дорівнює нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Rightarrow f(x_1)=f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\Rightarrow f(x_1)=f(0)$$

для всіх $x_1 \neq \frac{1}{k}, k \in N$. Якщо ж $x_1 = \frac{1}{k}$, то для будь-якого натурального числа n сума $\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}$ є ірраціональним числом. Тому $f\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = f(0)$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{1}{k},$$

то

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(0) = f(0).$$

Отже, $f(x_1) = c$, де $c = f(0)$, для всіх $x_1 \neq 1$.

Відповідь: $f(x) = c, c - \textit{довільна стала}$.

4.2. Знайти всі неперервні розв'язки функціонального рівняння

$$f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{3}{5}x.$$

Розв'язання. Спочатку, покладаючи в рівнянні $x = 0$, дістанемо $f(0) = 0$. Тепер побудуємо послідовність (x_n) у такий спосіб: $x_1 = a$ – довільне дійсне число, $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n, n \in N$. Легко встановити, що $x_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Оскільки f неперервна, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 0$. Замінюючи у функціональному рівнянні послідовно x на $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, дістаємо систему лінійних рівнянь

$$f(x_1) + f(x_2) = \frac{3}{5}x_1,$$

$$f(x_2) + f(x_3) = \frac{3}{5}x_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.....$$

$$f(x_{n-1}) + f(x_n) = \frac{3}{5}x_{n-1}$$

з невідомими $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Оскільки в системі невідомих більше, ніж рівнянь, то виразимо $f(x_1)$ через $f(x_n)$. Для цього кожне рівняння системи помножимо на $(-1)^{k+1}$, де k – номер рівняння, і всі рівняння додамо:

$$f(x_1) + (-1)^n f(x_n) = \frac{3}{5}\left(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^n x_{n-1}\right).$$

Виконаємо перетворення у правій частині здобутої рівності:

$$x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^n x_{n-1} =$$

$$a - \frac{2}{3}a + \left(\frac{2}{3}\right)^2 a - \ldots + (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} a = \frac{3}{5}a\left(1 + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right).$$

Тут ми скористалися формулою для обчислення суми перших n членів геометричної прогресії. Маємо рівність

$$f(x_1)+(-1)^n f(x_n)=\frac{9}{25}\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)a.$$

Перейдемо до границі в здобутій рівності за умови, що $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)+(-1)^n f(x_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{25}\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)a\right).$$

Враховуючи, що $x_1=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot f(x_n)\right)=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)=0$ (добуток обмеженої послідовності $(-1)^n$ і нескінченно малих послідовностей $\left(f(x_n)\right)$ та $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$ є нескінченно малі послідовності), матимемо рівність $f(a)=\frac{9}{25}a$ для довільного дійсного *a*.

Відповідь: $f(x)=\frac{9}{25}x$.

4.3 Знайти всі неперервні розв'язки рівняння

$$2f(2x)=f(x)+x,\ x\in R.$$

Розв'язання. Хоч задане рівняння вигляду $(*)$, та до нього не можна безпосередньо застосувати описаний метод розв'язування, бо послідовність (x_n), загальний член якої виражається формулою $x_n=2^{n-1}a,\ a\neq 0,$ розбіжна:

$$\lim_{n\to\infty}2^{n-1}a=\infty.$$

Тому спочатку в рівнянні виконаємо заміну $2x=t$. Потім для здобутого рівняння

$$2f(t)=f\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{t}{2}$$

побудуємо послідовність (t_n) з довільним першим членом $t_1=a\neq 0$ і $t_{n+1}=\frac{t_n}{2},\ n\in N.$ Оскільки загальний член цієї послідовності $t_n=\frac{a}{2^{n-1}}$, то вона збіжна і її границя дорівнює 0, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)=f(0)=0.$ Далі послідовними замінами t на $t_1,t_2,\ldots,t_{n-2},t_{n-1}$ дістанемо систему рівнянь, яку запишемо так:

$$\begin{cases} f(t_1)=\dfrac{1}{2}(f(t_2)+t_2), \\ f(t_2)=\dfrac{1}{2}(f(t_3)+t_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(t_{n-2})=\dfrac{1}{2}(f(t_{n-1})+t_{n-1}), \\ f(t_{n-1})=\dfrac{1}{2}(f(t_n)+t_n). \end{cases}$$

Помножимо кожне рівняння системи на $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, k – номер рівняння, і додамо їх:

$$f(t_1)=\frac{1}{2^{n-1}}f(t_n)+\left(\frac{t_2}{2}+\frac{t_3}{2^2}+\ldots+\frac{t_{n-1}}{2^{n-2}}+\frac{t_n}{2^{n-1}}\right).$$

Знайдемо суму, що стоїть у дужках правої частини рівності, використовуючи при цьому формулу суми перших членів геометричної прогресії:

$$\frac{t_2}{2}+\frac{t_3}{2^2}+\ldots+\frac{t_{n-2}}{2^{n-1}}+\frac{t_{n-1}}{2^n}=a\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-4}}+\frac{1}{2^{2n-2}}\right)=\frac{a}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right).$$

Маємо

$$f(a)=\frac{1}{2^{n-1}}f(t_n)+\frac{a}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right).$$

Перейдемо в рівності, яку дістали, до границі:

$$\lim_{n\to\infty}f(a)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}f(t_n)+\frac{a}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n-2}}\right)\right).$$

Звідси за властивостями границь знаходимо $f(a)=\dfrac{a}{3}$ для довільного $a\neq 0$. Враховуючи, що $f(0)=0$, маємо розв’язок рівняння $f(x)=\dfrac{x}{3}$, $x\in R$, який підтверджується перевіркою.

Відповідь: $f(x)=\dfrac{x}{3}$.

4.4. Знайти всі функції $f:R\to R$, які на множині дійсних чисел мають неперервні похідні і на ній задовольняють рівність

$$f(2x)=2f(x).$$

Розв'язання. Якщо f – шукана функція, то рівність виконується тотожно на множині дійсних чисел, а тому її можна диференціювати:

$$\left(f(2x)\right)' = \left(2f(x)\right)' \Rightarrow f'(2x) = f'(x).$$

Увівши заміни $2x = t,\ f' = g$, маємо функціональне рівняння

$$g(t) = g\left(\frac{t}{2}\right).$$

Виконаємо послідовно $n-1$ разів заміну $t \to \frac{t}{2}$. Дістаємо систему рівнянь

$$g(t) = g\left(\frac{t}{2}\right),\ g\left(\frac{t}{2}\right) = g\left(\frac{t}{2^2}\right),\ \ldots,\ g\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) = g\left(\frac{t}{2^n}\right),$$

з якої маємо $g(t) = g\left(\frac{t}{2^n}\right)$. Перейдемо в цій рівності до границі за умови, що $n \to \infty$, і, зважаючи на неперервність функції g, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} g(t) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{t}{2^n}\right) \Rightarrow g(t) = g\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right) \Rightarrow g(t) = g(0) \Rightarrow f'(t) = f'(0).$$

Звідси $f(t) = at + b$, де $a = f'(0), b$ – довільна стала. Підставимо знайдену функцію у вихідне рівняння:

$$2ax + b = 2(ax + b).$$

Очевидно, що ця рівність буде виконуватися тотожно тільки тоді, коли $b = 0$.

Відповідь: $f(x) = ax,\ a$ – довільна стала.

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, для яких виконуються рівності:

4.5. $f(2x+1) = f(x)$. **4.6.** $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + x(x+1)$. **4.7.** $3f(2x+1) = f(x) + 5x$.

4.8. $f(x) = 2^x f\left(\frac{x}{5}\right)$. **4.9.** $f(2x+1) + \frac{1}{9} f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} f(x)$.

Відповіді

4.5. c – довільна стала. **4.6.** $\frac{4}{3}x^2 + 2x + c,\ c$ – довільна стала. **4.7.** $x - \frac{3}{2}$.

4.8. $2^{\frac{5x}{4}} c,\ c$ – довільна стала. **4.9.** $\frac{18}{31}x - \frac{153}{217}$. *Вказівка*: зробіть заміну $x \to \frac{x-1}{2}$, здобуте рівняння помножте на $\frac{1}{3}$ і додайте до заданого.

5. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

Спектр функціональних рівнянь з вільними змінними значно ширший від спектра рівнянь без вільних змінних. І для цих рівнянь одним з основних способів розв'язування є спосіб підстановок. Однак, розв'язуючи одне й те ж функціональне рівняння з вільними змінними, можна використовувати не тільки різні підстановки, а й різні способи розв'язувань. Від вдалого їх вибору й вмілого застосування часто залежить як ефективність, так іноді й ефектність їхнього використання.

Почнемо з задач, у яких внутрішня функція складеної функції залежить тільки від незалежної і вільної змінних.

5.1. Знайти всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівнянню

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.1}$$

(Другий турнір математ. боїв пам'яті М.Й.Ядренка. Київ. 2007 р.).

Розв'язання. Якщо функція f розв'язок рівняння, то рівність (5.1) виконується для всіх $y \in R$, зокрема й для $y = 2$:

$$xf(2) - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right).$$

Ми дістали рівняння з однією змінною, розв'язування якого за допомогою заміни $x \to \frac{2}{x}, x \neq 0$, зводиться до розв'язування системи двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} xf(2) - 2f(x) = f\left(\frac{2}{x}\right), \\ \frac{2}{x}f(2) - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = f(x). \end{cases} \tag{5.2}$$

З системи (5.2) знаходимо $f(x) = c\left(x - \frac{1}{x}\right)$, де $c = \frac{2f(2)}{3}$. Нескладно переконатися, що ця функція задовольняє рівняння (5.1) при будь-якому значенні постійної c і $x \neq 0$. Щоб знайти значення функції в точці 0, візьмемо в рівняння (5.1) $x = 2$, $y = 0$. Дістаємо $f(0) = 0$.

Відповідь:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ c\left(x - \frac{1}{x}\right), \text{ якщо } x \neq 0, c - \text{довільна стала}. \end{cases}$$

5.2. Нехай a і b, $a \neq b$, – додатні числа, відмінні від 1. Знайти всі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність

$$f(x + y) = a^x f(y) + b^y f(x). \tag{5.3}$$

(Матем. в шк., РФ. – 1997. – №4; задача 4253).

Розв'язання. Спочатку, поклавши $x = y = 0$, знаходимо, що $f(0) = 0$. Потім, проводячи в рівності (5.3) почергово заміни $x = t, y = -t;$ $x = 1, y = -t;$ $x = -t, y = 1,$ дістаємо таку систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a^t f(-t) + b^{-t} f(t) = 0, \\ f(1-t) = af(-t) + b^{-t} f(1), \\ f(1-t) = a^{-t} f(1) + bf(-t). \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо $f(t) = c(b^t - a^t)$, де $c = \dfrac{f(1)}{b-a}$. Далі безпосередньою перевіркою переконуємося, здобута функція задовольняє рівність (5.3) з будь-якою сталою c.

Відповідь: $f(x) = c(b^x - a^x)$, де c – довільна стала.

5.3. Знайдіть усі функції $f: R \to R$ такі, що для будь-яких дійсних x та y виконується умова

$$f\big(f(y) + 2 + x\big) + f\big(f(y) - x\big) = yf(y)(x+1). \qquad (5.4)$$

(XLVIII Всеукр. олімп. юн. математ., IV етап, 11 кл., 2008 р.).

Розв'язання. У рівності (5.4) виконаємо зміну $2 + x \to -x$:

$$f\big(f(y) - x\big) + f\big(f(y) + 2 + x\big) = -yf(y)(x+1). \qquad (5.5)$$

Оскільки в рівностях (5.4) і (5.5) ліві частини однакові, то для довільних y і x повинна виконуватися рівність

$$yf(y)(x+1) = -yf(y)(x+1) \Rightarrow yf(y)(x+1) = 0 \Rightarrow f(y) = 0,$$

за умови, що $y \neq 0$. Якщо $x = -2, y = 1$, то зрівності $f(0) + f(2) = 0$ дістаємо $f(0) = 0$. Отже, $f(x) = 0$ для всіх x. Перевірка очевидна.

5.4. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які при будь-яких дійсних x і y задовольняють рівність

$$f\big(x + xy + f(y)\big) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right). \qquad (5.6)$$

(XLIX Всеукр. олімп. юн. математ., IV етап, 10 кл., 2009 р.).

Розв'язання. Нехай f – шукана функція. Тоді для довільного x і $y = -1$ повинна справджуватися рівність

$$f\big(f(-1)\big) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(-1) + \frac{1}{2}\right).$$

Це можливо тільки за умови, що $f(x) = c$, де c – деяка стала, або $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$. У першому випадку дістаємо рівність

$$c = \left(c + \frac{1}{2}\right)\left(c + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow c^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Ця рівність неправильна, тому f не може бути сталою функцією.

Якщо $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, то $f(f(-1)) = 0,$ а $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Далі для довільного y і $x = -1$ з (5.6) дістаємо рівність

$$f\left(f(y)-y-1\right)=0\,.$$

Функція f неможе бути сталою, тому здобута рівність виконується тільки тоді, коли вираз $f(y)-y-1$ є сталим для довільного y:

$$f(y)-y-1=a \Leftrightarrow f(y)=a+y+1.$$

Оскільки $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, то $a=-\dfrac{1}{2}$, а $f(y)=y+\dfrac{1}{2}$.

Перевіркою переконуємося у правильності здобутого результату.

5.5. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які для всіх дійсних x і y задовольняють рівність

$$f(x^2+y)=f(x)+f\left(y^2\right). \tag{5.7}$$

(XXXIII Всеукр. олімп. юн. мате мат., III етап, 11 кл., 1993 р.).

Розв'язання. *1-й спосіб.* Очевидно, що рівняння має тривіальний розв'язок: $f(x)=0$ для всіх значень змінної x. Доведемо єдиність цього розв'язку.

Припустимо, що існує нетривіальний розв'язок $g(x)$ рівняння (5.7). Тоді $g(x_0)\neq 0$ для деякого x_0 і

$$g(x^2+y)\equiv g(x)+f\left(y^2\right) \tag{5.8}$$

для всіх дійсних x і y.

Нехай y_0 корінь квадратного рівняння $y^2=y+x_0^2$. Такий корінь існує, бо дискримінант $D=1+4x_0^2$ цього рівняння додатний при будь-якому x_0. За умови, що $x=x_0,\ y=y_0$, з (5.8) дістаємо рівність

$$g(x_0^2+y_0)\equiv g(x_0)+f\left(y_0^2\right)\,.$$

Оскільки $x_0^2+y_0=y_0^2$, то $g(x_0^2+y_0)=f\left(y_0^2\right)$, а тому $g(x_0)=0.$ Ця рівність суперечить припущенню. Отже, рівняння має тільки тривіальний розв'язок.

