МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ Й НАУКИ УКРАЇНИ
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Заочна фізико-математична школа

Л. В. Ізюмченко, В. В. Нічишина, Р. Я. Ріжняк

МНОГОЧЛЕНИ

СЕРІЯ: ***Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи***

Кіровоград – 2009

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

Л.В.Ізюмченко, В.В.Нічишина, Р.Я.Ріжняк
Многочлени: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 50 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Волков,
кандидат фізико-математичних наук, доцент С.Д.Паращук.

У посібнику міститься основний теоретичний матеріал та приклади розв'язування задач, пов'язаних з вивченням властивостей многочленів, перетворенням многочленів та знаходженням їх коренів. Після кожної частини викладу запропоновані задачі для самостійного розв'язування, до яких подані відповіді та вказівки. Розробка містить предметний покажчик теоретичного матеріалу.

Посібник призначений для використання учнями заочної фізико-математичної школи фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка при розв'язуванні контрольних робіт. Може бути використаний у процесі самостійної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл до державної атестації.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 27 січня 2009 року (протокол № 8).

Друкується в рамках розвитку проекту «Заочна фізико-математична школа КДПУ ім. Винниченка» за підтримки ректорату університету.

УДК 51(07)
І 39
ББК 22.1р

§ 1. Основні поняття

Означення. *Многочленом* від однієї змінної називається вираз:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

де $n \in N_0$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — довільні числа, що називаються *коефіцієнтами* многочлена. Якщо a_n не рівне нулю, то число n називають *степенем* многочлена, коефіцієнт a_n — *старшим коефіцієнтом* многочлена, одночлен $a_n x^n$ — *старшим членом* многочлена. Коефіцієнт a_0 називається *вільним членом*. Величина x є *змінною*.

У цьому розділі вважатимемо, що коефіцієнти і значення змінних всіх даних многочленів приймають довільні дійсні значення, якщо не буде накладено додаткових умов.

Приклади: степінь многочлена $x^3 - 5x^2 + 4$ дорівнює трьом, степінь многочлена $4x^5 - 2x + 1$ дорівнює п'яти, степінь многочлена -5 рівний нулю.

Вираз (1) називається *канонічним видом многочлена*. Як правило, при записі многочленів в канонічному вигляді опускають доданки з нульовими коефіцієнтами: наприклад, замість «$0x^5 + 0x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 0x - 4$» пишуть «$2x^3 - 3x^2 - 4$».

Особливо варто виділити многочлен, у якого всі коефіцієнти рівні нулю (*нульовий многочлен*). Щоб позначити, що многочлен $P(x)$ є нульовим, пишуть: $P(x) = 0$. Вважають, що нуль-многочлен не має степеня, або степінь нульового многочлена не визначений.

Означення. Многочлен, старший коефіцієнт якого рівний 1, називається *зведеним*.

З шкільного курсу алгебри відомо, як знайти суму, різницю і добуток двох многочленів. Відомо, що сума, різниця і добуток двох многочленів є многочлен. Сформулюємо (без доведення) теореми, які показують зв'язок степеня суми, різниці або добутку двох многочленів із степенями цих многочленів.

Теорема 1. Нехай степінь многочлена $P(x)$ дорівнює m, степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n. Тоді степінь многочлена добутку $P(x) \cdot Q(x)$ дорівнює $m + n$.

Теорема 2. Нехай степінь многочлена $P(x)$ дорівнює m, степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n. Тоді:

1) якщо $m = n$, то степінь многочлена $P(x) \pm Q(x)$ не перевищує m;

2) якщо $m \neq n$, то степінь многочлена $P(x) \pm Q(x)$ дорівнює $\max(m, n)$.

Розв'яжіть самостійно вправи 1 та 2.

1. Наведіть приклади многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ таких, що степінь многочлена $P(x)$ дорівнює степеню многочлена Q(x) і дорівнює трьом і:

а) степінь многочлена $P(x) + Q(x)$ дорівнює трьом;

б) степінь многочлена $P(x) + Q(x)$ менший від трьох. Якими мають бути старші коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$?

2. Доведіть теореми 1 і 2.

