Міністерство освіти й науки України

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Заочна фізико-математична школа

Л.В.Ізюмченко, Л.І.Лутченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк

Вирази та тотожні перетворення

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Кіровоград – 2008

УДК

ББК

Л.В.Ізюмченко, Л.І.Лутченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк

Вирази та тотожні перетворення: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2008. – 22 с.

У посібнику міститься основний теоретичний матеріал та приклади розв’язування задач, пов’язаних з тотожними перетвореннями числових та алгебраїчних виразів. Після кожної частини викладу запропоновані задачі для самостійного розв’язування, до яких у кінці посібника подані відповіді та вказівки. Розробка містить предметний покажчик теоретичного матеріалу.

Посібник призначений для використання учнями заочної фізико-математичної школи фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка при розв’язуванні контрольних робіт. Може бути використаний у процесі самостійної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл до державної атестації.

Частина І.Числові, алгебраїчні вирази та тотожні перетворення

При розв’язуванні задач з різних розділів математики досить часто виникає необхідність використання тотожних перетворень. Спрощення виразів, розклад многочленів на множники, скорочення дробів – це все приклади тотожних перетворень. Тому належне володіння прийомами, за допомогою яких виконуються ці перетворення, є дуже важливим.

Спочатку введемо декілька основних понять, які пов’язані з тотожними перетвореннями, та проілюструємо їх на прикладах.

§1. Числові вирази. *Числовий вираз* – запис, який складається з чисел, знаків алгебраїчних дій та дужок. До знаків алгебраїчних дій (операцій) відносяться:

„+” (знак „плюс”) – означає операцію додавання;

„–” (знак „мінус”) – означає операцію віднімання;

„$\cdot$” або „$\times$” (знаки множення) – означають операцію множення;

„:” або „/” (знаки ділення), або „–” (знак риски дробу) – означають операцію ділення;

„$\sqrt{\ }$” (знак радикала) – означає операцію добування кореня.

Деякі приклади числових виразів:

$$7\cdot 2+8,\ \ 5\cdot\sqrt[3]{27}-11,\ \ \left(3:\sqrt{\frac{2+8}{7}}\right)^3$$

Значення числового виразу – число, яке отримується після виконання в даному виразі всіх дій, які він включає. Наприклад, значенням числового виразу $7\cdot 2+8$ є число 22; значенням числового виразу $5\cdot\sqrt[3]{27}-11$ є число 4; значенням виразу $\left(3:\sqrt{\frac{2+8}{7}}\right)^3$ також є деяке число, однак його так просто не записати – воно ірраціональне. Пригадаємо, що ірраціональне число – це число, яке не можна представити у вигляді дробу, чисельник та знаменник якого є цілі числа. Десятковим записом такого числа є нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Однак, не для будь-якого числового виразу визначене його значення. Це зумовлене тим, що деякі алгебраїчні дії визначені не для всіх чисел. Наприклад, $\frac{2}{0}$,

$\sqrt{-5}$ – числові вирази, які не мають змісту: їх значення не визначене. Вираз $\frac{2}{0}$ не має змісту, оскільки операція ділення на нуль не визначена, а $\sqrt{-5}$ не має змісту, оскільки не визначене добування квадратного кореня з від'ємного числа.

Числовою рівністю називається запис вигляду

$$A=B, \qquad (1)$$

де A і B – числові вирази. Якщо хоча б один з виразів A і B не має змісту (тобто його значення не визначене), то кажуть, що рівність (1) *не має змісту.* Якщо ж обидва вирази A і B мають зміст, то і рівність (1) *має зміст.*

Якщо значення числових виразів A і B рівні, то рівність (1) називають *правильною*; в іншому випадку її називають *неправильною.*

Наведемо приклади правильних, неправильних числових рівностей та рівностей, які взагалі не мають змісту:

$3^2 = 2\cdot 7 - \sqrt{25}$ – правильна числова рівність;

2+7=21 – неправильна числова рівність;

$\sqrt{-1}=1$, $\frac{3}{0}=\frac{3}{0}$ – числові рівності, які не мають змісту.

Обчислити числовий вираз – означає знайти його значення, записане у максимально простому вигляді. Якщо ж початковий вираз не має змісту, то *обчислити* його – означає довести, що він не має змісту (адже з громіздкого запису виразу зразу може бути і не видно, що його значення не визначене).

Розглянемо декілька прикладів обчислення числових виразів.

П р и к л а д 1.

$$\sqrt{(7\sqrt{9})^2-1100:2{,}5}-1=\sqrt{(7\cdot 3)^2-440}-1=\sqrt{441-440}-1=1-1=0.$$

П р и к л а д 2.

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-3-\sqrt{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}-3-\sqrt{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}-3-\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Число $\sqrt{2}$ – ірраціональне, і тому подальші перетворення ми зробити вже не можемо: це найбільш простий числовий вираз з тим же значенням, що і початковий.

§2. Алгебраїчні вирази. *Алгебраїчний вираз* – запис, який складається з чисел, змінних, знаків алгебраїчних дій та дужок, наприклад:

$$ab^2+\frac{7c}{2};\quad \sqrt{x}-\left(\frac{7}{y+3}\cdot 6x\right)^2;\quad s^3+s^2-s+7\sqrt{t}\ .$$

Зауважимо, що числовий вираз – частинний випадок алгебраїчного.