2-й спосіб. Розв'язуючи функціональні рівняння з вільними змінними, в першу чергу намагаються дістати значення шуканої функції в деякій конкретній точці – найчастіше такою точкою обирають точку 0. Після цього, використовуючи функціональне рівняння і різні допоміжні підстановки, утворюють систему рівнянь для визначення невідомої функції.

Нехай f – розв'язок рівняння (5.7). Тоді за умови, що $x=y=0$, з рівності (5.7) дістаємо

$$f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

Якщо $y=0$, а x – довільне дійсне число, то $f(x)=f(x^2)$. Виконуючи заміну $x\to x^2$, дістанемо $f(x^2)=f(x^4)$. За умови, що $y=-x^2$, де x – довільне дійсне число, маємо $f(x)+f(x^4)=0$. Далі зі здобутої системи трьох рівнянь

$$\begin{cases} f(x)=f(x^2), \\ f(x^2)=f(x^4), \\ f(x)+f(x^4)=0 \end{cases}$$

знаходимо $f(x)=0$ для довільного $x\in R$.

3-спосіб. Нехай f – розв'язок рівняння, x – довільне фіксоване дійсне число, а число y таке, що $x^2 + y = y^2$. Тоді $f(x^2 + y) = f(y^2)$. З рівності (5.7) дістаємо $f(x) = 0$ для довільного x.

Для розв'язання наступної задачі використаємо наведені способи розв'язання.

5.6. Знайти всі функції $f(x)$, які визначені на множині всіх дійсних чисел, і такі, що для будь-яких x, y виконується рівність

$$f(x + 2^y) = f(2^x) + f(y). \qquad . \qquad (5.8)$$

(I Сорос. олімп. з матем., 10 кл.).

Розв'язання. *1-й спосіб.* Те, що функція $f(x) = 0$ задовольняє рівність (5.8), очевидно. Тому для завершення розв'язання задачі потрібно довести, що інших функцій не існує. Припустимо протилежне, а саме: існує функція $y = g(x)$, яка задовольняє рівність (5.8) для всіх x, y і не дорівнює тотожно нулю. Тоді знайдеться таке t, що $g(t) \neq 0$, а рівність $g(x + 2^t) = g(2^x) + g(t)$ виконується при всіх x. Якщо $t \geq 0$, то існує x_1 таке, що $x_1 + 2^t = 2^{x_1}$. (У цьому можна переконатися графічно). Тому $g(x_1 + 2^t) = g(2^{x_1})$ і $g(t) = 0$, що суперечить припущенню. Якщо ж $t < 0$, то $g(x) = 0$ для всіх невід'ємних значень свого аргументу, а тому $g(2^x) = 0$ і $g(x + 2^t) = g(t)$ для всіх x. Для $x = 0$ маємо рівність $g(2^t) = g(t)$, яка суперечить припущенню, бо $g(2^t) = 0$. Отже, $f(x) = 0$ – єдиний розв'язок задачі.

2-й спосіб. Після виконання серії підстановок $x = 0, \ y = 0; \ \ x = 2, y = 1;$ $x = 0, \ y = x; x = x, y = 0$ спочатку одержимо рівності $f(0) = 0, \ \ f(1) = 0$, $f(2^x) = f(x), f(2^x) = f(x+1), f(x) = f(x+1).$ Потім з наступного ланцюжка рівностей

$$f(x) = f(x+1) = f(2^{x+1}) = f(2^x + 2^x) =$$
$$= f\left(2^{2^x}\right) + f(x) = f(2^x) + f(x) = f(x) + f(x)$$

дістаємо $f(x) = 0$.

3-й спосіб. Утворимо рівняння $x + 2^t = 2^x$, де $t \geq 0$ – дійсний параметр. Використовуючи графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + a$, де $a = 2^t \geq 1$, переконуємося, що воно має два розв'язки x_1 і x_2.

Повернемося тепер до функціонального рівняння. Нехай f його розв'язок. Тоді для $x = x_1$ і $y = t \geq 0$ дістанемо тотожність

$$f(x_1 + 2^t) = f(2^{x_1}) + f(t).$$

Оскільки $f(x_1 + 2^t) = f(2^{x_1})$, то $f(t) = 0$ для всіх $t \geq 0$. Зважаючи на те, що $2^x > 0$ для всіх x і $f(2^x) = 0$, рівність (5.8) для довільних x, y запишеться так:

$$f(x + 2^y) = f(y).$$

Виконуючи тут заміни $x \to 0, y \to x$, одержимо $f(x)=0$, $x \in R$.

5.7. Знайдіть усі функції f, визначені на множині дійсних чисел, які набувають дійсних значень і для будь-яких x, y задовольняють рівність

$$f(x+y)=\{f(x)\}+\{f(y)\}. \tag{5.9}$$

($\{a\}$ позначає дробову частину числа a).

(VII Сорос. олімп. з матем., 10 кл.).

Розв'язання. Якщо $x=y=0$, то

$$f(0)=\{f(0)\}+\{f(0)\} \Leftrightarrow f(0)-\{f(0)\}=\{f(0)\} \Leftrightarrow [f(0)]=\{f(0)\}.$$

Оскільки ціла частина числа може дорівнювати його дробовій частині тільки тоді, коли дробова частина дорівнює нулю, то $[f(0)]=\{f(0)\}=0$, а отже, $f(0)=0$. Візьмемо у рівності (5.9) $y=-x$. Дістанемо $0=\{f(x)\}+\{f(-x)\}$ для довільного x. Звідси $\{f(x)\}=0$, бо дробова частина числа завжди невід'ємна. Нарешті, поклавши в рівності (5.9) $y=0$, одержимо $f(x)=\{f(x)\}$. Звідси маємо $f(x)=0$.

5.8. Знайдіть усі функції f, що визначені на множині всіх дійсних чисел і набувають дійсні значення та для яких виконується рівність

$$f(x+y)=\max\left(f(x),y\right)+\min\left(x,f(y)\right) \tag{5.10}$$

для всіх дійсних x, y. (Тут символи $\max(a,b)$ і $\min(a,b)$ позначають відповідно більше та менше з чисел a і b).

(V Сорос. олімп. з матем., 10 кл., 1999 р.).

Розв'язання. Покладаючи в рівності (5.10) спочатку $x=t, y=0$, а потім $x=0, y=t$, дістаємо дві рівності:

$$f(t)=\max\left(f(t),0\right)+\min\left(t,f(0)\right), \quad f(t)=\max\left(f(0),t\right)+\min\left(0,f(t)\right).$$

Додамо ці рівності, враховуючи, що $\max(a,b)+\min(a,b)=a+b$:

$$2f(t)=\max\left(f(t),0\right)+\min\left(t,f(0)\right)+\max\left(f(0),t\right)+\min\left(0,f(t)\right)=$$

$$=f(t)+0+t+f(0)=f(t)+t+f(0).$$

Звідси маємо $f(t)=t+a$, де $a=f(0)$. Для визначення сталої a підставимо здобуту функцію у рівність (5.10):

$$x+y+a=\max\left(x+a,y\right)+\min\left(x,y+a\right). \tag{5.11}$$

Для $y=x-a$ з рівності (5.11) маємо

$$2x=\max(x+a,x-a)+\min(x,x) \Leftrightarrow x=\max(x+a,x-a) \Rightarrow a=0.$$

Відповідь: $f(x)=x$.

5.9. Знайти всі функції $f: R \to R$, які задовольняють рівність

$$f(x)=\max_{y \in R}\left(xy-f(y)\right)$$

для всіх $x \in R$.

(Матем. в шк., РФ. – 1998. – №5; задача 4359).

Розв'язання. Оскільки $f(x)$ найбільше значення виразу $xy - f(y)$ для $y \in R$, то $xy - f(y) \le f(x)$ для всіх $x, y \in R$. Поклавши $x = y$, маємо нерівність

$$f(y) \ge 0{,}5y^2,\ y \in R, \tag{5.12}$$

враховуючи яку, оцінимо вираз $xy - f(y)$:

$$xy - f(y) \le xy - 0{,}5y^2 = -0{,}5(x-y)^2 + 0{,}5x^2 \le 0{,}5x^2.$$

Маємо $xy - f(y) \le 0{,}5x^2$ для всіх $x, y \in R$. Тому

$$f(x) = \max_{y \in R}(xy - f(y)) \le \max_{y \in R} 0{,}5x^2 = 0{,}5x^2,\ x \in R. \tag{5.13}$$

З нерівностей (5.12) і (5.13) випливає, що $f(x) = 0{,}5x^2$.

Перевірка.

$$\max_{y \in R}(xy - f(y)) = \max_{y \in R}(xy - 0{,}5y^2) = \max_{y \in R} 0{,}5(x^2 - (x-y)^2) = 0{,}5x^2 = f(x).$$

Відповідь: $f(x) = 0{,}5x^2$.

5.10. Знайти всі пари многочленів $f(x), g(x)$ таких, що для всіх чисел x, y справедлива рівність

$$f(xy) = f(x) + g(x)f(y). \tag{5.14}$$

(XXXVIII Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл., 1998 р.)

Розв'язання. Очевидно, що умову задачі задовольняє довільна пара многочленів $f(x), g(x)$, у якій $f(x) = 0$ для всіх x.

Нехай $f(x) = 0$ не для всіх $x \in R$. Тоді з рівності (5.11) випливає, що шукані многочлени повинні бути однакового степеня. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0,$$

де $a_n \ne 0, b_n \ne 0,$ – многочлени степеня n. Коефіцієнти цих многочленів можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Зробимо по іншому. Для відшукання многочленів використаємо той факт, що многочлени можна диференціювати будь-яке число разів і

$$f^{(n)}(x) = n!a_n,\ g^{(n)}(x) = n!b_n.$$

Зафіксуємо y в рівності (5.14) і продиференціюємо її n разів по змінній x:

$$\left(f(xy)\right)^{(n)} = \left(f(x) + g(x)f(y)\right)^{(n)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^n f^{(n)}(xy) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)f(y) \Rightarrow n!a_n y^n = n!a_n + n!b_n f(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(y) = \frac{a_n}{b_n}\left(y^n - 1\right).$$

Диференціюючи рівність (5.14) по змінній y, дістаємо

$$x^n f^{(n)}(xy) = g(x) f^{(n)}(y) \Rightarrow n!a_n x^n = n!a_n g(x) \Rightarrow g(x) = x^n.$$

Таким чином, $f(x)=c(x^n-1), g(x)=x^n$, де $c=\frac{a_n}{b_n}$. Перевіркою переконуємося, що всі пари многочленів такого вигляду, де c – довільна стала, задовольняють умови задачі.

Відповідь: $f(x)=c(x^n-1), g(x)=x^n$, де $c\in R$.

5.11. Знайти всі функції $f:R\to R$, для яких рівність

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x)(1+y)=2xy(3y-x^2) \qquad (5.15)$$

виконується для всіх $x,y\in R$.

Розв'язання. Проведемо в рівності (5.12) послідовно такі заміни: $x\to 0, y\to t;\ \ x\to t-1, y\to -1;\ \ \ x\to -1, y\to t-1$. Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)-2a(1+t)=0, \\ f(t-2)+f(t)=-2(t-1)(-t^2+2t-4), \\ f(t-2)+f(-t)-2bt=-2(t-1)(3t-4), \end{cases}$$

в якій $a=f(0), b=f(-1)$. Звідси знаходимо $f(t)=t^3+(a-b-1)t+a.$ Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдена функція задовольняє рівність (5.12) тільки тоді, коли $a=0, b=-1$. Таким чином, $f(x)=x^3$.

Наведемо ще один спосіб розв'язання задачі. Для цього у рівності (5.15) виконаємо заміну $y\to -y$:

$$f(x-y)+f(x+y)-2f(x)(1-y)=-2xy(-3y-x^2). \qquad (5.16)$$

Від рівності (5.15) віднімемо рівність (5.16) і виконаємо тотожні перетворення. Дістанемо $f(x)=x^3$.

5.12. Знайти всі функції $f:R\to R$ такі, що

$$f\left(x+y\right)+f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \qquad (5.17)$$

для всіх $x\neq 0, y\neq 0$.

(Міжн. Сорос. ол., Тбілісі, 1996 р.).

Розв'язання. Покладаючи в (5.17) послідовно $x=y=1;\ \ x=y=-1;\ \ \ x=-y$, дістанемо рівності

$$f(2)+f(2)=1,\ f(-2)+f(-2)=1,\ f(0)+f(0)=1,$$

з яких знаходимо $f(2)=f(-2)=f(0)=0{,}5$. Запишемо рівність (5.17) так:

$$f(x+y)+f\left(\frac{x+y}{xy}\right)=1. \qquad (5.18)$$

Нехай x – довільне від'ємне число, а $y=2-x$. Тоді з рівності (5.18) дістанемо

$$f(2)+f\left(\frac{2}{x(2-x)}\right)=1 \Rightarrow\ f\left(\frac{2}{x(2-x)}\right)=0{,}5.$$

Якщо $x \in (-\infty;0)$, то функція $t = \dfrac{2}{x(2-x)}$ неперервно спадає і її значення утворюють інтервал $(-\infty;\,0)$. Тому $f(t)=0{,}5$ для $t<0$.

Для додатних значень змінної x значення y виберемо так, щоб $x+y=-2$. Знову дістаємо рівність $f\left(\dfrac{2}{x(2+x)}\right)=0{,}5$. При цьому, якщо $x\in(0;+\infty)$, то $t=\dfrac{2}{x(2+x)}\in(0;+\infty)$, тобто $f(t)=0{,}5$ для $t>0$. Підсумовуючи зроблене, приходимо до висновку, що $f(x)=0{,}5$ для $x\in R$.

Відповідь: $f(x)=0{,}5$.

Зупинимося тепер на рівняннях, у яких внутрішні функції складених функцій разом з незалежною і вільними змінними містять шукані функції.

5.13. Знайдіть всі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x,y\in R$ виконується рівність

$$f\bigl(y+f(x)\bigr)=f(x^2-y)+4f(x)y. \tag{5.19}$$

(XLI Всеукр. олімп. юн. матем., ІІІ етап, 11 кл., 2001 р.).