Означення. *Значенням многочлена* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в точці x_0 називається число, що отримується після підстановки x_0 у вираз для $P(x)$:

$$P(x_0) = a_n x_0^{\ n} + a_{n-1} x_0^{\ n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 .$$

Означення. Многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ називаються *тотожно рівними*, якщо вони приймають рівні значення при будь-якому значенні змінної x.

Тотожну рівність многочленів позначають знаком «≡», наприклад: $x^2 - 2x + 1 \equiv (x-1)^2$. Проте часто замість знаку «≡»пишуть просто «=», маючи на увазі, проте, саме тотожну рівність.

Зауваження. Формально кажучи, вираз вигляду $(x-1)^2$ не є многочленом (див. означення многочлена). Проте, оскільки сума, різниця і добуток многочленів зводяться до канонічного вигляду шляхом розкриття дужок і зведення подібних доданків, то вирази подібного вигляду (тобто вирази, отримані з многочленів канонічного вигляду за допомогою операцій суми, різниці і добутку), також можна розглядати як многочлени.

<u>Теорема 3.</u> Вільний член довільного многочлена $P(x)$ рівний $P(0)$; сума коефіцієнтів $P(x)$ рівна $P(1)$.

Доведення теореми здійснюється підстановками $x = 0$ і $x = 1$ в канонічний вираз (1):

$P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$;

$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

3. Знайдіть суму коефіцієнтів многочлена, отриманого після розкриття дужок і зведення подібних доданків у виразі $(x-1)^{1000} \cdot (x-2)^{2000} \cdot (x-3)^{3000}$.

Розв'язання. Позначимо даний вираз через $P(x)$. За теоремою 3 шукана сума коефіцієнтів рівна $P(1) = (1-1)^{1000} \cdot (1-2)^{2000} \cdot (1-3)^{3000} = 0$.

Відповідь: 0.

<u>Теорема 4.</u> Нехай $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами; нехай $a, b \in Z\ (a \neq b)$. Тоді $P(a) - P(b)$ ділиться на $(a-b)$.

Доведення Для нульового многочлена $P(x)$ твердження є очевидним. Якщо ж $P(x) \neq 0$, то запишемо цей многочлен у канонічному вигляді $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ і розглянемо різницю:

$$P(a) - P(b) = (c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0) - (c_n b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \ldots + c_1 b + c_0) =$$
$$= c_n (a^n - b^n) + c_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + c_1 (a - b)$$

Враховуючи розклад $a^k - b^k$ при парному та непарному k, кожна з дужок ділиться на $a - b$; отже, і весь вираз ділиться на $a - b$, що і треба було довести.

Означення. Число x_0 називається *коренем многочлена* $P(x)$, якщо $P(x_0) = 0$.

Наприклад, число 2 є коренем многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ і не є коренем многочлена $x^4+3x^3-5x^2+3x-7$.

4. Нехай $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, і $P(4)=25$. Чи може число 2 бути коренем цього многочлена?

Розв'язання. Згідно з теоремою 4, $\left(P(4)-P(2)\right)\vdots(4-2)$. Якщо 2 є коренем многочлена, то $P(2)=0$, тоді $P(4)-P(2)=25$, але 25 не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

Відповідь: не може.

Вправи

5. Знайдіть степінь многочлена: а) $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$;

б) $x^2-(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2$; в) $(x-1)^2+(x+1)^2-(x-3)^2-(x+3)^2$.

6. а) Відомо, що $2x+16=a(x^2+x+2)+(bx+c)(x+2)$. Знайдіть a,b,c.

Розв'язання. Згідно з означенням, два многочлени рівні, якщо рівні їхні відповідні коефіцієнти при невідомих, а тому

$$a(x^2+x+2)+(bx+c)(x+2)=x^2(a+b)+x(a+2b+c)+(2a+2c)\equiv 2x+16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0;\\a+2b+c=2;\\2a+2c=16;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a;\\a+2b+c=2;\\c=8-a;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a;\\a+2(-a)+(8-a)=2;\\c=8-a;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3;\\b=-3;\\c=5.\end{cases}$$

б) Відомо, що $x+2=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x+1)$. Знайдіть a,b,c.