Поняття рівності для алгебраїчних виразів вводиться так само, як і для числових виразів. Дамо означення.

Алгебраїчною рівністю називається запис вигляду $A=B$, де A і B – алгебраїчні вирази.

При підстановці в алгебраїчний вираз деяких чисел як значень змінних одержимо числовий вираз. Його значення назвемо *числовим значенням* алгебраїчного виразу при певних значеннях змінних. Наприклад, числове значення виразу $\frac{a^2+\sqrt{b}}{c-2}$ при $a=3, b=9, c=8$ дорівнює 2, оскільки $\frac{3^2+\sqrt{9}}{8-2}=2$. При $a=1, b=1, c=1$ числове значення цього виразу дорівнює –2 (перевірте самостійно!); при $a=3, b=25, c=2$ числове значення цього виразу не визначене, оскільки при підстановці вказаних значень a, b, c знаменник дробу перетворюється в 0.

У випадку алгебраїчної рівності вже не говорять про те, правильна ця рівність чи ні, оскільки при підстановці різних значень змінних одна й та ж сама рівність може перетворитися як у правильну числову рівність, так і в неправильну: наприклад, алгебраїчну рівність $a^2=2a$ перетвориться на правильну числову рівність при підстановці замість a чисел 0 або 2; при підстановці ж будь-якого іншого значення a ми отримаємо неправильну числову рівність. Однак для алгебраїчних виразів існує нове поняття: тотожної рівності або тотожності.

Два алгебраїчних вирази називаються *тотожно рівними,* якщо вони визначені на одній і тій самій множині значень змінних і набувають рівних числових значень при всіх допустимих значеннях змінних, які включені в них.

П р и к л а д и.

1) Вирази $3+x^2-2$ та x^2+1 є тотожно рівними.

2) Вирази $2(x+5)$ та $2x+10$ є тотожно рівними.

3) Вирази x^2+10 та $x+10$ не є тотожно рівними, оскільки, наприклад, при $x=2$ їх числові значення відрізняються.

4) Вирази x та $\dfrac{x^2}{x}$ не є тотожно рівними, оскільки перший з них визначений при $x=0$, а другий – ні.

Тотожність – алгебраїчна рівність, права і ліва частини якої тотожно рівні. Наведемо приклади тотожностей. Дві з них ми можемо автоматично отримати з прикладів, які розглянуті раніше:

$$3+x^2-2=x^2+1; \quad 2(x+5)=2x+10$$

– це тотожності. Ще деякі приклади тотожностей:

$$(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc; \quad \left(2{,}5+5\cdot\frac{6}{15}\right)^2=22-1{,}75.$$

Тотожне перетворення алгебраїчного виразу – заміна цього виразу іншим, тотожно рівним йому.

Спростити алгебраїчний вираз – означає замінити його на тотожно рівний, але найпростіший за записом. Як видно з означення, спрощення алгебраїчного виразу є тотожним перетворенням. Розглянемо приклад спрощення.

1. Спростити вираз $(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2$.

Розв’язання.

$$(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2=x^2+2xy-xy-2y^2-x^2+2y^2=xy.$$

В і д п о в і д ь: $(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2=xy.$

З деякими видами тотожних перетворень ви уже знайомі: розкриття дужок і, навпаки, винесення спільного множника за дужки; множення чисельника і знаменника дробу на одне й те ж саме число, що не дорівнює 0 – все це тотожні перетворення.

При проведенні тотожних перетворень часто стають корисними *формули скороченого множення*. Основні з них:

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2, \quad (A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3,$$

$$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC,$$

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B), \quad A^3\pm B^3=(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2).$$

Відмітимо, що всі ці формули – тотожності: вони правильні для будь-яких значень $A, B, C.$ Розглянемо приклад їх використання.

2. Спростити вираз: $x^3 - 1 + x(x-1) - x^2(x+1).$

Розв'язання.

$$x^3 - 1 + x(x-1) - x^2(x+1) = (x^2 + x + 1)(x-1) + x(x-1) - x^2(x+1) = (x^2 + 2x + 1)(x-1) - x^2(x+1) =$$

$$= (x+1)^2(x-1) - x^2(x+1) = (x+1)((x+1)(x-1) - x^2) = (x+1)(x^2 - 1 - x^2) = -(x+1).$$

В і д п о в і д ь: $x^3 - 1 + x(x-1) - x^2(x+1) = -(x+1).$

§3. Умовні тотожності. Познайомимося ще з одним видом алгебраїчних рівностей – умовними тотожностями. Зробимо це на конкретному прикладі. Розглянемо рівність

$$\frac{x^2 + y^2}{3x - y} = \frac{-x^2 + 2y^2}{2x}. \qquad (2)$$

Чи є це тотожність? Нескладно перевірити, що ні: так, наприклад, при $x = y = 1$ значення правої і лівої частин відрізняються. Накладемо тепер деяку додаткову умову:

$$x + y = 0. \qquad (3)$$

Розглянемо, чи будуть права і ліва частини співвідношення (2) рівними за умови, що виконується рівність (3). Якщо вона виконується, то $y = -x.$ Підставивши це в рівність (2), перетворимо її ліву частину (позначимо її через A) і праву (B):

$$A = \frac{x^2 + y^2}{3x - y} = \frac{x^2 + (-x)^2}{3x - (-x)} = \frac{x^2 + x^2}{3x + x} = \frac{2x^2}{4x} = \frac{x^2}{2x};$$

$$B = \frac{-x^2 + 2y^2}{2x} = \frac{-x^2 + 2(-x)^2}{2x} = \frac{-x^2 + 2x^2}{2x} = \frac{x^2}{2x}.$$

Бачимо, що при виконанні умови (3) права і ліва частини співвідношення (2) тотожно рівні між собою. Тепер можемо ввести поняття умовної тотожності.