Розв'язання. Нехай функція f уже визначена. Візьмемо довільне значення x, зафіксуємо його й обчислимо значення $f(x)$ функції f у цій точці. Тепер виберемо y так, щоб $y+f(x)=x^2-y$, тобто $y=0{,}5\bigl(x^2-f(x)\bigr)$. Тоді з рівності (5.19) дістанемо рівність $2f(x)\bigl(x^2-f(x)\bigr)=0$. Оскільки множник $f(x)$ перетворюється в нуль тільки при одному значенні x, то ця рівність можлива тільки тоді, коли $f(x)=x^2$. Легко переконатися, що ця функція задовольняє обидві умови задачі.

Відповідь: $f(x)=x^2$.

5.15. Знайдіть усі монотонні (тобто незростаючі або неспадні) функції f, задані на множині дійсних додатних чисел, які набувають дійсних додатних значень і для будь-яких $x>0, y>0$ задовольняють рівність

$$f(xf(y))=yf(x). \tag{5.20}$$

(VII Сорос.олімп. з матем., 9 кл., 2001 р.).

Розв'язання. Доведемо спочатку, що задану рівність можуть задовольняти тільки строго монотонні функції. Припустимо, що існують $b>a>0$ такі, що $f(a)=f(b)$. Тоді в силу монотонності функції f на відрізку $[a;b]$ вона буде постійною: $f(x)=c.$ Якщо взяти $x=1, y=t\in[a;b]$, то повинна виконуватися рівність $f(c)=tf(1)$, але цього не може бути, оскільки $f(1)>0.$ Отже, f – строго монотонна функція. Тепер покладемо в рівності (5.20) $y=x$:

$$f(xf(x)) = xf(x). \qquad (5.21)$$

Для строго зростаючої функції f добуток $xf(x) = t > 0$ є зростаючою змінною, а тому з (5.21) маємо $f(t) = t, t > 0.$

Зупинимося на випадку, коли f строго спадна функція: $f(x_1) > f(x_2) > 0$, якщо $0 < x_1 < x_2$. Встановимо, яке із співвідношень

$$x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2), \quad x_1 f(x_1) > x_2 f(x_2), \quad x_1 f(x_1) = x_2 f(x_2)$$

правильне. З першої нерівності, враховуючи рівність (5.21) і спадання функції, прийдемо до нерівності $x_1 f(x_1) = f(x_1 f(x_1)) > f(x_2 f(x_2)) = x_2 f(x_2)$, яка їй же і суперечить. Аналогічно одержується суперечність і в другому випадку. Тому має місце третя рівність, яка виконується для будь-яких x_1, x_2 , тобто $xf(x) = c$, а $f(x) = \frac{c}{x}$, де c – деяка стала. Для її визначення підставимо одержану функцію в рівність (5.21). Маємо $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{c}{x}$. Отже, $c = 1$, а $f(x) = \frac{1}{x}$.

Відповідь: $x, \frac{1}{x}$.

5.16. Чи існує визначена на всій множині дійсних числова функція f така, для якої при всіх $x\ y \in R$ справджується рівність

$$f\left(x^2 y + f(x + y^2)\right) = x^3 + y^3 + f(xy)?$$

(XLIV Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 11 кл., 2004 р.).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Тоді для пар чисел $x = 0, y = 1$ і $x = 0, y = -1$ повинні справджуватися наступні дві суперечливі рівності:

$$f\left(f(1)\right) = 1 + f(0),$$
$$f\left(f(1)\right) = -1 + f(0).$$

Відповідь: Ні, не існує.

5.17. Чи існує функція f, що визначена на множині дійсних чисел, набуває значення з цієї множини і така, що

$$f\left(x + f(y)\right) = y^2 + f(x) \qquad (5.22)$$

для всіх x, y?

(Фест. юн. матем. і фіз., Одеса, 1996 р.).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Тоді для $x = y = 0$ одержимо рівність $f(f(0)) = f(0)$, а для $x = 0, y = f(0)$ – рівність $f(0) = f^2(0) + f(0)$, з якої дістаємо $f(0) = 0$. Покладаючи $x = 0, y = 1$, а потім $x = 0, y = f(1)$, матимемо $f(1) = 1$. Тепер знайдемо $f(-1)$. Для цього $x = -1, y = 1$ підставимо у рівність (5.22). Виконуючи перетворення, дістанемо $f(-1) = -1$. Далі, взявши $x = 1, y = -1$, маємо:

$$y^2 + f(x) = (-1)^2 + f(1) = 2,$$

$$f\left(x+f(y)\right)=f\left(1+f(-1)\right)=f(0)=0.$$

Оскільки $2\neq 0$, то $f\left(x+f(x)\right)\neq y^2+f(x)$, для $x=1, y=-1$, що суперечить припущенню.

Відповідь: Ні, не існує.

5.18. Знайдіть усі функції $f: R\to R$ такі, що

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \qquad (5.23)$$

для всіх $x, y\in R.$

(XXXIII Міжн. матем. ол., 1992 р.).

Розв'язання. Нехай число $a\in R$ таке, що $f(a)=0.$ Виконуючи заміни $x\to a, y\to a$ і $x\to -a, y\to a,$ дістанемо рівності $f\left(a^2+f(a)\right)=a+f^2(a)$ і $f\left(a^2+f(a)\right)=a+f^2(-a)$, з яких маємо $f^2(a)=f^2(-a)$ і $f(-a)=0$. Якщо в рівності (5.23) покласти $y=a$ і $y=-a$, то здобудемо рівності:

$$f(x^2)=a+f^2(x),\ f(x^2)=-a+f^2(x).$$

Звідси випливає, що $a=0.$Тепер замінимо в рівності (5.20) x на $-x$:

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(-x)\right)^2. \qquad (5.24)$$

З рівностей (5.23) і (5.24) маємо

$$f^2(x)=f^2(-x)\Leftrightarrow (f(x)+f(-x))(f(x)-f(-x))=0,\ x\in R. \qquad (5.25)$$

(Варто застерегти, що рівність (5.25) не дає підстав для висновку про парність чи непарність функції f. Здобуту рівність, зокрема, задовольняє функція

$$f(x)=\begin{cases} x,\ якщо\, x\notin N, \\ -x,\ якщо\, x\in N, \end{cases}$$

яка є ні парною, ні непарною).

Нехай A множина тих x, для яких $f(-x)=f(x)$, B – множина тих x, для яких $f(-x)=-f(x)$. Тоді $R=A\bigcup B\bigcup \{0\}$. Якщо $x\in R, y\in A,$ то з рівностей

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \ \text{ і } \ f\left(x^2+f(y)\right)=-y+\left(f(x)\right)^2$$

дістаємо суперечність $y=-y$, бо $y\neq 0$. Тому A – порожня множина, отже, функція f – непарна.

Якщо $y=0$, то для довільного x маємо $f(x^2)=f^2(x)$ і рівність (5.24), коли $y=x^2$, запишеться так:

$$f\left(x^2+f(x^2)\right)=x^2+f(x^2),$$

а тому $f(t)=t,$ де $t=x^2+f(x^2)\geq 0$. Враховуючи непарність функції, доходимо висновку, що $f(t)=t, t\in R$. Перевіркою легко переконатися у його правильності.

Відповідь: $f(x)=x$.

5.19. Знайдіть усі функції $f(x)$, які визначені на множині невід'ємних дійсних чисел, набувають значення на тій же множині й задовольняють такі умови:

1) $f\big(xf(y)\big)f(y)=f(x+y), x\geq 0, y\geq 0;$ (5.26)

2) $f(2)=0;$

3) $f(x)\neq 0, 0\leq x<0.$

(XXVII Міжн. матем. ол., 1986 р.).

Розв'язання. Нехай f шукана функція, а $t\geq 2$ – довільне дійсне число. Тоді для $x=t-2, y=2$ одержимо рівність

$$f\big((t-2)f(2)\big)f(2)=f(t),$$

з якої маємо $f(t)=0$, якщо $t\geq 2$. Для визначення функції f на проміжку $[0;2)$ візьмемо довільне t з цього проміжку, покладемо $y=t$, а x виберемо так, щоб $x=u-t$, де u деяке число з проміжку $[2;4)$. Тоді $x+y=u\geq 2$, і з рівності (5.26) дістанемо

$$f\big((u-t)f(t)\big)f(t)=0.$$

Оскільки $t\in[0;2)$, то $f(t)\neq 0$, а тому $f\big((u-t)f(t)\big)=0$. Це можливо тільки за умови, що $(u-t)f(t)\geq 2$. Якщо $(u-t)f(t)=v$, то для $t\in[0;2)$

$$f(t)=\frac{v}{u-t}, \tag{5.27}$$

де $u\geq 2, v\geq 2$. Для визначення параметрів u, v скористаємося рівністю (5.26). Візьмемо $x\geq 0, y\geq 0$ так, щоб $x+y<2$. Тоді згідно з (5.27) маємо

$$f(x+y)=\frac{v}{u-x-y}, \quad f(y)=\frac{v}{u-y},$$

і рівність (5.26) запишеться так:

$$f\left(\frac{vx}{u-y}\right)\frac{v}{u-y}=\frac{v}{u-x-y}. \tag{5.28}$$

Рівність (5.28) можлива тільки за умови, що

$$0\leq\frac{vx}{u-y}<2, \tag{5.29}$$

і виконується, якщо $v=u$:

$$f\left(\frac{vx}{u-y}\right)\frac{v}{u-y}=\frac{v}{u-\frac{vx}{u-y}}\cdot\frac{v}{u-y}=\frac{u}{u-\frac{ux}{u-y}}\cdot\frac{u}{u-y}=\frac{u}{u-x-y}.$$

При цьому нерівність (5.29), яка набуває вигляду $0\leq\frac{ux}{u-y}<2,$ виконується для всіх $x, y\in[0;2)$ таких, що $x+y<2$ і $u>2$ (її ліва частина очевидна, а права перетворюється на нерівність $u\big(2-(x+y)\big)+y(u-2)>0,$ яка також очевидна).

Для визначення параметра u візьмемо $x, y \in [0;2)$ такі, що $x+y=2$. Тоді $f(y) \neq 0,\ f(x+y)=0$, а тому $f(xf(y))=0$. Звідси випливає, що повинна виконуватися нерівність $xf(y) \geq 2$. Зважаючи, що $f(y)=\dfrac{u}{u-y}$ для $y \in [0;2)$, де $u \in [2;4)$, маємо нерівність $\dfrac{xu}{u-y} \geq 2$, яка рівносильна нерівності $(x-2)(u-2) \geq 0$. Ця нерівність буде виконуватися для всіх $x \in [0;2)$ лише тоді, коли $u=2$. Таким чином, параметри u, v – визначені: $u=v=2$. Отже, $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$, якщо $x \in [0;2)$.

Відповідь: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-x}, \text{ якщо } 0 \leq x < 2, \\ 0, \text{ якщо } x \geq 2. \end{cases}$

Задачі для самостійного розв'язування

Знайдіть усі функції $f: R \to R$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівності:

5.20. $f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$. **5.21.** $f(x+y)=f(x)f(2001-y)+f(y)f(2001-x)$, якщо $f(0)=1/2$. **5.22.** $2f(x+y)-f(x-y)-(1-y)f(x)=y(x^2+6x+y)$.

5.23. $f(x)f(y)=f(xy)+2005\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2004\right),\ x>0,\ y>0.$

5.24. $f(x^2)-f(y^2)=(x+y)\big(f(x)-f(y)\big)$. **5.25.** $f\left(x^2-x+2^y\right)=f(x)+f(-1-y^2)$.

5.26. $f(x-f(y))=1-x-y$. **5.27.** $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$.

5.28. $f(x^2+f(y))=(x-y)^2 f(x+y)$.

5.29. Чи існує функція f, яка визначена на множині дійсних чисел і набуває значення з цієї множини, така, що $f(xy)=\max(f(x),y)+\min(f(y),x)$ для всіх $x, y \in R$?

Відповіді:

5.20. $a\sin x,\ a \in R$; **5.21.** 0,5. **5.22.** x^2. **5.23.** $\dfrac{1}{x}+2005$. **5.24.** $kx+b,\ k,b \in R$. **5.25.** 0.

5.26. $-x+0{,}5$. **5.27.** $1-0{,}5x^2$. **5.28.** $-x^2$. **5.29.** Ні, не існує.

6. СПОСІБ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

В основі способу лежить просте й очевидне твердження:

«*Якщо в рівності* $P(y)=Q(x)$, *яка виконується для всіх* $x, y \in \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{R}$, *ліва частина залежить тільки від* y, *а права – тільки від* x, *то існує деяка стала* c *така, що*

$$P(y)=Q(x)=c$$

для всіх x *і* y *з множини* $\boldsymbol{G}$».

Універсальних рекомендацій щодо застосування цього прийому розв'язування функціональних рівнянь немає. Тому процес відокремлення змінних і його використання проілюструємо, розв'язуючи наступні задачі.

6.1. Знайти всі пари числових функцій $f(x)$ і $g(x)$, визначених на множині всіх дійсних чисел і таких, що для будь-яких дійсних x і y виконується рівність

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=x^3+\sqrt[3]{y}.$$

(XLIII Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл., 2003 р.).

Розв'язання. Відокремимо змінні у рівності, зібравши вирази, що залежать від y, ліворуч, а від x – праворуч:

$$f(y)-g(y)-\sqrt[3]{y}=x^3-f(x)-g(x). \qquad (6.1)$$

Рівність (6.1) буде виконуватися для всіх дійсних x і y тільки за умови, що обидві її частини сталі:

$$\begin{cases} x^3-f(x)-g(x)=c, \\ f(y)-g(y)-\sqrt[3]{y}=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-f(x)-g(x)=c, \\ f(x)-g(x)-\sqrt[3]{x}=c. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо функції $f(x)$ і $g(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^3+\sqrt[3]{x}\right),\ g(x)=\frac{1}{2}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)-c\,.$$

Нескладно переконатися, що функції задовольняють задану рівність при довільному значенні c.

Зауважимо, що рівність у цій задачі не є функціональним рівнянням, хоч у ній є дві невідомі функції – у рівності відсутні складені функції з невідомими.

6.2. Нехай a і b, $a \neq b$, додатні числа, відмінні від 1. Знайти всі функції $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такі, що для будь-яких дійсних чисел x і y виконується рівність

$$f(x+y)=a^x f(y)+b^y f(x). \qquad (6.2)$$

(Матем. в шк., РФ. –1997. – №4; задача 4253).