7. а) Знайдіть який-небудь зведений многочлен п'ятого степеня $P(x)$ такий, що $P(-2)=-2, P(-1)=-1, P(0)=0, P(1)=1, P(2)=2$.

Розв'язання. Розглянемо многочлен $Q(x)=P(x)-x$, тоді $Q(-2)=P(-2)-(-2)=0$, тобто (-2) є коренем многочлена $Q(x)$, аналогічно $(-1),0,1,2$ - корені многочлена $Q(x)$. Так як степінь многочлена $P(x)$ дорівнює п'яти, то і степінь многочлена $Q(x)=P(x)-x$ дорівнює п'яти; многочлен $P(x)$ — зведений, його старший коефіцієнт дорівнює одиниці, тому і старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ дорівнює одиниці, тобто многочлен $Q(x)$ — зведений. Корені многочлена $Q(x)$ нам відомі, тому $Q(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$. А тоді шуканий многочлен $P(x)=Q(x)+x$; $P(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)+x$ або $P(x)=x^4-5x^2+x+4$.

б) Знайдіть який-небудь зведений многочлен четвертого степеня $P(x)$ такий, що $P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3, P(4)=4$.

Вказівка. Розгляньте многочлен $Q(x)=P(x)-x$.

8. При будь-якому $x\in N$ значення многочлена $P(x)$ є цілим числом. Чи вірно, що всі коефіцієнти $P(x)$ — цілі числа?

Вказівка. Вкажіть який-небудь многочлен з раціональними (не цілими) коефіцієнтами, який набуває цілочисельних значень при $x\in N$. Наприклад, $\frac{1}{2}x(x+1)$; $x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$; $\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$; $\frac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x+3)$. (У наведених прикладах враховано, що добуток k послідовних цілих чисел ділиться на $k!$ ($k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k$), а тому при будь-яких цілих (натуральних) x вказані многочлени набувають цілих значень).

Відповідь: не вірно.

9. а) Знайдіть a, якщо відомо, що $x=-1$ — корінь многочлена $(x^5-3)(4x+a)+(2x^2+a)(4x^4-2x^3-5)$.

Розв'язання. Позначимо многочлен $P(x)=(x^5-3)(4x+a)+$ $+(2x^2+a)(4x^4-2x^3-5)$, це є многочлен шостого степеня при будь-якому значенні a. Так як $x=-1$ - корінь цього многочлена, то $P(-1)=0$, а тоді $(-1-3)(-4+a)+(2+a)(4+2-5)=0 \Leftrightarrow (16-4a)+(2+a)=0 \Leftrightarrow a=6.$

Відповідь: $a=6$.

б) Знайдіть a, якщо відомо, що $x=1$ — корінь многочлена $(x^4+2)(3x-a)+(2x+a)(3x^3-1)$.

10. Доведіть, що многочлен $(x-a)(x-b)-1$, де $a,b\in N, a\neq b$, не має цілочисельного кореня.

Розв'язання. Позначимо $P(x)=(x-a)(x-b)-1$ — многочлен другого степеня. $P(a)=-1; P(b)=-1$. Нехай x_0 — цілочисельний корінь многочлена $P(x)$, тобто $P(x_0)=0$. Згідно з теоремою 4, $P(x_0)-P(a)$ ділиться на (x_0-a) і $P(x_0)-P(b)$ ділиться на (x_0-b). Маємо $\begin{cases} 1 \vdots (x_0-a); \\ 1 \vdots (x_0-b); \end{cases}$ а тому (x_0-a) і (x_0-b) можуть набувати значень (± 1). Оскільки за умовою $a\neq b$, то і $x_0-a\neq x_0-b$, звідки один вираз дорівнює 1, а другий (-1), а тоді: $P(x_0)=(x_0-a)(x_0-b)-1=1\cdot(-1)-1=-2\neq 0$, а це суперечить тому, що x_0 — корінь многочлена $P(x)$. Прийшли до суперечності, чим і доводиться, що даний многочлен не має цілочисельного кореня.

11. а) Відомо, що $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами і $P(2009)=1$. Доведіть, що $P(x)$ не може мати більше двох цілочисельних коренів.