Умовна тотожність – алгебраїчна рівність, права і ліва частини якої тотожно рівні за умови виконання деякого додаткового співвідношення (можливо, не одного, а декількох).

З а у в а ж е н н я 1. Було б помилкою в розглянутому прикладі продовжити при знаходженні A і B перетворення і отримати, скоротивши дроби, що $A = \frac{x}{2}$,

$B = \frac{x}{2}$.

Справа в тому, що алгебраїчний вираз $\frac{x}{2}$ визначений при всіх значеннях x, тоді як $\frac{x^2}{2x}$ визначений при $x \neq 0$. А у тотожно рівних виразів, за означенням, повинні співпадати множини значень змінних, при яких вони визначені. Тому писати "$\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$" було б неправильно. Можна, наприклад, записати так: "$\frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$ $(при\ x \neq 0)$".

В наступних параграфах ми більш детально ознайомимося з деякими видами тотожних перетворень та їх застосуванням до розв'язування задач.

В п р а в и

3. Довести тотожності:

а) $a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = (a+b)(a+c)(b+c)$,

б) $(a+b+c)(ab+ac+bc) - abc = (a+b)(a+c)(b+c)$.

4. Спростити вирази:

а) $(x+y)(x-y+1) - (x-y)(x+y-1)$,

б) $(x+3y)(x+y+2) - (x+y)(x+3y+2)$,

в) $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x-2)$,

г) $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

5. Довести умовні тотожності:

а) $a(a+b)(a+c) = b(b+a)(b+c) = c(c+a)(c+b) = abc$ за умови, що $a+b+c=0$,

б) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ за умови, що $a+b+c=0$,

в) $a^2(b+c)^2 + b^2(a+c)^2 + c^2(a+b)^2 + (a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc) = 0$ за умови, що $a+b+c=0$.

Частина II. Розклад на множники

§4. Розклад квадратного тричлена на множники. Розглянемо квадратний тричлен ax^2+bx+c $(a\neq 0)$. Як відомо з курсу алгебри, якщо дискримінант відповідного квадратного рівняння

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (4)$$

невід'ємний: $D=b^2-4ac\geq 0$, то цей тричлен можна розкласти на множники: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння (4): $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Якщо ж дискримінант від'ємний, то розкласти тричлен на множники неможливо.

Розглянемо тричлен виду ax^4+bx^2+c, де $a\neq 0$ (такий тричлен називається біквадратним). Зробивши заміну $y=x^2$, зведемо його до вже розглянутого виду: $ay^2+by+c.$

І якщо рівняння

$$ay^2+by+c=0 \qquad (5)$$

має корені y_1 і y_2, то $ay^2+by+c=a(y-y_1)(y-y_2)$; тоді, з урахуванням того, що $y=x^2$, маємо: $ax^4+bx^2+c=a(x^2-y_1)(x^2-y_2)$, де, нагадаємо, $y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Якщо $y_1>0$ або $y_2>0$, то можна провести і подальший розклад (подумайте, як). Розглянемо вище викладене на прикладі.

6. Розкласти на множники многочлен $2x^4-2x^2-24$.

Розв'язання.

Зробивши заміну $y=x^2$, отримаємо многочлен $2y^2-2y-24$. Прирівнявши його до 0, знайдемо корені останнього рівняння: $y_1=4$, $y_2=-3$. Тоді $2y^2-2y-24=2(y-4)(y+3)$, і $2x^4-2x^2-24=2(x^2-4)(x^2+3)$. Хоча ми вже розклали даний многочлен на два множники, можливий і подальший розклад, тому продовжуємо: $2(x^2-4)(x^2+3)=2(x-2)(x+2)(x^2+3)$. Отримані многочлени вже неможливо розкласти на множники (поясніть чому).

В і д п о в і д ь. $2x^4-2x^2-24=2(x-2)(x+2)(x^2+3)$.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо в завданні сказано „розкласти на множники”, то завжди мається на увазі, що розклад слід проводити доти, доки це можливо. Після цього необхідно довести неможливість подальшого розкладу.

Зауважимо, що розглянутий спосіб може допомогти також і при розкладі на множники деяких інших многочленів, які зводяться заміною до вигляду ay^2+by+c: так, наприклад, для тричлена $-x^6-4x^3+21$ слід скористатися заміною $y=x^3$, для тричлена $(x^2-x-1)^2-3(x^2-x-1)+2$ – заміною $y=x^2-x-1$ тощо.

§5. Доповнення до квадрата суми. Потрібно відмітити, що описаний вище спосіб можна використовувати лише для випадку, коли рівняння (5) має корені. Однак якщо у нього немає коренів, то многочлен ax^4+bx^2+c все одно можна розкласти на множники! Допоможе тут *метод доповнення до квадрату суми* (далі будемо називати його просто *методом доповнення до квадрату*), застосування якого проілюструємо на прикладі.