Розв'язання. Ліва частина рівності (6.2) симметрична відносно змінних:

$$f(x+y) = f(y+x).$$

Оскільки $f(y+x) = a^y f(x) + b^x f(y)$, то дістаємо рівність

$$a^x f(y) + b^y f(x) = a^y f(x) + b^x f(y),$$

яку запишемо так:

$$\left(a^x - b^x\right) f(y) = \left(a^y - b^y\right) f(x).$$

Якщо $x \neq 0, y \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, маємо рівність відношень

$$\frac{f(y)}{b^y - a^y} = \frac{f(x)}{b^x - a^x}.$$

У цій рівності ліва частина залежить від змінної y, а права – від x. Це може бути тільки за умови, що ліва частина рівності не залежить від y, а права не залежить від x, тобто вони є сталими:

$$\frac{f(y)}{b^y - a^y} = \frac{f(x)}{b^x - a^x} = c,$$

де c – деяке число. Звідси маємо: $f(x) = c(b^x - a^x)$, якщо $x \neq 0$. Щоб знайти значення функції f у точці 0, у рівності (6.2) покладемо $x = y = 0$: $f(0) = 0$. Оскільки $c(b^x - a^x) = 0$, якщо $x = 0$, то можна вважати, що вираз $c(b^x - a^x)$, де c – деяка стала, визначає функцію f на множині всіх дійсних чисел. Визначимо, при яких значеннях c знайдені функції задовольняють рівність (6.2):

$$f(x+y) = c\left(b^{x+y} - a^{x+y}\right),$$

$$a^x f(y) + b^y f(x) = a^x c\left(b^y - a^y\right) + b^y c\left(b^x - a^x\right) = c\left(a^x b^y - a^x a^y + b^y b^x - b^y a^x\right) =$$

$$= c\left(b^{x+y} - a^{x+y}\right).$$

Праві частини одержаних рівностей однакові при будь-яких значеннях c, тому й ліві частини повинні бути однаковими. Отже, всі функції $f(x) = c(b^x - a^x)$, де c – довільна стала, задовольняють рівність (6.2).

6.3. Знайти всі функції $f:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ – множина всіх додатних чисел), для яких рівність

$$f(xy) = \left(f(x)\right)^{y^\alpha}\left(f(y)\right)^{x^\beta}, \tag{6.3}$$

де $\alpha \neq \beta$ – довільні дійсні числа, виконується для всіх $x, y \in \mathbf{R}_+$.

Розв'язання. Враховуючи, що $f(xy) = f(yx)$, приходимо до рівності

$$\left(f(x)\right)^{y^\alpha}\left(f(y)\right)^{x^\beta} = \left(f(y)\right)^{x^\alpha}\left(f(x)\right)^{y^\beta}.$$

Після логарифмування і очевидних тотожних перетворень маємо:

$$\left(y^\alpha - y^\beta\right)\ln f(x) = \left(x^\alpha - x^\beta\right)\ln f(y).$$

Якщо $x \neq 1$ і $y \neq 1$, то $x^\alpha - x^\beta \neq 0$ і $y^\alpha - y^\beta \neq 0$, а тому

$$\frac{\ln f(y)}{y^\alpha - y^\beta} = \frac{\ln f(x)}{x^\alpha - x^\beta} = c,$$

де c – деяка стала. Звідси отримуємо:

$$\ln f(x) = \left(x^\alpha - x^\beta\right)c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^{\left(x^\alpha - x^\beta\right)c}.$$

Оскільки $e^{\left(x^\alpha - x^\beta\right)c} = \left(e^c\right)^{x^\alpha - x^\beta} = a^{x^\alpha - x^\beta}$, де $a = e^c > 0$, то $f(x) = a^{x^\alpha - x^\beta}$, $x \neq 1$.

Якщо $x = y = 1$, то з рівності (6.2) маємо $f(1) = \left(f(1)\right)^2$, а $f(1) = 1$. Тому $f(x) = a^{x^\alpha - x^\beta}$, $a > 0$, для всіх $x > 0$.

6.4. Знайдіть усі такі функції $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, що для всіх $x, y \in \mathbf{R}$ справджується рівність

$$f\left(x^2 + y^2 + 2005xy\right) = x^2 + y^2 + 2005 f(x) f(y). \tag{6.4}$$

(VII відкр. фіз. –мат. олімп. Рішельєвського ліцею. Одеса, 2005 р.).

Розв'язання. Для $x = y = 0$ маємо:

$$f(0) = 2005 f^2(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = \dfrac{1}{2005}, \\ f(0) = 0. \end{array}\right.$$

Якщо $f(0) = \dfrac{1}{2005}$, то у випадку, коли $x = 0$ і $y = 1$, приходимо до суперечності:

$$f(1) = 1 + 2005 \cdot \frac{1}{2005} f(1) \Rightarrow 0 = 1.$$

Тому $f(0) = 0$. Далі для довільного x і $y = 0$ отримуємо рівність $f(x^2) = x^2$, яка означає, що $f(x) = x$ для всіх $x \geq 0$.

Для означення функції на від'ємній частині числової прямої у рівності (6.4) виконаємо заміни $x \to -x, y \to -y$:

$$f\left(x^2+y^2+2005xy\right)=x^2+y^2+2005f(-x)f(-y). \qquad (6.5)$$

Порівнюючи праві частини рівностей (6.4) і (6.5), дістаємо:

$$f(x)f(y)=f(-x)f(-y).$$

Якщо $x>0$, а $y<0$, то

$$xf(y)=-yf(-x)\Leftrightarrow \frac{f(y)}{-y}=\frac{f(-x)}{x}\Rightarrow f(-x)=cx,$$

де c – стала. Для її визначення візьмемо в рівності (6.4) $x=1,\ y=-1$:

$$f(-2003)=2+2005f(1)c\Leftrightarrow 2003c=2+2005c\Rightarrow c=-1.$$

Маємо $f(-x)=-x$ для $x>0$. Тому $f(x)=x$, якщо $x<0$.

Виконавши перевірку, переконуємося, що $f(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$, єдина функція, що справджує дану рівність.

6.5. Знайти всі функції $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, для яких виконується рівність

$$f(x^2)-f(y^2)=(x+y)\big(f(x)-f(y)\big) \qquad (6.6)$$

для всіх $x,y\in\mathbf{R}$.

Розв'язання. Після заміни $x\to -x,\ y\to -y$ маємо:

$$f\big((-x)^2\big)-f\big((-y)^2\big)=(x+y)\big(f(-y)-f(-x)\big). \qquad (6.7)$$

З (6.6) і (6.7) отримуємо рівність:

$$f(x)-f(y)=f(-y)-f(-x)\Leftrightarrow f(y)+f(-y)=f(x)+f(-x)=c, \qquad (6.8)$$

де c – деяка стала. Замінюючи в рівності (6.6) $y\neq 0$ на його протилежне значення, дістанемо рівність

$$f(x^2)-f(y^2)=(x-y)\big(f(x)-f(-y)\big). \qquad (6.9)$$

Порівняємо праві частини рівностей (6.6), (6.9) і виконаємо тотожні перетворення з урахуванням (6.8):

$$(x+y)\big(f(x)-f(y)\big)=(x-y)\big(f(x)-f(-y)\big)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2yf(x)=x\big(f(y)-f(-y)\big)+y\big(f(y)+f(-y)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2yf(x)=x\big(2f(y)-c\big)+cy.$$

Нехай $y=1,\ a=f(1)-\dfrac{c}{2},\ b=\dfrac{c}{2}.$ Тоді $f(x)=ax+b$. Нескладно переконатися, що ці функції задовольняють рівність (7) за будь-яких дійсних чисел a і b.

6.6. Знайдіть усі такі функції f, які визначені на множині всіх дійсних чисел і набувають дійсних значень, що для всіх дійсних x і y справджується рівність

$$f\left(f(x)-y^2\right)=(x-y)^2\cdot f(x+y).$$

Відповідь обгрунтуйте.

(XLVI Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл., 2006 р.).

Розв'язання. Після заміни $y \to -y$ отримаємо рівність

$$f\left(f(x)-y^2\right)=(x+y)^2\cdot f(x-y).$$

Зрозуміло, що для всіх дійсних x і y повинна справджуватися рівність

$$(x-y)^2\cdot f(x+y)=(x+y)^2\cdot f(x-y).$$

Уведемо нові змінні $u=x+y, v=x-y$. Тоді остання рівність запишеться так:

$$v^2\cdot f(u)=u^2\cdot f(v).$$

Для $u=0, v\neq 0$ маємо $f(0)=0$. Якщо $u\neq 0, v\neq 0$, то

$$\frac{f(v)}{v^2}=\frac{f(u)}{u^2}\Rightarrow f(u)=cu^2.$$

Тому рівність $f(u)=cu^2$ означує функцію f на усій числовій прямій. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $cx^2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ справджує дану в умові задачі рівність тільки тоді, коли $c=0$ або $c=1$.

Отже, шуканими функціями є: 0 і x^2.

6.7. Знайти всі функції $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такі, що рівність

$$f(x^2+y)=xf(x)+f\left(f(y)\right) \tag{6.10}$$

виконується для всіх $x, y\in\mathbf{R}$, а рівняння $f(x)=0$ має скінченну кількість коренів.

(VI відкр. фіз. –мат. олімп. Рішельєвського ліцею. Одеса, 2004 р.).

Розв'язання. Послідовно покладаючи $x=0, y=0$ і $x=y=0$, з рівності (6.10) тримаємо такі три рівності:

$$f(y)=f\left(f(y)\right),\ \forall y\in\mathbf{R}, \tag{6.11}$$

$$f(x^2)=xf(x)+f\left(f(0)\right),\ \forall x\in\mathbf{R}, \tag{6.12}$$

$$f(0)=f\left(f(0)\right). \tag{6.13}$$

Якщо $x=1$, то з (6.12) маємо $f\left(f(0)\right)=0$, а з (6.13) – $f(0)=0$.

Виконаємо у рівності (6.10) заміну $y\to y^2$:

$$f(x^2+y^2)=xf(x)+f\left(f(y^2)\right),$$

а в отриманій рівності симетричну заміну $x\leftrightarrow y$:

$$f(y^2+x^2)=yf(y)+f\left(f(x^2)\right).$$

З двох останніх рівностей маємо рівність

$$xf(x)+f\left(f(y^2)\right)=yf(y)+f\left(f(x^2)\right),$$

у якій відокремимо змінні:

$$xf(x)-f\left(f(x^2)\right)=yf(y)-f\left(f(y^2)\right)\ \Rightarrow\ xf(x)-f\left(f(x^2)\right)=a,$$

де a – деяка стала. Якщо $x=0$, то зважаючи на (6.13), дістаємо $a=0$. Тому

$$f\left(f(x^2)\right)=xf(x).$$

Враховуючи (6.11), отримуємо

$$f\left(x^2\right)=xf(x).$$

Покладемо в рівності (6.10) $y=x+0,25$:

$$f\left(x^2+x+0,25\right)=xf(x)+f\left(f(x+0,25)\right). \qquad (6.14)$$

Перетворимо окремо ліву і праву частини рівності (6.14), використовуючи здобуті рівності і рівність (6.10):

$$f\left(x^2+x+0,25\right)=f\left((x+0,5)^2\right)=$$

$$=(x+0,5)f\left(x+0,5\right)=(x+0,5)f\left(\left(\sqrt{0,5}\right)^2+x\right)=$$

$$(x+0,5)\left(\sqrt{0,5}f\left(\sqrt{0,5}\right)+f\left(f(x)\right)\right)=(x+0,5)\left(\sqrt{0,5}f\left(\sqrt{0,5}\right)+f\left(x\right)\right),$$

$$xf(x)+f\left(f(x+0,25)\right)=xf(x)+f\left(f(0,5^2+x)\right)=xf(x)+f(0,5^2+x)=$$

$$=xf(x)+0,5f(0,5)+f\left(f\left(x\right)\right)=xf(x)+0,5f(0,5)+f\left(x\right).$$

Повертаючись до рівності (6.14), після перетворень дістаємо

$$f(x)=2\sqrt{0,5}f\left(\sqrt{0,5}\right)x+\sqrt{0,5}f\left(\sqrt{0,5}\right)-f(0,5).$$

Якщо $x=0,5$, то з останньої рівності визначаємо спочатку $f\left(\sqrt{0,5}\right)=\sqrt{2}f(0,5)$, а потім $f(x)=2f(0,5)x$. Для визначення $f(0,5)$ підставимо знайдену функцію у рівність (6.10). Після перетворень отримаємо

$$f(0,5)=2f^2(0,5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0,5)=0,\\ f(0,5)=0,5.\end{array}\right.$$

У першому випадку приходимо до рівності $f(x)=0$ для всіх x, яка суперечить умові задачі що до кількості розв'язків рівняння $f(x)=0$. Тому $f(0,5)=0,5$, а $f(x)=x$ – єдина шукана функція.

6.8. Знайдіть усі визначені на множині $(0;+\infty)$ функції $f(x)$ такі, що для будь-якого $x>0$ виконується нерівність $f(x)>0$ і при всіх $x>0$, $y>0$ справджується рівність

$$f\left(xf(y)\right)+f(x)+f(y)=f(x+y). \qquad (6.15)$$

(XLIV Всеукр. олімп. юн. матем., III етап, 11 кл., 2004 р.).

Розв'язання. З ланцюжка рівностей

$$f\left(xf(y)\right)+f(x)+f(y)=f(x+y)=f(y+x)=f\left(yf(x)\right)+f(y)+f(x)$$

дістаємо рівність

$$f\left(xf(y)\right)=f\left(yf(x)\right).$$

Оскільки функція $f(x)$ набуває тільки додатних значень, то нерівність $f(x+y) > f(x)$ виконується для всіх додатних x, y і означає, що функція зростає на множині додатних чисел. Тому отримана вище рівність виконується тільки тоді, коли

$$xf(y) = yf(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}.$$

Остання рівність, у якій ліва частина залежить від x, а права частина – від y, може виконуватися тільки за умови, що

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y} = c,$$

де $c > 0$ – деяка стала. Таким чином, якщо $f(x)$ шукана функція, то $f(x) = cx$. Перевіримо, чи задовольняє ця функція задану в умові задачі рівність, чи ні. Оскільки

$$f(xf(y)) + f(x) + f(y) = f(xcy) + cx + cy = c^2xy + cx + cy,$$
$$f(x+y) = c(x+y) = cx + cy,$$

то рівність (6.15) виконуватися не може, бо $c^2xy > 0$. Отже, не існує функцій, які б задовольняли всі умови задачі.

6.9. Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = \dfrac{1}{2}$ має принаймні один корінь та виконується рівність

$$f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6.16}$$

для всіх $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Визначити $f(-1)$.