Розв'язання. Позначимо через x_0 — цілочисельний корінь многочлена $P(x)$, тоді $P(x_0)=0$. Згідно з теоремою 4, $P(2009)-P(x_0)$ ділиться на $(2009-x_0)$. Маємо $1 \vdots (2009-x_0) \Leftrightarrow (2009-x_0)=\pm 1$. Останнє рівняння має два корені, а тому даний многочлен не може мати більше двох цілочисельних коренів.

б) Відомо, що $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами і $P(2)=-1$. Доведіть, що $P(x)$ не може мати більше двох цілочисельних коренів.

12. Нехай $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, причому $P(0)$ і $P(1)$ — парні числа. Доведіть, що $P(n)$ — парне число для будь-якого $n\in N$.

Вказівка. Використайте теорему 3.

13. а) Знайдіть суму коефіцієнтів при парних степенях многочлена $Q(x)=(2x^3+10x^2-x-10)^{1000}$.

Р о з в ' я з а н н я . Ми маємо многочлен 3000-го степеня.

Розглянемо задачу у загальному вигляді: нехай є многочлен у канонічному виді $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, скористаємося теоремою 3, тоді $P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ та $P(-1) = a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot (-1) + a_0$. Якщо додати отримані числа, отримаємо $P(1) + P(-1) = + \ldots + 2a_4 + 2a_2 + 2a_0$, а тому для отримання результату достатньо обчислити півсуму $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$. А тому $Q(1) = (2 + 10 - 1 - 10)^{1000} = 1;$ $Q(-1) = (-2 + 10 + 1 - 10)^{1000} = (-1)^{1000} = 1;$ і сума коефіцієнтів при парних степенях многочлена $Q(x)$ дорівнює $\frac{Q(1) + Q(-1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$.

В і д п о в і д ь : 1.

б) Знайдіть суму коефіцієнтів при парних степенях многочлена $Q(x) = (x^3 + 5x^2 + x - 5)^{10}$.

в) Знайдіть суму коефіцієнтів при парних степенях многочлена $Q(x) = (x^3 - 3x^2 + x + 3)^{2009}$.

г) Знайдіть суму коефіцієнтів при непарних степенях многочлена $P(x) = (2x^3 + 10x^2 - x - 10)^{10}$.

В к а з і в к а . Оцініть піврізницю $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$.

§ 2. Ділення многочленів з остачею

Многочлени, подібно до цілих чисел, можна не тільки додавати, віднімати і множити, але і ділити з остачею.

Означення. *Поділити з остачею* многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, що не є нульовим, — означає представити його у вигляді

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де $S(x)$, $R(x)$ — деякі многочлени і степінь многочлена $R(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$, або многочлен $R(x)$ — нульовий. Многочлен $P(x)$ називається *діленим*, $Q(x)$ — *дільником*, $S(x)$ — *часткою*, $R(x)$ — *остачею*.

Ділення з остачею многочлена на многочлен, що не є нульовим, завжди можливе; при цьому частка і остача визначаються однозначно (тут можна провести аналогію з операцією ділення з остачею для цілих чисел).

Якщо $R(x) = 0$, тобто $P(x) = S(x) \cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $P(x)$ *ділиться* на $Q(x)$, і позначають так: $P(x) \vdots Q(x)$. У цьому випадку многочлен $Q(x)$ називають *дільником* многочлена $P(x)$ (очевидно, що в цьому випадку і $S(x)$ є дільником многочлена $P(x)$, якщо тільки $S(x)$ не є нульовим). Якщо ж $R(x) \neq 0$, то $P(x)$ *не ділиться* на $Q(x)$.

Ділення з остачею зручно виконувати *«в стовпчик»*. Розглянемо цей алгоритм на прикладі.

14. Поділіть з остачею многочлен $4x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ на многочлен $2x^2 - x + 1$.