7. Розкласти многочлен x^4+4 на множники.

Розв’язання. Проста заміна $y=x^2$ нічого в цьому випадку не дасть: ми отримаємо двочлен y^2+4, який неможливо розкласти. Тому спробуємо доповнити даний вираз до квадрата. Для цього потрібно пригадати формулу квадрата суми, наведену вище: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. Ідея методу полягає ось в чому: спробуємо додати до виразу x^4+4 доданок виду bx^2, так щоб вираз x^4+bx^2+4 був повним квадратом. Крім того, щоб рівність збереглася, потрібно також не забувати віднімати такий самий доданок. З урахуванням формули квадрата суми бачимо, що в даному випадку $A^2=x^4$, $B^2=4$. Тоді $A=x^2, B=2$, і потрібно додати доданок $2AB=2\cdot x^2\cdot 2=4x^2$.

Таким чином, $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

В останньому переході була використана формула різниці квадратів: $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Подальший розклад здійснити вже неможливо, оскільки отримані квадратні тричлени не мають коренів і, значить, не розкладаються на множники (нагадаємо, що *коренями многочлена P(x),* який містить одну змінну *x*, називаються корені рівняння *P(x)=0*).

В і д п о в і д ь: $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

Отже, зауважимо (не наводячи доведення цього факту), що якщо многочлен $ax^4 + bx^2 + c$ неможливо розкласти на множники заміною $y = x^2$ внаслідок того, що отриманий квадратний тричлен не має коренів, то його завжди можна розкласти, доповнивши до квадрата суми.

З а у в а ж е н н я 3. З того, що $A^2 = x^4,\ B^2 = 4$ ще не випливає, взагалі кажучи, що $A = x^2,\ B = 2.$ Може бути, наприклад, $A = -x^2,\ B = -2.$ Однак в даному випадку це несуттєво. Нам потрібно було розкласти даний вираз на множники, і ми це зробили. Можливо, інші варіанти також виявилися б ефективними, але це вже неважливо: головне, що обраний нами шлях дав можливість розв'язати задачу. Рекомендуємо розглянути випадок, коли: $A = x^2,\ B = -2;\ A = -x^2,\ B = 2;\ A = -x^2,\ B = -2.$

Метод представлення виразу у вигляді повного квадрата часто застосовується і для спрощення числових виразів. Розглянемо приклад.

8. Спростити вираз $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}.$

Розв'язання. Маємо:

$$3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1 + 1^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2,$$

аналогічно отримуємо, що $6-4\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-2\right)^2$. Тоді:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{2}+1\right| + \left|\sqrt{2}-2\right| = \sqrt{2}+1+\left(2-\sqrt{2}\right) = 3.$$

В і д п о в і д ь: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = 3.$

З а у в а ж е н н я 4. Зверніть увагу, що при розв'язуванні цієї задачі було використане дуже важливе співвідношення: $\sqrt{a^2} = |a|$ (неправильно вважати, що $\sqrt{a^2}$ дорівнює a). Нагадаємо в зв'язку з цим означення *модуля числа*:

$$|a| = \begin{cases} a, & якщо\ \ a > 0, \\ 0, & якщо\ \ a = 0, \\ -a, & якщо\ \ a < 0. \end{cases}$$

Таким чином, з означення модуля випливає, що для будь-якого числа a правильна нерівність $|a| \geq 0.$

§6. Формула складного радикала. Останній з розглянутих прикладів можна було б розв’язати інакше, використавши *формулу складного радикала*:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (6)$$

Доведемо цю формулу. Для цього знайдемо, чому дорівнює квадрат правої частини рівності (6):

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} =$$

$$= a \pm 2\sqrt{\frac{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}{4}} = a \pm 2\frac{\sqrt{a^2-\left(a^2-b\right)}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Таким чином, ми отримали, що квадрати правої і лівої частин співвідношення (6) рівні. Добудемо корінь:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \left|\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right| = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

(Подумайте, чому тут можна так просто позбавитися від знака модуля).

Однак, отримана формула буде тотожністю лише за умови, що права і ліва її частини визначені на одній і тій же множині значень змінних. Ліва частина визначена, як неважко зрозуміти, при $a \ge \sqrt{b},$ права – при $a^2-b \ge 0,\ a-\sqrt{a^2-b} \ge 0,\ a+\sqrt{a^2-b} \ge 0.$ Дійсно, (не будемо наводити тут доведення цього факту), перша нерівність рівносильна системі трьох наступних. Значить, права і ліва частини нашої формули справді є тотожно рівними виразами.

Як правило, задачі, подібні до задачі 8, можна розв’язати, перетворивши підкореневий вираз на повний квадрат. Однак в деяких випадках, коли таке перетворення зразу не очевидне, формула складного радикала істотно полегшує розв’язання задачі. Розглянемо приклад.