(XXXVIII Всеукр. олімп. юн. матем., III етап, 11 кл., 1998 р.).

Розв'язання. Відокремимо змінні у даній рівності:

$$f(x) - f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(1 - f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = f(y)\left(1 - f\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Якщо $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \neq 1$ і $f\left(\dfrac{1}{y}\right) \neq 1$ для всіх $x \neq 0$ і $y \neq 0$, то

$$f(y) : \left(1 - f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = f(x) : \left(1 - f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = c,$$

де c – стала. З останньої рівності дістаємо $f(x)=c\left(1-f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Нехай a – корінь рівняння $f(x)=\frac{1}{2}$. Тоді, виконуючи заміни $x\to a$ і $x\to\frac{1}{a}$, отримаємо систему двох рівнянь, з якої визначимо c:

$$\begin{cases} f(a)=c\left(1-f\left(\frac{1}{a}\right)\right), \\ f\left(\frac{1}{a}\right)=c(1-f(a)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=c\left(1-f\left(\frac{1}{a}\right)\right), \\ f\left(\frac{1}{a}\right)=c\left(1-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad c=1.$$

Тому $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$, звідси $f(-1)=\frac{1}{2}$.

Нехай x_0 і y_0 такі, що $f\left(\frac{1}{x_0}\right)=1$ і $f\left(\frac{1}{y_0}\right)=1$. Тоді в рівності (6.16) покладемо $y=y_0$, а x залишимо довільним. Отримаємо рівність $f(y_0)=f(y_0)f\left(\frac{1}{x}\right)$, яка, зважаючи на те, що функція f не є сталою, буде виконуватися тільки тоді, коли $f(y_0)=0$. З рівностей $f\left(\frac{1}{y_0}\right)=1$, $f(y_0)=0$ випливає, що $y_0\neq -1$. Отже, умови задачі визначають тільки одну функцію f, означену в точці -1, і для неї $f(-1)=\frac{1}{2}$.

Зазначимо, що на складність розв'язування функціонального рівняння впливає не тільки залежність невідомої і відомих функцій у рівнянні, а й задані область визначення та область значень невідомої функції.

Розглянемо таке рівняння.

6.10. Знайдіть усі такі функції $f:(0;\infty)\to(0;\infty)$, що при всіх $x>0$ і $y>0$ справджується рівність

$$x^2\big(f(x)+f(y)\big)=(x+y)\,f\big(yf(x)\big). \qquad (6.17)$$

(Шоста відкр. фіз.-мат. олімп. Рішельєвського ліцею, Одеса, 2004 р.).

Розв'язання. У рівності (6.17) послідовно виконаємо три пари підстановок: $x=y=1$, $x=1,\ y=\frac{1}{f(1)}$ і $x=\frac{1}{f(1)},\ y=1$. Після тотожних перетворень маємо $f(1)=1$.

З рівності (6.17) дістаємо ланцюжок рівностей

$$\frac{f\big(yf(x)\big)}{x^2}=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}=\frac{f(y)+f(x)}{y+x}=\frac{f\big(xf(y)\big)}{y^2},$$

з якого маємо

$$y^2 f\big(yf(x)\big)=x^2 f\big(xf(y)\big).$$

Звідси для довільного $x>0$ і $y=1$ дістаємо

$$f\big(f(x)\big)=x^2 f(x).$$

Запишемо рівність (6.17) для довільного $x>0$ і $y=1$ та виконаємо перетворення, враховуючи здобуті рівності:

$$x^2\big(f(x)+f(1)\big)=(x+1)f\big(f(x)\big)\Rightarrow x^2\big(f(x)+1\big)=(x+1)x^2 f(x)\Rightarrow$$

$$f(x)+1)=(x+1)f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}.$$

Перевірка підтверджує правильність визначення шуканої функції.

Змінимо в задачі **6.10** область визначення і область значень шуканої функції. Нехай $D(g)=E(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ і функція g справджує рівність

$$x^2\big(g(x)+g(y)\big)=(x+y)g\big(yg(x)\big) \qquad (6.18)$$

для всіх $x\neq 0$ і $y\neq 0$.

Після заміни $y\to -x\neq 0$ з (6.18) маємо рівність $g(-x)=-g(x)$. Тому функція g – непарна.

У рівності (6.18) зробимо заміну $x\to -x$:

$$x^2\big(g(-x)+g(y)\big)=(-x+y)g\big(yg(-x)\big).$$

Враховуючи непарність функції g, маємо:

$$x^2\big(g(y)-g(x)\big)=(x-y)g\big(yg(x)\big). \qquad (6.19)$$

Якщо $x\neq \pm y$, то з рівностей (6.18) і (6.19) дістаємо

$$\frac{x^2\big(g(x)+g(y)\big)}{x+y}=g\big(yg(x)\big)=\frac{x^2\big(g(y)-g(x)\big)}{x-y}\Leftrightarrow (x-y)\big(g(x)+g(y)\big)=(x+y)\big(g(y)-g(x)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xg(x)=yg(y).$$

Здобута рівність справджуватимеся для всіх $x\neq 0$ і $y\neq 0$ за умови, що $xf(x)=c$, де c – деяка стала. Визначимо c, підставивши функцію $g(x)=\frac{c}{x}$ у рівність (6.18):

$$x^2\left(\frac{c}{x}+\frac{c}{y}\right)=(x+y)c\,\frac{x}{cy}\Rightarrow c=1.$$

Отже, функціональне рівняння (6.18) має єдиний розв’язок $g(x)=\frac{1}{x}$.

Таким чином, щоб використати рівняння (6.18) для розв’язання рівняння (6.17), досить утворити допоміжну функцію

$$g(x)=\begin{cases} f(x), \text{ якщо } x>0, \\ f(-x), \text{ якщо } x<0, \end{cases}$$

і розв'язати рівняння (6.18). Здобутий розв'язок на множині додатних чисел буде розв'язком рівняння (6.17).

Функція g називається продовженням функції f з множини усіх додатних чисел на множину чисел, відмінних від нуля,

Задачі для самостійного розв'язуванння

6.11. Знайдіть усі дійсні функції f і g дійсної змінної такі, що для всіх $x, y\in \mathbf{R}$ виконується рівність $\sin x+\cos y = f(x)+f(y)+g(x)-g(y)$.

6.12. Знайдіть усі пари $P(x), Q(x)$ многочленів ненульового степеня з дійсними коефіцієнтами, що для всіх x, y виконується рівність

$$\left(P(x)\right)^2+\left(Q(y)\right)^2=P(y^2)+Q(x^2).$$

Розв'яжіть функціональні рівняння:

6.13. $f(x+y)=f(x)+y,\ x, y\in \mathrm{R}$. **6.14.** $f(x+y)-f(x-y)=4xy$, $x, y\in \mathrm{R}$.

6.15. $f(x+y)+f(x)f(y)=f(x)f\left(f(y)\right)+f(xy)$, $x, y\in \mathrm{R}$.

6.16. $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$, $\quad x, y\in \mathrm{R}$. **6.17.** $f\left(x^y\right)=yf(x)$, $x\in \mathrm{R}_+$**,** $y\in \mathrm{R}$.

6.18. $x^2\left(f(x)+f(y)\right)=(x+y)f\left(yf(x)\right)$, $x, y\in \mathrm{R}$.

6.19. Знайдіть всі пари многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що для всіх x і y виконується рівність $f(xy)=f(x)+g(x)f(y)$.

6.20. Дійсні функції f і g дійсної змінної такі, що рівність

$$f\left(x+g(y)\right)=2x+y+5$$

виконується для всіх $x, y\in \mathrm{R}$. Обчисліть $f\left(2003+f(2004)\right)$, якщо $f(0)=2005$.

Відповіді

6.11. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{2}$, $g(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{2}+c$.

6.12. $P(x)=Q(x)=x^k$, $k\in\mathbf{N}$. **6.13.** $x+c$. **6.14.** x^2+c. **6.15**. c.

6.16. $f(x)=0$, $\quad f(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\neq 0, \\ c, \text{ якщо } x=0. \end{cases}$ **6.17.** $c\ln x$. **6.18.** $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\neq 0, \\ c, \text{ якщо } x=0. \end{cases}$

6.19. $f(x)=\left(1-x^n\right)c$ і $g(x)=x^n$, c – довільне дійсне число. **6.20**. 18037.

7. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА ДИСКРЕТНИХ МНОЖИНАХ

Вибір способу розв'язання функціонального рівняння залежить як від зв'язку відомих і невідомих функцій у рівнянні, так і від множини, на якій треба визначити шукану функцію, і множини, на якій функція повинна приймати свої значення. Розглянмо розв'язування функціональних рівнянь на дискретних множинах – множинах натуральних, цілих невід'ємних, цілих і раціональних чисел. При розв'язуванні рівнянь використовуватимо спосіб невизначених коефіцієнтів і спосіб підстановок, принцип крайнього і метод математичної індукції та інші прийоми.

7.1. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значення на цій самій множині. Для довільного числа n з цієї множини виконується рівність

$$f\left(f(n)\right)+f(n)=2n+3. \tag{7.1}$$

Знайти $f(1995)$.

(XXXV Всеукр. олімп. юн. матем., III етап, 1995 р., 11 кл.).

Розв'язання. Для відшукання невідомої функції скористаємось способом невизначених коефіцієнтів. Оскільки права частина рівняння є лінійною функцією, а над невідомою функцією f виконуються тільки дії утворення складеної функції і додавання, то логічно припустити, що f є лінійною функцією:

$$f(n)=an+b, \tag{7.2}$$

де a і b – невідомі коефіцієнти. Для їх визначення підставимо функцію (7.2) у рівність (7.1). Виконуючи тотожні перетворення, дістанемо рівність двох лінійних многочленів

$$(a^2+a)n+(ab+2b)=2n+3.$$

З рівності $a^2+a=2$ маємо $a=1$ і $a=-2$. При $a=-2$ функція набуває від'ємних значень, що суперечить умові задачі. Тому $a=1$.

З рівності $ab+2b=3$ знаходимо $b=1$.

Отже, $f(n)=n+1$, а $f(1995)=1996$.

Однак задачу не можна вважати розв'язаною повністю, бо не виключено існування інших функцій, для яких виконується рівність (7.1).

Припустимо, що така функція $g(n)$ існує. Тоді рівність

$$g\left(g(n)\right)+g(n)=2n+3 \tag{7.3}$$

виконується для всіх цілих невід'ємних n.

Спочатку з рівності $g\left(g(0)\right)+g(0)=3$ знайдемо $g(0)$. Зрозуміло, що $0\le g(0)\le 3$. Припустивши, що $g(0)=0$, отримаємо $0=3$. Тому $g(0)\ne 0$. Якщо

$g(0)=1$, то з рівності (7.3) дістанемо $g(1)=2$. Нескладно переконатися, що $g(0)\neq 2$ і $g(0)\neq 3$. Тому $g(0)=1$ і $f(0)=g(0)$.

Далі скористаємося очевидним твердженням: *серед будь-якої множини натуральних чисел завжди є найменше*. Це твердження називають *принципом крайнього*.

Нехай n_0 – найменше натуральне число, для якого $f(n_0)\neq g(n_0)$.

З рівностей (7.1) і (7.3) дістаємо рівність

$$f\left(f(n)\right)+f(n)=g\left(g(n)\right)+g(n), \qquad (7.4)$$

яка справджується для всіх цілих невід’ємних значень змінної n.

Якщо $n=n_0-1$, то з рівності

$$f\left(f(n_0-1)\right)+f(n_0-1)=g\left(g(n_0-1)\right)+g(n_0-1),$$

враховуючи, що $g(n_0-1)=f(n_0-1)=n_0$, дістаємо $f(n_0)=g(n_0)$. Здобута рівність суперечить припущенню. Тому $f(n)=n+1$ – єдина функція, яка задовольняє рівність (7.1), а $f(1995)=1996$ – єдиний розв’язок задачі.

Зауваження. З рівності (7.1) можна дістати рівності $f(0)=1$, $f(1)=2$ і методом математичної індукції довести, що функція $f(n)=n+1$ є розв’язком рівняння (7.1). Так, зокрема, зроблено в [5], с. 98. При цьому доведено, що $f(0)$ дорівнює тільки 1, $f(1)$ дорівнює тільки 2. При виконанні кроку індукції доведено, що $f(k+1)$ дорівнює $k+2$. Однак не доведено, що $f(k+1)$ не може набувати інших значень. Тому питання про єдиність шуканої функції залишилося відкритим. Задача ж вважається розв’язаною, якщо зайдено всі її розв’язки або доведено, що їх немає.

7.2. Функція $f:Z\to Z$ (Z – множина всіх цілих чисел) задовольняє такі умови:

1) $f\left(f(n)\right)=n$ для всіх цілих n;
2) $f\left(f(n+2)+2\right)=n$ для всіх цілих n;
3) $f(0)=1$.

Знайти значення $f(1995)$ та $f(-1994)$.

(І Сорос. олімп. з матем., 10 кл.).

Розв`язання. Знайдемо спочатку функцію f. Аналізуючи першу й другу умови задачі, приходимо до висновку, що її треба шукати серед лінійних функцій. Нехай $f(n)=an+b$, де a і b невизначені коефіцієнти. Враховуючи першу умову задачі, маємо $a^2n+(ab+b)=n$ для всіх $n\in$Z. Тому, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n, дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2=1, \\ ab+b=0, \end{cases}$$

яка має розв`язки $(1;0)$ і $(-1;b)$, де $b$ – довільне число. Одержані розв`язки дають можливість побудувати дві функції $f_1(n)=n$ і $f_2(n)=-n+b$, які задовольняють першу умову задачі. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що друга умова задачі для функції f_1 не виконується, а для функції f_2 вона виконується при будь-якому b. Цей коефіцієнт визначаємо з третьої умови: $b=1$. Отже, шуканою функцією є $f(n)=1-n$.

Доведемо, що на множині цілих чисел вона єдина. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує інша функція $g(n)$, яка задовольняє умови задачі. Тоді з умов 1) і 3) маємо, що $f(0)=g(0)=1,\ f(1)=g(1)=0$. Використовуючи першу і другу умови, дістанемо:

$$g(g(n))=g(g(n+2)+2)\Rightarrow g(g(g(n)))=g(g(g(n+2)+2))\Rightarrow$$
$$g(n)=g(n+2)+2. \qquad (7.5)$$

Нехай $n_0\geq 2$ – найменше натуральне число, для якого $f(n_0)\neq g(n_0)$.