Розв'язання. Запишемо ділене і дільник «стовпчиком»:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 & \underline{2x^2 - x + 1} \end{array}$$

Підберемо одночлен виду ax^k так, щоб після множення на нього старший член дільника співпав із старшим членом діленого. Очевидно, це буде $2x^2$: справді, $2x^2(2x^2 - x + 1) = 4x^4 - \ldots$. Помножимо дільник на $2x^2$ і віднімемо його від діленого:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 & \underline{2x^2 - x + 1} \\ \underline{4x^4 - 2x^3 + 2x^2 \qquad\quad} & 2x^2 \\ 5x^3 - x^2 + 2x + 1 & \end{array}.$$

Тепер підберемо одночлен виду ax^k так, щоб після множення на нього старший член дільника співпав із старшим членом отриманого многочлена $5x^3 - x^2 + 2x + 1$. Це буде $\frac{5}{2}x$. Тоді:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 4x^4+3x^3+x^2+2x+1 \\ \underline{4x^4-2x^3+2x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{2x^2-x+1} \\ 2x^2+\frac{5}{2}x \end{array} \\
\quad 5x^3-x^2+2x+1 & \\
-\underline{5x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}x} & \\
\qquad \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1 &
\end{array},
$$

Знову підберемо многочлен виду ax^k описаним вище способом, це буде $\frac{3}{4}$, тоді:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 4x^4+3x^3+x^2+2x+1 \\ \underline{4x^4-2x^3+2x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{2x^2-x+1} \\ 2x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{4} \end{array} \\
\quad 5x^3-x^2+2x+1 & \\
-\underline{5x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}x} & \\
\qquad \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1 & \\
\qquad -\underline{\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}} & \\
\qquad\quad \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} &
\end{array}.
$$

Степінь многочлена $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ менший за степінь дільника $2x^2-x+1$, тому ділення з остачею завершено. Многочлен $2x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}$ є часткою, многочлен $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ — остачею від ділення.

Відповідь: $4x^4+3x^3+x^2+2x+1=(2x^2-x+1)\cdot\left(2x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)$.

Зауваження. Запис ділення в стовпчик без пояснень вже є повним розв'язанням цієї вправи. Докладні пояснення в завданні 14 були наведені для роз'яснення алгоритму.

Аналогічні дії можна провести для будь-яких інших многочленів $P(x)$ і $Q(x)\neq 0$. Це і показує можливість ділення з остачею.

Доведемо, що ділення з остачею при $Q(x)\neq 0$ завжди можна виконати єдиним способом. Припустимо, це не так, тобто, знайдуться такі многочлени $P(x)$ та $Q(x)\neq 0$ такі, що $P(x)$ можна поділити на $Q(x)\neq 0$ двома різними способами:

$$P(x)=S_1(x)\cdot Q(x)+R_1(x), \qquad P(x)=S_2(x)\cdot Q(x)+R_2(x).$$

Тоді: $(S_1(x)-S_2(x))\cdot Q(x)+(R_1(x)-R_2(x))=0$, звідки

$$(S_1(x)-S_2(x))\cdot Q(x)=R_2(x)-R_1(x) \qquad (2)$$

Нехай степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n. Якщо $S_1(x)\neq S_2(x)$, то степінь m многочлена $S_1(x)-S_2(x)$: $m\geq 0$, тоді (за теоремою 1) степінь многочлена-добутку $(S_1(x)-S_2(x))\cdot Q(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів-співмножників: степеневі многочлена $S_1(x)-S_2(x)$ плюс степінь многочлена $Q(x)$: $m+n\geq n$.

З іншого боку, за означенням остачі степінь r_1 многочлена $R_1(x)$ менший за степінь дільника $Q(x)$: $r_1<n$, степінь r_2 многочлена $R_2(x)$ також менший за степінь $Q(x)$: $r_2<n$; тоді (за теоремою 2) степінь многочлена $R_2(x)-R_1(x)$ не перевищує $\max(r_1,r_2)<n$.

Отримали суперечність (степінь правої частини рівності (2) менший за n, тоді як степінь лівої частини більший або рівний n). Отже, припущення невірне і $S_1(x)=S_2(x)$; тоді з рівності (2) випливає, що і $R_1(x)=R_2(x)$. Таким чином, **поділити з остачею многочлен на многочлен, що не є нульовим, завжди можна єдиним способом.**

15. При яких значеннях a многочлени $P(x)=2x^4+(18a+1)x^3+(9a-14)x^2-18x-8$ і $Q(x)=x^3+9ax^2-7x-6$ мають спільний корінь?