9. Спростити вираз $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}.$

Розв’язання. Перетворимо перший доданок за формулою складного радикала:

$$\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9/4+\sqrt{81/16-2}}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-\sqrt{81/16-2}}{2}}=\sqrt{\frac{9/4+\sqrt{49/16}}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-\sqrt{49/16}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9/4+7/4}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-7/4}{2}}=\sqrt{\frac{16/4}{2}}+\sqrt{\frac{2/4}{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}.$$

Далі другий доданок:

$$\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{\frac{19}{9}-\sqrt{\frac{8}{9}}}=\sqrt{\frac{19/9+\sqrt{361/81-8/9}}{2}}-\sqrt{\frac{19/9-\sqrt{361/81-8/9}}{2}}=\sqrt{\frac{19/9+\sqrt{289/81}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{19/9-\sqrt{289/81}}{2}}=\sqrt{\frac{19/9+17/9}{2}}-\sqrt{\frac{19/9-17/9}{2}}=\sqrt{\frac{36/9}{2}}-\sqrt{\frac{2/9}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{3}.$$

Остаточно: $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}.$

В і д п о в і д ь: $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{5}{6}.$

§7. Скорочення дробів. Нехай дано деякий дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ *і* $Q(x)$ – многочлени. Припустимо, розкладаючи чисельник і знаменник на множники, нам вдалося виділити у них однаковий множник $R(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)R(x)}{Q_1(x)R(x)}$. Тоді, поділивши чисельник і знаменник дробу на $R(x)$, ми отримаємо дріб $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Ділення чисельника і знаменника дробу на один і той самий вираз і називається його *скороченням.*

Нам потрібно, щоб скорочення дробів було тотожним перетворенням. Однак при скороченні дробу множина значень змінної, на якій цей дріб визначений, може змінитися (див. Зауваження 1). Розглянемо приклад.

10. Скоротити дріб $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Розклавши чисельник і знаменник на множники, отримаємо: $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$. Скоротимо: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}$. Початковий вираз був визначений при $x\neq-2,\ x\neq1$. Обмеження $x\neq-2$ зберігається і для отриманого дробу, оскільки $x+2$ ще знаходиться в знаменнику, а умову $x \neq 1$ ми втратили, тому її потрібно врахувати.

В і д п о в і д ь: $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{x+1}{x+2}$ $(при\ \ x \neq 1)$.

З а у в а ж е н н я 5. Необхідність записувати обмеження у відповіді виникає тому, що при $x=1$ початковий вираз не визначений і не може дорівнювати виразу $\dfrac{x+1}{x+2}$. Тому потрібно підкреслити, що записана у відповіді рівність виконується не для всіх значень x.

Не відрізняється від розглянутої задача скорочення дробів і для випадку, коли чисельник і знаменник залежать більш ніж від однієї змінної. Розглянемо ще один приклад.

11. Скоротити дріб $\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}$.

Розв'язання. $\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}=\dfrac{\left(a^2-2ac+c^2\right)-b^2}{\left(a^2+2ab+b^2\right)-c^2}=\dfrac{(a-c)^2-b^2}{(a+b)^2-c^2}=$

$$=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{(a+b-c)(a+b+c)}=\frac{(a+b-c)(a-b-c)}{(a+b-c)(a+b+c)}=\frac{a-b-c}{a+b+c}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}=\dfrac{a-b-c}{a+b+c}$ $(при\ \ a+b-c \neq 0)$.

В п р а в и

При виконанні наведених вправ не забувайте про зміст зауважень 1-5.

12. Розкласти на множники:

а) x^2-5, б) x^4+1, в) x^4+3x^2-4,

г) x^4+2x^2+9, д) x^6+7x^3-8, е) $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)-12$,

ж) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-2$, з) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$,

и) $x(x+2)-(y+1)(y-1)$, к) $x^2+xy-2y^2-x+y$,

л) $(x+y)z^2+(x+z)y^2+(y+z)x^2-(x+y)(x+z)(y+z)$,

м) $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$.

13. Додати замість крапок одночлени, так щоб одержати повні квадрати:

а) $y^2+\ldots+1$, б) $\ldots+4y^2+4$, в) $\ldots+2xy+4y^2$, г) $...+t+1$, д) $16a^2-...+16$, е) $a^6-a^3+...$,

ж) $\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}+...$, з) $c^2+...+\frac{1}{c^2}$, и) $4x^2-\frac{x}{2}+...$.

14. Скоротити дроби:

а) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$, б) $\frac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$, в) $\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}{x^2-y^2-z^2-2yz}$.

15. Спростити вирази:

а) $\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}+1}$, б) $\frac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}}$, в) $\frac{x^4+9}{x^2+\sqrt{6}x+3}$, г) $\frac{x^2-y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$,

д) $\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}$, е) $\frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}$.

16. Обчислити $\sqrt{38-x^2}+\sqrt{17-x^2}$, якщо $\sqrt{38-x^2}-\sqrt{17-x^2}=3$.

17. Спростити вирази:

а) $\sqrt{(a^2-4)^2+16a^2}$, б) $\sqrt{(a^4+2)^2-8a^4}$, в) $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$,

г) $\sqrt{10a+23+\sqrt{a^4+4a^2+4}}$, д) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-1}$, е) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$,

ж) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$, з) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$, и) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

18. Обчислити:

а) $\sqrt{5+4\sqrt{3-4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}-2\sqrt{3}$, б) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, в) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

19. Спростити вирази:

а) $\frac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ *за умови, що* $0{,}5<a<3$,

б) $\sqrt{\frac{3b+a^3}{2a}+\sqrt{3ab}}-\sqrt{\frac{3b+a^3}{2a}-\sqrt{3ab}}$.