Оскільки для функції $f(n)$ також виконується рівність (7.5), то

$$g(n_0-2)=g(n_0)+2\neq f(n_0)+2=f(n_0-2)\Leftrightarrow g(n_0-2)\neq f(n_0-2).$$

Одержана нерівність суперечить припущенню. Тому $g(n)=f(n)$ для всіх натуральних n.

Аналогічно доводиться, що функції f і g однакові на множині цілих від'ємних чисел. Для цього треба припустити, що $n_0\leq -1$ – найбільше ціле від'ємне число для якого $f(n_0)\neq g(n_0)$.

Отже, $f(n)=1-n$ – єдина функція на множині цілих чисел, яка визначається умовами задачі. Далі знаходимо $f(1995)=-1994,\quad f(-1994)=1995$.

Зауважим, що питання про єдиність розв'язку є суттєвим питанням, бо не кожне функціональне рівняння має єдиний розв'язок. Прикладом функціонального рівняння, яке має два розв'язки, є рівняння з наступної задачі.

7.3. Знайти усі такі функції $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$, що одночасно задовольняють такі три умови:

1) $f(1)=1;$

2) $f(n+2)+(n^2+4n+3)f(n)=(2n+5)f(n+1);$ (7.6)

3) $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ для будь-яких натуральних $m>n.$

(XLIV Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл.2004 р.).

Розв`язання. Поділимо обидві частини рівності (7.6) на $f(n)$:

$$\frac{f(n+2)}{f(n)}+n^2+4n+3=(2n+5)\frac{f(n+1)}{f(n)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\cdot\frac{f(n+1)}{f(n)}+n^2+4n+3=(2n+5)\frac{f(n+1)}{f(n)}. \qquad (7.7)$$

Утворимо нову невідому функцію $\varphi(n)=\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. Використовуючи введену функцію, рівність (7.7) запишемо так:

$$\varphi(n+1)\varphi(n)+n^2+4n+3=(2n+5)\varphi(n). \qquad (7.8)$$

Оскільки функція $\varphi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ повинна задовольняти рівність (7.8), то її можна способом невизначених коефіцієнтів шукати проміж лінійних функцій.

Нехай $\varphi(n)=an+b$. Для визначення коефіцієнтів a, b підставимо функцію $\varphi(n)=an+b$ у рівність (7.8) і виконаємо перетворення:

$$(a^2+1)n^2+(a^2+2ab+4)n+(b^2+ab+3)=2an^2+(5a+2b)n+5b.$$

Здобута рівність справджуватиметься для всіх натуральних чисел n за умови, що

$$\begin{cases} a^2+1=2a, \\ a^2+2ab+4=5a+2b, \\ b^2+ab+3=5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ 2b+5=5+2b, \\ b^2-4b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, \\ \left[\begin{array}{l} b=1, \\ b=3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отже, дві лінійні функції $\varphi_1(n)=n+1$ і $\varphi_2(n)=n+3$ є розв'язками функціонального рівняння (7.8).

Доведемо від супротивного, що рівняння (7.8) інших розв'язків не має. Припустимо, що деяка функція $g(n)$ є його розв'язком, і n_0 – найменше натуральне число, для якого $g(n_0) \neq \varphi_1(n_0)$. Оскільки $g(n)$ – розв'язок, то для всіх натуральних чисел n маємо рівність

$$g(n+1)g(n)+n^2+4n+3=(2n+5)g(n). \qquad (7.9)$$

Покажемо, що $n_0 \geq 2$. Для цього рівність (7.9) запишемо при $n=1$:

$$g(2)g(1)+8=7g(1) \Leftrightarrow (7-g(2))g(1)=8. \qquad (7.10)$$

Ліва частина рівності (7.10) є добутком натуральних чисел. Тому вона можлива тільки за таких умов:

$$\begin{cases} g(1)=1, \\ 7-g(2)=8; \end{cases} \begin{cases} g(1)=2, \\ 7-g(2)=4; \end{cases} \begin{cases} g(1)=4, \\ 7-g(2)=2; \end{cases} \begin{cases} g(1)=8, \\ 7-g(2)=1. \end{cases}$$

Підставляючи здобуті пари значень $g(1)$ і $g(2)$ в (7.8), переконуємося, що $g(1)=2$ або $g(1)=4$, тобто $n_0 \geq 2$.

Віднімемо від рівності (7.8) рівність

$$\varphi_1(n+1)\varphi_1(n)+n^2+4n+3=(2n+5)\varphi_1(n).$$

Маємо

$$g(n+1)g(n)-\varphi_1(n+1)\varphi_1(n)=(2n+5)g(n)-(2n+5)\varphi_1(n).$$

Запишемо здобуту рівність при $n=n_0-1$:

$$g(n_0)g(n_0-1)-\varphi_1(n_0)\varphi_1(n_0-1)=(2n_0+3)g(n_0-1)-(2n_0+3)\varphi_1(n_0-1).$$

Оскільки $g_1(n_0-1)=\varphi(n_0-1)=n_0 \geq 2$, то

$$g(n_0)g(n_0-1)-\varphi_1(n_0)\varphi_1(n_0-1)=0 \Leftrightarrow g(n_0)=\varphi_1(n_0).$$

Отримана рівність суперечить припущенню. Отже, $g(n_0) \neq \varphi_1(n_0)$ для $n_0 \geq 2$.

Аналогічно доводиться, що й $g(n_0) \neq \varphi_2(n_0)$ для $n_0 \geq 2$. Тому рівняння (7.8) має тільки два знайдені розв'язки.

Перейдемо до визначення функції $f(n)$. Оскільки $f(n) \in \mathrm{N}$, то

$$f(n+1) = \frac{f(n+1)}{f(n)} \cdot \frac{f(n)}{f(n-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(2)}{f(1)} \cdot f(1). \qquad (7.11)$$

Якщо $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = n+1$, то з рівності (7.11), враховуючи що $f(1)=1$, отримуємо $f(n+1) = (n+1)!$.

У випадку, коли $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = n+3$, маємо $f(n+1) = \dfrac{(n+3)!}{3!}$.

Отже, шуканими функціями є функції $f(n) = n!$ і $f(n) = \dfrac{(n+3)!}{3!}$.

7.4. Функція $f(n)$ визначена на множині натуральних чисел і задовольняє умову

$$f\big(f(n)\big) + f(n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{якщо } n - \text{непарне}, \\ 2n-1, & \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases} \qquad (7.12)$$

Знайти $f(1999)$.

(Квант. –1999. – №1; задача М1674).

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathrm{N}$, то складена функція $f(f(n))$ існуватиме тільки за умови, що $\mathrm{E}(f) = \mathrm{N}$, тобто $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$.

Шукану функцію визначимо методом математичної індукції.

Для $n=1$ і $n=2$ з (7.12) дістаємо рівності

$$\begin{cases} f(f(1)) + f(1) = 3, \\ f(f(2)) + f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1), f(2) \in \{1;\, 2\} \Rightarrow f(1) = 2,\ f(2) = 1.$$

Аналогічно для $n=3$ і $n=4$ маємо

$$\begin{cases} f(f(3)) + f(3) = 7, \\ f(f(4)) + f(4) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(3), f(4) \in \{1;\, 2;\, \ldots;\, 6\}.$$

Якщо $f(3)=1$, то $f(f(3) + f(3) = f(1) + 1 = 2 + 1 = 3 \neq 7$. У випадку, коли $f(4)=1$, також дістаємо нерівність $f(f(4)) + f(4) = f(1) + 1 = 3 \neq 7$. Шляхом подібних підрахунків переконуємося, що здобуті рівності виконуються тільки тоді, коли $f(3) = 4$ і $f(4) = 3$.

Утворимо функцію $f(n) = n - (-1)^n$. Вона справджує рівність (7.12) при $n = 1, 2, 3, 4$ Припустимо, що здобута функція справджує цю рівність при $n = 5, \ldots, k$. Доведемо, що при $n = k+1$ функція $f(n) = n - (-1)^n$ також справджує рівність (7.12).

$$f(f(k+1)) + f(k+1) =$$

$$= f\Big((k+1) - (-1)^{(k+1)}\Big) + (k+1) - (-1)^{(k+1)} = (k+1) - (-1)^{(k+1)} - (-1)^{(k+1)-(-1)^{(k+1)}} + (k+1) - (-1)^{(k+1)} =$$

$$= 2(k+1) - (-1)^{(k+1)} = \begin{cases} 2(k+1)+1, \text{ якщо } (k+1) - \text{непарне}, \\ 2(k+1)-1, \text{ якщо } (k+1) - \text{парне}, \end{cases}$$

бо $(-1)^{(k+1)} + (-1)^{(k+1)-(-1)^{(k+1)}} = 0$.

Отже, згідно з методом математичної індукції, $f(n)=n-(-1)^n$ є шуканою функцією. Для того, щоб стверджувати, що ця функція єдина, виконуючи крок індукції, потрібно було довести, що інших значень, крім здобутих, (так як це зроблено при встановлені бази індукції) функція f не може мати.

Доведемо єдиність від супротивного, використовуючи метод крайнього.

Нехай існує функція $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ така, що:

1) $$g(g(n))+g(n)=\begin{cases}2n+1, & \text{якщо} \quad n-\text{непарне},\\ 2n-1, & \text{якщо} \quad n-\text{парне}.\end{cases} \qquad (7.13)$$

2) $$g(n)\neq f(n).$$

Припустимо, що n_0 – найменше натуральне число, для якого виконується нерівність $f(n_0)\neq g(n_0)$. Нескладно переконатися, що $n_0\geq 3$.

З рівностей (7.12) і (7.13) дістаємо рівність
$$f(f(n))+f(n)=g(g(n))+g(n),$$
яка виконується для всіх $n\in\mathrm{N}$, зокрема й для n_0-1:
$$f(f(n_0-1))+f(n_0-1)=g(g(n_0-1))+g(n_0-1). \qquad (7.14)$$

Оскільки $g(n_0-1)=f(n_0-1)=n_0-1-(-1)^{n_0-1}=n_0$, якщо n_0 – парне, то з рівності (7.14) дістаємо рівність $f(n_0)=g(n_0)$, яка суперечить припущенню. Тому для всіх парних натуральних чисел $f(2k)=g(2k)$.

Нехай $n=2k, k\in\mathrm{N}$. За доведеним $g(2k)=f(2k)=2k-(-1)^{2k}=2k-1$. Тому з рівності $f(f(2k))=g(g(2k))$ дістаємо рівність $g(2k-1)=f(2k-1)$, яка справджується для всіх $k\in\mathrm{N}$.

Отже, $f(n)=n-(-1)^n$ – єдина шукана функція, а $f(1999)=2000$.

7.5. Знайдіть усі такі функції $f:\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$, що:

1) для довільних цілих чисел x,y $f(x+f(x+2y))=f(2x)+f(2y)$;

2) $f(0)=2$.

(XL Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 11 кл., 2010 р.).

Розв’язання. Методом невизначених коефіцієнтів легко встановити, що
$$f(x)=x+2.$$

Припустимо, що функція $g(x), g(x)\neq x+2,$ також розв’язок задачі. Тоді $g(0)=2$,
$$g(x+g(x+2y))=g(2x)+g(2y) \text{ для довільних } x,y\in\mathrm{Z} \qquad (7.15)$$

Доведемо від супротивного, що $g(x)=x+2$ для всіх $x\in\mathrm{N}$. Припустимо, що $n_0>0$ – найменше натуральне число, для якого
$$g(x)=x+2,\ x=0,1,\ldots,2n_0-1,$$
$$g(2n_0)\neq 2n_0+2.$$

Покладемо в рівності (7.15) $x=n_0-1, y=0$:
$$g(n_0-1+g(n_0-1))=g(2n_0-2)+g(0).$$

З урахуванням припущення дістаємо рівність $g(2n_0)=2n_0+2$, яка суперечить припущенню. Тому $g(x)=x+2$ для всіх парних натуральних чисел.

Аналогічно доводиться це твердження й для всіх парних від'ємних чисел.

Зупинимося на множині непарних чисел. Припустимо, що існує непарне число n, для якого $g(n)$ – парне. Візьмемо непарне число $x=n-g(n)$ і виберемо число y так, щоб $x+2y=n$. Тоді з рівності (7.15) дістанемо

$$g(n-g(n)+g(n))=g\big(2(n-g(n))\big)+g(n-x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(n)=-g(n)+2n=4\Leftrightarrow g(n)=n+2.$$

Здобута рівність суперечить припущенню – парне число не дорівнює непарному. Тому для будь-якого непарного аргументу функція g набуває тільки непарне значення.

Нехай x – непарне число, а $y=0$. Тоді з рівності (7.15) дістаємо $g(x)=x+2$.

Отже, для всіх цілих значень змінної x маємо $g(x)=x+2$.

Єдиність розв'язку $f(x)=x+2$ задачі доведено.

У наведених задачах принцип крайнього використовувався для дослідження кількості розв'язків рівняння. У наступній задачі використаємо його для дослідження існування розв'язків.

7.6. Чи існує функція $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ така, що рівність

$$f(n)=f\big(f(n-1)\big)+f\big(f(n+1)\big) \qquad (7.16)$$

виконується для всіх $n=2,3,\ \dots$?

(XXIII Всесоюзна олімп. з матем., 10 кл., 1989 р.).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Оскільки її значення – натуральні числа, то при деякому натуральному n_0 вона набуває свого найменшого значення $m_0\ge 1$:

$$f(n)\ge f(n_0)=m_0 \quad \forall n\in\mathrm{N}. \qquad (7.17)$$

Якщо $n_0>1$, то з рівності (7.16), враховуючи (7.17), отримуємо нерівність

$$m_0=f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1))\ge m_0+m_0=2m_0,$$

яка не може виконуватися при додатних m_0. Якщо ж $n_0=1$, то проміж чисел $f(2), f(3),\dots$ виберемо найменше $m_1=f(n_1)\ge m_0, n_1\ge 2$. Тоді при $n=n_1$ з рівності (7.16) дістанемо хибне співвідношення

$$m_1=f(n_1)=f(f(n_1-1))+f(f(n_1+1))\ge m_1+m_1=2m_1.$$

Отже функції, яка б задовольняла умови задачі, не існує.

7.7. Знайдіть усі функції f, визначені на множині усіх цілих чисел Z, які приймають цілі значення і для буь-яких $m,n\in Z$ задовольняють рівність

$$f\big(m+f\big(f(n)\big)\big)=f(m)+n. \qquad (7.18)$$

(VII Сорос. ол. з матем., 11 кл.).

Розв'зання. Спочатку визначимо значення шуканої функції у точці 0. Для цього в рівності (7.18) візьмемо $m=n=0$. Маємо $f\big(f\big(f(0)\big)\big)=f(0)$.