Розв'язання. Поділимо $P(x)$ на $Q(x)$ з остачею:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4+(18a+1)x^3+(9a-14)x^2-18x-8 & x^3+9ax^2-7x-6 \\
\underline{-\;2x^4+18ax^3-14x^2-12x\quad} & \overline{2x+1} \\
x^3+9ax^2-6x-8 & \\
\underline{-\;x^3+9ax^2-7x-6} & \\
x-2 &
\end{array}$$

Отже, $P(x)=(2x+1)\cdot Q(x)+(x-2)$. Якщо многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ мають спільний корінь x_0, то $P(x_0)=Q(x_0)=0$, звідки $x_0-2=0$, тобто $x_0=2$. Отже, спільним коренем многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ може бути тільки $x_0=2$ (відзначимо, що з наведених міркувань зовсім не випливає, що 2 неодмінно буде спільним коренем цих многочленів; нами показано лише, що у них не може бути іншого спільного кореня). Обчисливши $P(2)$ і $Q(2)$, знайдемо можливі значення a:

$$P(2)=2\cdot 2^4+(18a+1)\cdot 2^3+(9a-14)\cdot 2^2-18\cdot 2-8=0 \Leftrightarrow 180a-60=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3};$$

$$Q(2)=2^3+9a\cdot 2^2-7\cdot 2-6=0 \Leftrightarrow 36a-12=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $a=\frac{1}{3}$.

Вправи

16. Поділіть з остачею:

а) $4x^3 - x^2 + 5x + 3$ на $x^2 - x + 1$;   б) $6x^3 + x - 3$ на $3x^2 - 3x + 1$;

в) $x^3 - 7x + 2$ на $x + 1$;   г) $x^n - 1$ на $x - 1$;   д) $x^{10} + 1$ на $x - 1$.

П р и м і т к а. У відповідь треба включити не тільки остачу, але і частку. Краще всього записати відповідь у стандартному вигляді $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

17. При діленні многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x) \neq 0$ отримано частку $S(x)$ і остачу $R(x)$. Знайдіть частку і остачу від ділення $a\,P(x)$ на $b\,Q(x)$, де $a \neq 0,\ b \neq 0$.

18. Визначте, при яких значеннях a, b, c многочлен $x^4 + 5x^3 - 4ax^2 + 2bx + 6c$ ділиться на многочлен $x^3 + 2x^2 - 2ax + b$.

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 5x^3 - 4ax^2 + 2bx + 6c & x^3 + 2x^2 - 2ax + b \\ \hline -\ x^4 + 2x^3 - 2ax^2 + bx \qquad & x + 3 \\ 3x^3 - 2ax^2 + bx + 6c & \\ -\ 3x^3 + 6x^2 - 6ax + 3b & \\ \hline (-2a - 6)x^2 + (b + 6a)x + (6c - 3b) & \end{array}.$$

Оскільки $P(x) \vdots Q(x)$, то остача рівна нулю:

$$(-2a - 6)x^2 + (b + 6a)x + (6c - 3b) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6 = 0; \\ b + 6a = 0; \\ 6c - 3b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3; \\ b = 18; \\ c = 9. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $a = -3; b = 18;\ c = 9$.

19. а) Числа -1 і -3 є коренями многочлена $P(x)$, вільний член якого рівний 3. Знайдіть остачу від ділення $P(x)$ на $x^3 + 4x^2 + 3x$.

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо ділення многочлена $P(x)$ на многочлен третього степеня $x^3 + 4x^2 + 3x$, тоді остача від ділення має степінь менший за три або рівна нулю: $P(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x) \cdot S(x) + (ax^2 + bx + c)$. Визначимо невідомі коефіцієнти a, b, c, скористаємося теоремою 3:

$$\begin{cases} P(-1) = 0; \\ P(-3) = 0; \\ P(0) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot S(-1) + (a - b + c); \\ 0 = 0 \cdot S(-3) + (9a - 3b + c); \\ 3 = 0 \cdot S(0) + (0 + c); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0; \ \Big| \cdot (-3) \\ 9a - 3b + c = 0; \\ c = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2c = 0; \\ b = a + c; \\ c = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; \\ b = 4; \\ c = 3. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $x^2 + 4x + 3$.