Частина III. Позбавлення від знаків радикала

Як уже відмічалося, ірраціональне число – це число, яке не можна представити у вигляді дробу з цілими чисельником і знаменником. Можна дати і рівносильне означення: ірраціональне число – це число, яке не можна представити у вигляді дробу з цілим чисельником і натуральним знаменником (нагадаємо, що натуральні числа – це числа 1, 2, 3, ...). Припустимо, нам дано вираз $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)\, i\, Q(x)$ – деякі алгебраїчні (або числові) вирази, причому $Q(x)$ містить знаки радикала. *Позбавитися від знаків радикала* (або, що те саме, *позбавитися від радикалів*) в знаменнику дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – означає представити його у вигляді тотожно рівного йому дробу $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, де $Q_1(x)$ вже не містить знаків радикала. Таке перетворення ще називають *позбавленням від ірраціональності у знаменнику.* Причому, зовсім не обов'язково, щоб чисельник і знаменник дробу залежали тільки від однієї змінної.

Розглянемо найпростіші приклади позбавлення від знаків радикала в знаменнику дробу.

1) $$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \frac{\sqrt{a}+b}{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)} = \frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}.$$

Однак потрібно зауважити, що отримана рівність буде тотожно вірною лише при $\sqrt{a}+b \neq 0$. При $\sqrt{a}+b=0$ маємо: $\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \frac{1}{-b-b} = \frac{1}{-2b} = -\frac{1}{2b}$. Таким чином,

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}, & \text{якщо } \sqrt{a}+b \neq 0, \\ -\frac{1}{2b}, & \text{якщо } \sqrt{a}+b = 0. \end{cases}$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

Прийом, використаний у прикладах (2) та (3) називають множенням чисельника та знаменника дробу на *спряжене* до знаменника. Як і в попередній рівності, потрібно виділити особливі випадки. При $\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}=0$, тобто при $a=\sqrt{b}$, маємо: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$; випадок $a+\sqrt{b=0}$ неможливий, оскільки початковий дріб визначений лише при $a\geq 0$ (адже a стоїть під знаком квадратного кореня), і тому $a+\sqrt{b}$ може перетворитися на 0 тільки при $a=0$ *і* $b=0$, але тоді знаменник початкового дробу буде дорівнювати 0, що неможливо. Остаточно:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}=\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}, & \text{якщо } a-\sqrt{b}\neq 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}}, & \text{якщо } a-\sqrt{b}=0.\end{cases}$$

А ось приклад позбавлення від радикалів у числовому виразі.

4) $\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{-2}=\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.$

До наступного прикладу потрібно зробити деякі коментарі.

20. Позбавитися від радикалів у виразі $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$.

Розв'язання. Оскільки $-b$ знаходиться під знаком квадратного кореня, то даний вираз має зміст тільки при $-b\geq 0$, звідки $b\leq 0$. Однак b не може дорівнювати 0, оскільки в цьому випадку знаменник дробу перетвориться на 0. Тому $b<0,\ ab\geq 0$ (цей вираз також знаходиться під коренем), і тоді, з урахуванням того, що $b<0$, отримуємо: $a\leq 0$. Відома формула $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$, якщо $x\geq 0,\ y\geq 0$.

В нашому випадку $a\leq 0,\ b<0$, тоді $-a\geq 0,\ -b>0$, і, застосувавши цю формулу, маємо: $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{(-a)(-b)}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{-a}$ $(\textit{при } b<0)$.

В і д п о в і д ь: $\sqrt{-a}$ $(\textit{при } b<0)$.

З а у в а ж е н н я 6. Тут дуже важливо було врахувати знаки чисел a *і* b! Неправильно було б, наприклад, записати, що $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$: адже ця рівність правильна тільки при $a\geq 0,\ b\geq 0$. Якби ми зробили таке перетворення в нашій задачі, то ми отримали б, що під коренем знаходиться від'ємна величина b (раніше було показано, що $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$ визначене лише при $b<0$), тобто ми отримали б вираз, який не має змісту.

В п р а в и

При виконанні наведених вправ не забувайте про зміст Зауважень 1-6.

21. Позбавитися від знаків радикалу в знаменниках числових виразів:

а) $\frac{1}{\sqrt{8}}$, б) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$, в) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$,

г) $\frac{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}}$, д) $\frac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ е) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$,

ж) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, з) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

22. Довести рівності:

а) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, б) $\frac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$,

в) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9.$

23. Позбавитися від знаків радикалу в знаменниках виразів, а потім спростити їх:

а) $\frac{ab}{\sqrt{a}}$, б) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}}$, в) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, г) $\frac{a-b}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$,

д) $\frac{\sqrt{(a+c)(c+b)}+\sqrt{(a-c)(c-b)}}{\sqrt{(a+c)(c+b)}-\sqrt{(a-c)(c-b)}}$, *за умови, що* $a>b>0,\ c=\sqrt{ab},$

е) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$

Відповіді та вказівки до розв’язування вправ.

4. а) $2x$; б) $4y$; в) x^5-32; г) $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

5. б) Вказівка: скористайтеся результатами розв’язання вправи 4 (г); в) Вказівка: раціонально було б розкрити лише останні дужки, записавши їх у вигляді:
$(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=a^2(ab+ac+bc)+b^2(ab+ac+bc)+c^2(ab+ac+bc)$,
а потім згрупувати по a^2,b^2,c^2, спростити вирази в дужках, врахувавши при цьому умову про рівність нулю суми всіх змінних величин.