Нехай $f(0)=a$. Тоді $f\big(f(a)\big)=a$.

Для довільного цілого числа m і $n=a$ з рівності (7.18) дістаємо

$$f(m+f(f(a)))=f(m)+a\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(m+a)=f(m)+a.$$

Покладемо у здобутій рівності $m=-a$. Маємо $f(-a)=0$.

З рівності (7.18) при довільному m і $n=-a$ дістаємо $f(m+a)=f(m)-a$.

Оскільки $f(m+a)=f(m)+a$, то $a=0$. Отже, $f(0)=0$.

З рівності (7.18) при $m=0$ дістаємо $f(f(f(n)))=n$. Після виконання заміни $n\to f(k)$ з (7.18) маємо рівність

$$f(m+f(f(f(k))))=f(m)+f(k)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(m+k)=f(m)+f(k). \qquad (7.19)$$

Якщо в рівності (7.19) послідовно замінити k на $m, 2m, ..., (n-1)m$, то дістанемо рівності $f(2m)=2f(m),\ f(3m)=3f(m), ...,\ f(nm)=nf(m)$, з яких випливає, що $f(n)=cn,$ де $c=f(1)$. $n=2,3,...$.

Для визначення c підставимо здобуту функцію в рівність (7.18):

$$cm+c^3n=cm+n\Rightarrow c=1.$$

Тому $f(n)=n$ – єдина функція, що справджує рівність (7.18) на множині натуральних чисел.

При $m=-k, k\in N$, з (7.19) маємо $f(0)=f(-k)+f(k)$ або $f(-k)=-f(k)$.

Отже, $f(n)=n$ – єдина функція, що справджує рівність (7.18) на множині цілих чисел.

7.8. Знайдіть усі функції f: X→R , які для будь-яких чисел $x, y\in$ R задовольняють рівняння

$$f(x+y)+f(xy-1)=(f(x)+1)(f(y)+1), \qquad (7.20)$$

якщо множина **X** є множиною:

а) усіх цілих чисел;

б) усіх раціональних чисел.

(XLVII Всеукр. олімп. юн. матем., IV етап, 10 кл., 2007 р.).

Розв'язання. а) Нехай f – розв'язок рівняння. Тоді за умов, що $x=y=0$ і $x=0, y=-1$, отримаємо систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими $u=f(-1), v=f(0)$:

$$\begin{cases} u+v=(v+1)^2, \\ 2u=(u+1)(v+1), \end{cases}$$

з якої знаходимо $u=1, v=0$, тобто $f(-1)=1,\ f(0)=0.$

Якщо $x=y=-1$ і $x=1, y=-1,$ то відповідно маємо $f(-2)=4$ і $f(1)=1.$

Далі для довільного натурального числа n за умови, що $y=1,$ отримуємо рекурентну формулу

$$f(n+1)=2f(n)-f(n-1)+2. \qquad (7.21)$$

Легко переконатися, що $f(2)=4, f(3)=9.$ Тому напрошується припущення, що $f(n)=n^2.$ Доведемо методом математичної індукції, що це дійсно так. Оскільки база індукції виконується, що встановлено вище, то виконаємо крок індукції, використовуючи рекурентну формулу (7.21):

$$f(n+1)=2n^2-(n-1)^2+2=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Отже, $f(n)=n^2$ для всіх $n\in\mathbf{N}$.

Враховуючи, що $f(-1)=1, f(-2)=4$, і використовуючи формулу (7.21), яку запишемо так:

$$f(n-1)=2f(n)-f(n+1)+2,$$

встановлюємо, $f(n)=n^2$ для всіх цілих від'ємних чисел n.

Об'єднуючи отримані результати, приходимо до висновку, що $f(n)=n^2$ для всіх цілих чисел n.

Пропонуємо довести самостійно, що ця функція єдина на множині цілих чисел.

б) Нехай k і n –довільні цілі числа, відмінні від нуля. Використовуючи три пари підстановок $x=kn, y=\frac{k}{n};\quad x=kn, y=kn+\frac{k}{n};\quad x=2kn, y=\frac{k}{n},$ дітанемо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} f\left(kn+\frac{k}{n}\right)+f\left(k^2-1\right)=\left(f(kn)+1\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+1\right),\\ f\left(2kn+\frac{k}{n}\right)+f\left(k^2+kn-1\right)=\left(f(kn)+1\right)\left(f\left(kn+\frac{k}{n}\right)+1\right),\\ f\left(2kn+\frac{k}{n}\right)+f\left(2k^2-1\right)=\left(f(2kn)+1\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+1\right). \end{cases}$$

Звідси, враховуючи означення функції f на множині цілих чисел, маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} f\left(kn+\frac{k}{n}\right)+\left(k^2-1\right)^2=\left((kn)^2+1\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+1\right),\\ f\left(2kn+\frac{k}{n}\right)+\left(k^2+kn-1\right)^2=\left((kn)^2+1\right)\left(f\left(kn+\frac{k}{n}\right)+1\right),\\ f\left(2kn+\frac{k}{n}\right)+\left(2k^2-1\right)^2=\left((2kn)^2+1\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+1\right), \end{cases}$$

з якої знаходимо $f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{n}\right)^2.$

Отже, єдиним розв'язком рівняння (7.20) на множині раціональних чисел може бути тільки функція $f(x)=x^2$.

Перевіркою переконуємося, що $f(x)=x^2$ – розв'язок рівняння (7.20).

Задачі для самостійного розв'язування

7.9. Знайти всі функції $f:N\to N$, для яких

$$f\left(f(n)\right)+\left(f(n)\right)^2=n^2+3n+3.$$

7.10. Функція f відображує множину натуральних чисел на множину натуральних чисел і рівність $f(f(n))+f(m)=m+n$ виконується для всіх натуральних m і n. Знайдіть $f(2004)$ та всі такі натуральні числа n, для яких $f(n)+2n=2004$.

7.11. Знайдіть всі функції $f:N\to N$, такі, що:

а) $f(1)=1$;

б) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ для всіх $x,y\in N$.

7.12. Функція $f:R\to R$ для будь-яких $x,\ y\in R$ задовольняє рівність

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,\ \text{а}\ f(1)=2.$$

Знайдіть: *а*) $f(n)$ для $n\in Z$;   *б*) $f\left(\frac{k}{n}\right)$ для $\frac{k}{n}\in Q$.

7.13. Нехай $\boldsymbol{Q}^+$ – множина додатних раціональних чисел. Знайдіть всі функції $f:\boldsymbol{Q}^+\to\boldsymbol{Q}^+$, які для кожного $x\in\boldsymbol{Q}^+$ задовольняють умовам:

1) $f(x+1)=f(x)+1$;

2) $f(x^2)=\left(f(x)\right)^2$.

7.14. Функція f визначена на множині натуральних чисел і набуває натуральних значень. Чи випливає із справедливості рівності

$$f(n+k)=f\left(f(n)+f(k)\right)$$

для будь-яких $n,k\in N$ те, що завжди $f(n+k)=f\left(n+f(k)\right)$?

Відповіді

7.9. $n+1$. **7.10.** 2004 і 664. **7.11.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **7.12.** а) $f(n)=n+1$; б) $f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}+1$. **7.13.** x. **7.14.** Ні, не випливає.

8. МЕТОД КОШІ

Цей метод використовують для відшукання неперервних розв'язків функціональних рівнянь з вільними змінними. Розробив його на початку XIX століття видатний французький математик Коші, розв'язуючи рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

яке також називають його іменем – рівняння Коші.

Суть методу Коші полягає в тому, що пошук неперервної функції f, яка є розв'язком функціонального рівняння, ведеться поетапно. Насамперед припускається, що шукана функція справджує задану рівність, і за допомогою вдало дібраних підстановок ця функція визначається спочатку на множині натуральних чисел, потім – на множині цілих чисел і далі – на множині раціональних чисел. Після цього граничним переходом функцію визначають на множині ірраціональних чисел. Результатом пошуків є формула, яка визначає шукану функцію на заданій у задачі множині. Завершується розв'язання обов'язковою перевіркою того, що знайдена функція справджує умови задачі.

Проілюструємо застосування методу Коші під час розв'язування наступних задач. Насамперед розглянемо розв'язання рівняння Коші.

8.1. Знайти всі неперервні в проміжку $(-\infty;+\infty)$ функції $f(x)$, які задовольняють умову

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{8.1}$$

Розв`язання. Замінюючи поступово y на $x, 2x, \ldots, (n-1)x$, дістаємо:

$$f(nx)=nf(x). \tag{8.2}$$

Якщо покладемо $x=1$ і позначимо $f(1)=c$, то маємо рівність

$$f(n)=cn, \tag{8.3}$$

яка визначає функцію f на множині натуральних чисел. Візьмемо $x=y=0$. Тоді з (8.1) одержимо, що $f(0)=2f(0)$, тобто $f(0)=0$. Якщо тепер в (8.1) візьмемо $x=n$, а $y=-n$, то враховуючи (8.3), дістаємо, що $f(-n)=c(-n)$. Таким чином, доходимо висновку, що рівність (8.3) визначає шукану функцію не тільки на множині натуральних чисел, а й на множині всіх цілих чисел.

Покладаючи в рівності (8.2) $x=\frac{1}{n}$, маємо:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=c\cdot\frac{1}{n}. \tag{8.4}$$

Якщо ж $x=\frac{1}{k}$, де $k\in N$, то з рівності (8.2), враховуючи (8.4), дістаємо рівність

$$f\left(\frac{n}{k}\right)=c\cdot\frac{n}{k},$$

яка задає функцію f на множині додатних раціональних чисел.

Легко переконатися, що ця рівність визначає функцію f і на множині від`ємних раціональних чисел – для цього досить у рівності (8.1) взяти $x=\frac{n}{k}$, а $y=-\frac{n}{k}$ і зробити очевидні перетворення.

Отже, на множині раціональних чисел функція f визначається так:
$$f(x) = cx, x \in Q.$$

Нехай тепер $x = \alpha$ – ірраціональне число. Візьмемо послідовність (r_n^-) десяткових наближень r_n^- числа α з недостачею (можна взяти послідовність (r_n^+) десяткових наближень з надлишком). Тоді, по-перше, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^- = \alpha$, по-друге, $f(r_n^-) = cr_n^-$. Оскільки за умовою функція f неперервна, то
$$\lim_{n\to\infty} f(r_n^-) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n^-\right).$$
Тому
$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n^-\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n^-) = \lim_{n\to\infty}(cr_n^-) = c\alpha,$$
тобто $f(\alpha) = c\alpha$.

Перевіркою переконуємося, що функції $f(x) = cx$, де c – довільне число, є розв'язками рівняння Коші.

8.2. Функція f визначена і неперервна на множині дійсних чисел R і задовольняє дві умови:

а) $f(1) = 1$;

б) $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x) + f(y)$ для всіх $x, y \in R$. (8.5)

Знайти f.

(Матем. в шк., РФ. – 1991. –№5; задача 3611).

Розв'язання. Якщо $x = y = 0$, то $f(0) = f(0) + f(0)$, а тому $f(0) = 0$. Для $y = 0$ і довільного $x \in R$ отримуємо
$$f(|x|) = f(x).$$

Якщо $y = x$, то маємо рівність:
$$f(\sqrt{2}|x|) = 2f(x).$$

Припустимо, що рівність
$$f(\sqrt{n}|x|) = nf(x) \qquad (8.6)$$
виконується для $n > 2$ і довільних $x \in R$. Тоді
$$f\left(\sqrt{n+1}|x|\right) = f\left(\sqrt{nx^2 + x^2}\right) = f\left(\sqrt{\left(\sqrt{n}|x|\right)^2 + x^2}\right) = f\left(\sqrt{n}|x|\right) + f(x) =$$
$$= nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Здобутий результат дає можливість на підставі методу математичної індукції стверджувати, що рівність (8.6) виконується для всіх $n \in N$ і $x \in R$.

Оскільки, за рівністю (8.5),
$$f(-x) = \frac{1}{n} f\left(\sqrt{n}|-x|\right) = \frac{1}{n} f\left(\sqrt{n}|x|\right) = f(x),$$
то шукана функція – парна, а тому достатньо розглядати її тільки для $x > 0$.

Виконуючи в рівності (8.5) заміну $x \to x\sqrt{n}$, дістанемо
$$f(nx) = n^2 f(x).$$
Із здобутої рівності для $x = 1$ маємо рівність

$$f(n)=n^2,$$
яка визначає функцію f на множині цілих додатних чисел, а враховуючи її парність, – і на множині цілих чисел.

Нехай n – ціле, а k – натуральне число. Тоді

$$n^2 = f(n) = f\left(k\cdot\frac{n}{k}\right)=k^2 f\left(\frac{n}{k}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right)=\left(\frac{n}{k}\right)^2.$$

Таким чином, на множині раціональних чисел шукана функція визначається формулою:

$$f(r)=r^2,\quad r\in Q. \tag{8.7}$$

Далі, використовуючи граничний перехід, встановимо, що на множині ірраціональних чисел, а отже, і на всій множині дійсних чисел шукана функція задається формулою

$$f(x)=x^2. \tag{8.8}$$

Нехай x – довільне ірраціональне число, (r_n) – послідовність раціональних чисел, що збігається до цього числа. (Зокрема, це може бути послідовність десяткових наближення з недостачею або з надлишком). Тоді, оскільки $x=\lim\limits_{n\to\infty} r_n$, $f(r_n)=r_n^{\ 2}$ і f – неперервна функція, маємо:

$$f(x)= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n^{\ 2}=\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)^2=x^2,$$

тобто ми дістали рівність (8.8).

Таким чином, якщо функція f справджує рівність (8.5), то для всіх x з множини дійсних чисел вона задається формулою (8.8).

Переконаємося, що знайдена функція задовольняє умови задачі:

а) $f(1)=1^2=1$, *б*) $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2=f(x)+f(y)$.

Отже, розв'язком функціонального рівняння (8.5), який задовольняє умову $f(1)=1$, є функція (5.5).

8.3. Знайти всі неперервні функції $f:(1;+\infty)\to R,$ які задовольняють рівність

$$f(xy)=xf(y)+yf(x) \tag{8.9}$$

для всіх $x>1, y>1$.

Розв'язання. Нехай функція f задовольняє задану рівність. Тоді

$$f(a^2)=2af(a),$$

якщо $x=y=a>1$;

$$f(a^3)=af(a^2)+a^2 f(a)=2a^2 f(a)+a^2 f(a)=3a^2 f(a),$$

якщо $x=a,\ y=a^2$.

Нехай

$$f(a^n)=na^{n-1}f(a),\ n\ge 2 \text{ – ціле число.} \tag{8.10}$$

Тоді $$f(a^{n+1}) = f(a\cdot a^n) = af(a^n) + a^n f(a) = a\cdot na^{n-1} f(a) + a^n f(a) =$$
$$= na^n f(a) + a^n f(a) = (n+1)a^n f(a).$$

За принципом математичної індукції рівність (8.10) має місце для всіх цілих $n \ge 2$, якщо $a > 1$. Для $n = 1$ рівність (8.10) очевидна.

Нехай $k \in N$. Тоді
$$f(a^n) = f\left(\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{kn}\right) = kn\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{kn-1} f\left(a^{\frac{1}{k}}\right).$$

Враховуючи рівність (8.10), маємо
$$na^{n-1} f(a) = kn\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{kn-1} f\left(a^{\frac{1}{k}}\right).$$

Звідси
$$f\left(a^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{k} a^{\frac{1}{k}-1} f(a), \quad a > 1, k \in N. \tag{8.11}$$

Для натуральних k, n, використовуючи рівності (8.10) і (8.11), дістаємо:
$$f\left(a^{\frac{n}{k}}\right) = f\left(\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{n}\right) = n\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{n-1} f\left(a^{\frac{1}{k}}\right) = na^{\frac{1}{k}(n-1)}\cdot\frac{1}{k} a^{\frac{1}{k}-1} f(a) = \frac{n}{k} a^{\frac{n}{k}-1} f(a).$$

Оскільки $\frac{n}{k}$ – додатне раціональне число, то
$$f\left(a^r\right) = ra^{r-1} f(a) \tag{8.12}$$
для додатних раціональних чисел r і дійсних чисел $a > 1$.

Якщо t – додатне ірраціональне число, то для нього знайдеться послідовність додатних раціональних чисел (r_n) така, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = t$. Тоді, враховуючи неперервність показникової функції, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^t$. За умовою задачі функція f неперервна. Тому
$$f(a^t) = f\left(\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(a^{r_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(r_n a^{r_n-1} f(a)\right) =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\right)\cdot\frac{f(a)}{a} = ta^t\,\frac{f(a)}{a}.$$

Отже, $$f(a^t) = ta^t\,\frac{f(a)}{a},$$
якщо t – ірраціональне, а враховуючи рівності (8.10), (8.12), і для всіх дійсних додатних чисел. Звідси, увівши заміну $a^t = x$ і позначення $\frac{f(a)}{a} = c$, дістанемо формулу
$$f(x) = cx\log_a x, \tag{8.13}$$
яка для $a > 1$ визначає функцію f на проміжку $(1;+\infty)$.

Перевіркою переконуємося, що функції (8.13), де c – довільна стала, справджують задану рівність.

8.4. Знайти всі неперервні функції $f: R_+ \to R_+$, для яких

$$f\left(x^y\right) = f(x)^{f(y)}. \qquad (8.14)$$

(XIX Всерос. матем. ол. шк., 1993 р.).

***Розв`язання.*** Якщо $y = 1$, а $x$ – довільне, то з рівності $f(x) = f(x)^{f(1)}$ випливає, що або $f(x) = 1$ для всіх $x \in R_+$, або $f(1) = 1$. Очевидно, що функція $f(x) = 1$ є розв`язком рівняння (8.14).

Шукаємо функції f, які не дорівнюють тотожно 1, але такі, для яких $f(1) = 1$.

Для $y = ab$ з (8.14) маємо рівність

$$f(x)^{f(ab)} = f(x^{ab}) = f\left((x^a)^b\right) = f(x^a)^{f(b)} = \left(f(x)^{f(a)}\right)^{f(b)} = f(x)^{f(a)f(b)},$$

з якої випливає, що

$$f(ab) = f(a)f(b). \qquad (8.15)$$

Замінюючи послідовно b на $a, a^2, \ldots, a^{n-1}$, дістаємо:

$$f(a^n) = f^n(a).$$

Оскільки $f(a) = f\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = f^n\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$, то $f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = f^{\frac{1}{n}}(a)$,

а

$$f\left(a^{\frac{k}{n}}\right) = f^{\frac{k}{n}}(a), \quad k, n \in N\ . \qquad (8.16)$$

Враховуючи рівність (8.16) і рівність (8.14), в якій $x = a$ і $y = \dfrac{k}{n}$, маємо:

$$f^{\frac{k}{n}}(a) = f\left(a^{\frac{k}{n}}\right) = f(a)^{f\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Звідси дістаємо формулу:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n},\ \ k, n \in N\ , \qquad (8.17)$$

яка визначає функцію f на множині додатних раціональних чисел.

Нехай $x = \alpha$ – додатне ірраціональне число, а (r_n) – деяка послідовність додатних раціональних чисел, яка збігається до α: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Оскільки $f(r_n) = r_n$ і f – неперервна, то

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = \alpha.$$

Тому $f(x) = x$ для всіх $x \in R_+$.

Зауважимо, що рівність $f(\alpha) = \alpha$, де α – додатне ірраціональне число, можна довести, не вдаючись до граничного переходу і не використовуючи неперервність функції f.

Припустимо, що $f(\alpha) \neq \alpha$. Тоді $f(\alpha) < \alpha$ або $f(\alpha) > \alpha$. У першому випадку знайдеться таке раціональне число r, що $f(\alpha) < r < \alpha$. При цьому, враховуючи рівності (8.15), (8.17), (8.14) й умову $f(x) > 0$, одержимо суперечливу нерівність:

$$f(\alpha) = f\left(r \cdot \frac{\alpha}{r}\right) = f(r) f\left(\frac{\alpha}{r}\right) = rf\left(\frac{\alpha}{r}\right) = rf\left(10^{\lg\frac{\alpha}{r}}\right) = rf(10)^{f\left(\lg\frac{\alpha}{r}\right)} = r \cdot 10^{f\left(\lg\frac{\alpha}{r}\right)} > r.$$

Нехай $f(\alpha) > \alpha$. Тоді для раціонального числа r такого, що $\alpha < r < f(\alpha)$, знову маємо суперечливу нерівність $f(\alpha) < r$:

$$r = rf(1) = rf\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = rf(\alpha) f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = rf(\alpha) f\left(\frac{r}{\alpha} \cdot \frac{1}{r}\right) =$$

$$= rf(\alpha) f\left(\frac{1}{r}\right) f\left(\frac{r}{\alpha}\right) = f(\alpha) f\left(10^{\lg\frac{r}{\alpha}}\right) = f(\alpha) f(10)^{f\left(\lg\frac{r}{\alpha}\right)} = f(\alpha) \cdot 10^{f\left(\lg\frac{r}{\alpha}\right)} > f(\alpha).$$

Отже, $f(\alpha) = \alpha$ для ірраціонального числа α. Тому умова неперервності шуканої функції f не є необхідною.

8.5. Знайдіть усі функції $f : R \to R$, які неперервні в точці $x = 0$ і задовольняють рівняння

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy. \tag{8.18}$$

([6], задача 33).

Розв'язання. Нехай f – розв'язок рівняння. Виконуючи в рівності (8.18) послідовно заміни $y \to x, y \to 2x, y \to 3x$ дістанемо рівності

$$f(2x) = 2f(x) + x^2,$$
$$f(3x) = 3f(x) + 3x^2,$$
$$f(4x) = 4f(x) + 6x^2.$$

Оскільки $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, $3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$, $6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$, то напрошується висновок, що

$$f(nx) = nf(x) + \frac{(n-1)n}{2} x^2 \tag{8.19}$$

для довільного $x \in R$ і $n = 1, 2, 3, \ldots$. Його легко довести методом математичної індукції.

Якщо $x = 1$, то з (8.19) дістаємо формулу

$$f(n) = an + \frac{(n-1)n}{2},\ a = f(1), \tag{8.20}$$

яка задає шукану функцію на множині натуральних чисел.

Поклавши в рівності (8.18) $x = y = 0$, дістанемо $f(0) = 0$.

Якщо $x = n$, а $y = -n$, то з рівності (8.18) маємо:

$$f(0) = f(n) + f(-n) - n^2 \Rightarrow f(-n) = -f(n) - n^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(-n) = a(-n) + \frac{(-n-1)(-n)}{2}.$$

Здобута формула разом з рівністю $f(0) = 0$ і формулою (8.20) задає шукану функцію на множині всіх цілих чисел:

$$f(n) = an + \frac{(n-1)n}{2},\ a = f(1),\ n \in Z.$$

Щоб визначити функцію на множині раціональних чисел, спочатку покладемо в рівності (8.19) $x = \frac{1}{n}$, $n \in Z \setminus \{0\}$:

$$f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=a\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdot\frac{1}{n} \qquad (8.21)$$

а потім $x=\dfrac{1}{k}$, $k\in Z\setminus\{0\}$, і враховуючи здобуту рівність, дістанемо:

$$f\left(n\cdot\frac{1}{k}\right)=nf\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right)=a\cdot\frac{n}{k}+\frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{n}{k}-1\right). \qquad (8.22)$$

Підсумовуючи зроблене, доходимо до висновку, що на множині раціональних чисел шукана функція задається формулою

$$f(r)=ar+\frac{r(r-1)}{2}.$$

Доведемо, що функція f неперервна на всій множині дійсних чисел. Для цього скористаємося означенням неперервності на мові приростів: *функція називається неперервною в точці, якщо нескінченно малому приросту аргумента в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.$$

Нехай $x\neq 0$ довільна точка, Δx – приріст аргумента, $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ – приріст функції. Якщо $\Delta x=y$, то з (8.18) маємо $\Delta f(x)=f(y)+xy$. Оскільки функція f неперервна в точці 0, то $\lim\limits_{y\to 0}f(y)=0$, а тому

$$\lim_{y\to 0}\Delta f(x)=\lim_{y\to 0}\big(f(y)+xy\big)=\lim_{y\to 0}f(y)+\lim_{y\to 0}xy=0.$$

Отже, функція f неперервна в будь-якій точці числової прямої.

Визначимо шукану функцію в ірраціональних точках.

Нехай $x=\alpha$ – довільне ірраціональне число, а (r_n) – деяка послідовність раціональних чисел, яка збігається до α: $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$. Оскільки $f(r_n)=ar_n+\dfrac{r_n(r_n-1)}{2}$ і f – неперервна, то використовуючи властивості границі, дістанемо

$$f(\alpha)=f\left(\lim_{n\to\infty}r_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}\left(ar_n+\frac{r_n(r_n-1)}{2}\right)=a\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.$$

Таким чином, функція $f(x)=ax+\dfrac{x(x-1)}{2}$ визначена і неперервна на множині R. Вона справджує рівняння (8.18) при будь-якому a і всіх дійсних x та y.

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти неперервні функції $f:X\to R$, які задовольняють рівняння

8.6. $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$ для всіх $x,y\in X$, якщо $X=R$.

8.7 $f(x+y)=a^x f(y)+a^y f(x)$, де $a>0, a\neq 1$, для всіх $x,y\in X$, якщо $X=R$.

8.8 $f(x+y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ для всіх $x,y\in X$, якщо $X=(0;+\infty)$.

Відповіді 8.6. $cx+\dfrac{x^3}{3}$. **8.7.** $xa^{x-1}c$. **8.8.** $\dfrac{c}{x}$. c – довільна стала

Використана і рекомендована література

1. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. – К.: Выща шк., 1983.

2. Вороний О. М., Готуємось до олімпіад з математики. – Харків: Основа, 2008.

3. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі Міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Львів. Євросвіт, 1999.

4. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – Санкт-Петербург: Лань, 1997.

5. Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С., Функційні рівняння. – Львів: ЛДУ, 1998.

6. Ясінський В.А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. – Харків: Основа, 2005.

7. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения и группы // Квант. – 1985. – №7.

8. Бродський Я.С., Сліпенко А.К. Граничний перехід і функціональні рівняння // Математика (газета для освітян). – 2000. – №20 (80).

9. Вороний О.М. Ще раз про функціональні рівняння // У світі математики. – 1997. – Т. 3, в. 3.

10. Вороной А.Н. О применении последовательностей к решению функциональных уравнений // Математика в школе. – 1997. – №2.

11. Вороний О. М., Писанко Г.В. Функціональні рівняння з вільними змінними // У світі математики. – 2003. – т. 9, в. 1.

12. Вороной А.Н. Функциональные уравнения и метод неопределенных коэффициентов // Математика в школе. – 2004. – №8.

13. Вороний О. М. Застосування методу Коші до розв'язування функціональних рівнянь // Математика в школі. – 2007. – №7.

14. Вороной А.Н. Решение функциональных уравнений методом разделения переменных // Математика в школе, (РФ). – 2010. – №4.

15. Вороний О.М. Функціональні рівняння на дискретних множинах. Наукові записки, в. 69. Серія «Математичні науки». – Кіровоград. РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2010.

16. Ганюшкін О.Г. Про деякі тенденції в олімпіадному русі // Матеріали Всеукраїнської конференції «Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладах України». – К., 1999.

17. Гомонов С.А. Функциональные уравнения в школьном курсе математики // Математика в школе, (РФ). – 2000. – №10.

18. Гопаченко В.В. Функціональні рівняння // Математика (газета для вчителів). – 2002. – №12(168).

19. Недокіс В.А. Про функціональне рівняння Коші // У світі математики. – 1998. – т. 6, в. 2.

20. Недокіс В.А. Розв'язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановки // У світі математики. – 2002. – т. 8, в. 4.

21. Призва Г.Й. Функціональні співвідношення // У світі математики. – в.10. – К.: Рад. шк. – 1979.

22. Призва Г.Й. Функціональні рівняння // У світі математики. – в.18. – К.: Рад. шк. – 1983.

23. Семенець С. Про вивчення функції у класах фізико-математичного профілю // Математика в школі, 2005, №7.

24. Смишляєв В.К., Смишляєва М.В. Найпростіші функціональні рівняння // У світі математики. – в. 9. – К.: Рад. шк. – 1978.

25. Фалин Г., Фалин А. Функциональные уравнения и неравенства // Квант. – 2006. – №5.

ЗМІСТ

Функціональні рівняння
в
олімпіадній математиці

Навчально-методичний посібник
для підготовки школярів до олімпіад з математики

Олексій Миколайович Вороний

Підписано до друку 07.12.2010. Формат 60х84 1/16. Папір офсет.
Друк офсет. Ум.др.арк. 3,5. Тираж 500.