12. а) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$; б) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$; в) $(x^2+4)(x-1)(x+1)$;
г) $(x^2-2x+3)(x^3+2x+3)$; д) $(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)(x^2+x+1)$;
е) $(x^2+x+6)(x+2)(x-1)$; ж) $(x^2+4)(x^2+x+6)$; Вказівка: введіть заміну $z=x^2+x+3/2$; з) $x(x+5)(x^2+5x+10)$; Вказівка: введіть заміну $z=x+2{,}5$;
и) $(x-y+1)(x+y+1)$; к) $(x-y)(x+2y-1)$; л) $4xyz$; Вказівка: скористайтеся результатами розв’язування вправи 3 (а): м) $-3(x+y)(y+z)(x+z)$.

13. а) $2y$; б) y^4; в) $\left(\frac{x}{2}\right)^2$; г) $\left(\frac{t}{2}\right)^2$; д) $32a$; е) $\frac{1}{4}$; ж) 1; з) 2; и) $\frac{1}{64}$.

14. а) $\frac{x-2}{x+2}$ при $x\neq 1$; б) $\frac{a-b}{a+b}$ при $a\neq 1{,}5b$; в) $\frac{x+y+z}{x-y-z}$ при $x+y+z\neq 0$.

15. а) $x-1$ при $x\neq 0$; б) 1 при $x\neq -1$; в) $x^2-\sqrt{6}x+3$; г) $\frac{xy}{x+y}$ при $x\neq y$; д) $\frac{x}{2}$ при $x\notin[-2;2]$; е) $\frac{1}{xy}$ при $x\neq y$.

16. 7. Вказівка: перемноживши вирази, ми отримаємо 21, а тому шуканий вираз легко знайти, розділивши 21 на 3.

17. а) a^2+4; б) $|a^4-2|$; в) $a+1$ при $a\geq 3$ та $\sqrt{a^2+7}$ при $a<3$; г) $|a+5|$; д) –1 при $a\geq 1$; е) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; ж) $\sqrt{5}-2$; з) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; и) $\sqrt{3}+1$.

18. а) –1; б) 4; вказівка: позначте вираз змінною та піднесіть всю рівність до 3-го степеня, розв’язавши її як рівняння; в) 2; вказівка: розв’язання аналогічне до вправи 18 (б).

19. а) a при $a\neq -2$; б) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ при $a\neq 0$.

21. а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{5+2\sqrt{6}}{1}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{-2}$; г) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$; д) $25(3+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}})(10-7\sqrt{2})$;
е) $\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12}$; з) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{1}$; вказівка: помножте чисельник і знаменник на такий вираз, щоб у знаменнику утворилася різниця кубів.

22. в) вказівка: помножте чисельник та знаменник кожного доданку лівої частини рівності на спряжене знаменника.

23. а) $b\sqrt{a}$ при $a\rangle 0$; б) $\sqrt{-b}$ при $a<0$ та при $b<0$; в) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$ при $a\neq b$; г) $(-1)(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})$ при $a<0, b<0, a\neq b$; д) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; е) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ при $a\neq b$.

Вправи для самостійного розв'язування.

У цьому розділі ми пропонуємо вправи для контролю отриманих умінь. У лівій частині таблиці вказана умова вправи, а у правій – лише відповідь без вказівок із розв'язання. Не забувайте, що консультації з розв'язання вправ можна отримати у рамках навчання у заочній фізико-математичній школі.

Умова	Відповідь
1. Спростити вираз:	
$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	2
$\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}$	10
$\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}$	8
$\sqrt{28+16\sqrt{3}}+\sqrt{28-16\sqrt{3}}$	8
$\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}$	6
$\sqrt{81+8\sqrt{5}}-\sqrt{81-8\sqrt{5}}$	2
$\sqrt{28+10\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$	10
$\sqrt{16+8\sqrt{3}}-\sqrt{16-8\sqrt{3}}$	4
$\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$	2
$\sqrt{41+24\sqrt{2}}-\sqrt{41-24\sqrt{2}}$	6
$\sqrt{69+28\sqrt{5}}+\sqrt{69-28\sqrt{5}}$	14
$\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}$	10
$\sqrt{49+12\sqrt{5}}-\sqrt{49-12\sqrt{5}}$	4
$\sqrt{37+20\sqrt{3}}+\sqrt{37-20\sqrt{3}}$	10
$\sqrt{33+8\sqrt{2}}-\sqrt{33-8\sqrt{2}}$	2
$\sqrt{54+20\sqrt{2}}-\sqrt{54-20\sqrt{2}}$	4
2. Спростити вираз:	
$(x^2+y)(x+2y^2)-2x^2y^2-x^3$	$xy+2y^3$
$x^3+1-x^2(x-1)-x^2(x^2+1)$	$1-x^4$
$x^5+1-x^2(x^2-x)-x^3(x^2-x+1)$	1
$(x^2+3y)(2x+2y^2)-2x^2(y^2+x)-6y^3$	$6xy$
$(x^2+1)yx^2+x^2(y^2+1)-yx^2(x^2+y+1)$	x^2
$(x-3y)(x+5y+6)-(x+y)(x+y+6)+24y$	$-16y^2$
$(x+4y)(x-y+1)-(x-2y)(x+y+2)-4(x+2)y+2y^2$	$-x$
$(x-2y)(x+3y-1)+(x-y)(2x-y+2)+x(2y-3x-1)$	$-5y^2$

$(x+3y)(x+2y-2)-(x+3y)(x-y+2)-$ $-3(x+3y-1)(y-1)$	$-x-3$
$(3x+2y-1)(x-2y)+(2x+5y)(x-y-3)+(x+9y)(y+7)$	$5x^2+50y$
$(x-5y)(x-y-3)-(x-5y)(x-3y+1)-2(x-5y)(y-1)$	$-2x+10y$
3. Довести, що вираз тотожно дорівнює нулю:	
$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2-c^2(a+b)^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab-2a^2b^2$	0
$(a-b+c)(-ab+ac-bc)+abc-(a-b)(a+c)(c-b)$	0
$(x-y)(x+y+1)-(x+y)(x-y-1)-2x$	0
$(a+c)^2-2(a+1)(c+1)-(a-1)^2-(c-1)^2+4$	0
$-8x^2+8+\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-3\right)^2$	0

Умова	Відповідь
4. Розкласти на множники:	
$3x^4-24x^2-27$	$3(x-3)(x+3)\left(x^2+1\right)$
$2x^4-30x^2-32$	$2(x+4)(x-4)\left(x^2+1\right)$
$5x^4-123x^2-50$	$(x-5)(x+5)\left(5x^2+2\right)$
$3x^4-11x^2-4$	$(x-2)(x+2)\left(3x^2+1\right)$
$6x^4-3x^2-3$	$3(x-1)(x+1)\left(2x^2+1\right)$
x^4-119x^2-242	$(x-11)(x+11)\left(x^2+2\right)$
$2x^4-97x^2-49$	$(x-7)(x+7)\left(2x^2+1\right)$
x^4-79x^2-162	$(x+9)(x-9)\left(x^2+2\right)$
x^4-143x^2-144	$(x-12)(x+12)\left(x^2+1\right)$
$2x^4-197x^2-300$	$(x+10)(x-10)\left(2x^2+3\right)$
$3x^4+x^2-4$	$(x-1)(x+1)\left(3x^2+4\right)$
$7x^4-25x^2-12$	$(x-2)(x+2)\left(7x^2+3\right)$
$2x^4-13x^2-45$	$(x-3)(x+3)\left(2x^2+5\right)$
5. Скоротити дріб:	
$\dfrac{5x^2+3}{5x^4-17x^2-12}$	$\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$
$\dfrac{3x^2+5}{3x^4-22x^2-45}$	$\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$
$\dfrac{x^2-2}{10x^4-19x^2-2}$	$\dfrac{1}{10x^2+1}$
$\dfrac{3x^2+7}{3x^4+x^2-14}$	$\dfrac{1}{x^2-2}$
$\dfrac{9x^2+7}{9x^4-47x^2-42}$	$\dfrac{1}{x^2-6}$
$\dfrac{11x^2+3}{11x^4-52x^2-15}$	$\dfrac{1}{x^2-5}$

$\dfrac{x^2-6}{6x^4-35x^2-6}$	$\dfrac{1}{6x^2+1}$
$\dfrac{7x^2+1}{7x^4-34x^2-5}$	$\dfrac{1}{x^2-5}$
$\dfrac{x^2-2}{7x^4-15x^2+2}$	$\dfrac{1}{7x^2-1}$
6. Розкласти на множники:	
$\left(x^2-2\right)^2+6\cdot\left(x^2-2\right)+5$	$(x-1)(x+1)\left(x^2+3\right)$
$\left(x^2+x+1\right)^2-4\cdot\left(x^2+x+1\right)+3$	$x(x-1)(x+2)(x+1)$
$\left(x^2+2\cdot x+5\right)^2-6\cdot\left(x^2+2\cdot x+5\right)+5$	$x(x+2)\left(x^2+2x+4\right)$
$\left(x^2+1\right)^2-11\cdot\left(x^2+1\right)+10$	$x^2(x-3)(x+3)$
$\left(x^2-3\cdot x\right)^2-2\cdot\left(x^2-3\cdot x\right)-8$	$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$
$\left(x^2-3\right)^2+5\cdot\left(x^2-3\right)+6$	$x^2(x-1)(x+1)$
$\left(x^2+5\cdot x\right)^2-4\cdot\left(x^2+5\cdot x\right)-12$	$(x-1)(x+6)\left(x^2+5x+2\right)$
$\left(x^2+x+4\right)^2-12\cdot\left(x^2+x+4\right)+20$	$(x-2)(x+3)\left(x^2+x+2\right)$
$\left(x^2+4\right)^2+5\cdot\left(x^2+4\right)-50$	$(x-1)(x+1)\left(x^2+14\right)$
$\left(x^2+4\right)^2-7\cdot\left(x^2+4\right)+10$	$(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)$
$\left(x^2-x+4\right)^2-8\cdot\left(x^2-x+4\right)-20$	$(x-3)(x+2)\left(x^2-x+6\right)$

Предметний покажчик.

Зміст.

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Вирази та тотожні перетворення

Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів

Людмила Володимирівна Ізюмченко

Людмила Іванівна Лутченко

Вікторія Вікторівна Нічишина

Ренат Ярославович Ріжняк