б) Числа 1 і -2 є коренями многочлена $P(x)$, вільний член якого рівний 4. Знайдіть остачу від ділення $P(x)$ на $x^3 + x^2 - 2x$.

В к а з і в к а. Використайте теорему 3.

В і д п о в і д ь: $-2x^2 - 2x + 4$.

20. Доведіть, що многочлен $x^3 + 2$ не може ділитися на зведений квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами.

Р о з в ' я з а н н я. Виконаємо ділення многочлена $x^3 + 2$ на $x^2 + ax + b$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^3 + 2 \\ \underline{x^3 + ax^2 + bx} \end{array} & \begin{array}{l} x^2 + ax + b \\ \hline x - a \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} -ax^2 - bx + 2 \\ \underline{-ax^2 - a^2x - ba} \end{array} & \\
\qquad (a^2 - b)x + (2 + ba) &
\end{array}.
$$

Остача $(a^2 - b)x + (2 + ba) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b = 0; \\ 2 + ba = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2; \\ a^3 + 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt[3]{2}; \\ b = \sqrt[3]{4}. \end{cases}$

Отримана система не має цілочисельних розв’язків, а тому многочлен $x^3 + 2$ не ділиться на зведений квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами.

§ 3. Теорема Безу

Етьєнн Безу (1739 − 1783) – французький математик, член Паризької Академії наук, автор шеститомного «Курсу математики» (1764 – 1769). Основні його праці присвячені вищій алгебрі, елементарній алгебрі (дослідження систем алгебраїчних рівнянь вищих степенів, виключення невідомих у таких системах) та зовнішній балістиці.

Теорема 5 (теорема Безу). Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x-a$ дорівнює $P(a)$.

Доведення. Поділимо $P(x)$ на $x-a$ з остачею: $P(x)=(x-a)\cdot S(x)+R(x)$. За означенням степінь многочлена $R(x)$ менший, ніж степінь многочлена $x-a$, або $R(x)$ не має степеня; отже, $R(x)$ є многочленом степеня 0 або нуль-многочленом, тобто є числом: $R(x)=r$. Тоді $P(a)=(a-a)\cdot S(a)+r=r$, що і треба було довести.

21. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)=4x^6-3x^5+2x^3-x^2+7x-6$ на $x-1$.

Розв'язання. За теоремою Безу шукана остача $P(1)=4-3+2-1+7-6=3$.

***Наслідок 1* (з теореми Безу). Многочлен $P(x)$ ділиться на $x-a$ тоді і тільки тоді, коли число a є коренем многочлена $P(x)$.**

22. Доведіть, що $\left(x^n-a^n\right)\vdots\,(x-a)$ при будь-якому $n\in N$.

Розв'язання. За наслідком 1 з теореми Безу многочлен $P(x)$ ділиться на $(x-a)$ тоді і тільки тоді, коли $P(a)=0$. В даному випадку $P(x)=x^n-a^n$, і $P(a)=a^n-a^n=0\Rightarrow P(x)\vdots(x-a)$.

***Наслідок 2* (з теореми Безу). Якщо $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — різні корені многочлена $P(x)$, то $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)\cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.**

Доведення. Оскільки a_1 — корінь многочлена $P(x)$, то $P(x)\vdots(x-a_1)$, тобто $P(x)=(x-a_1)\cdot Q_1(x)$, де $Q_1(x)$ — деякий многочлен. Число a_2 є коренем многочлена $Q_1(x)$, оскільки $P(a_2)=0; P(a_2)=(a_2-a_1)\cdot Q_1(a_2)$, але $a_2-a_1\neq 0$, отже, $Q_1(a_2)=0$. Це означає, що $Q_1(x)\vdots(x-a_2)$, тобто $Q_1(x)=(x-a_2)\cdot Q_2(x)$, де $Q_2(x)$ – деякий многочлен. Тоді $P(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot Q_2(x)$. Аналогічно можна показати, що $Q_2(x)\vdots(x-a_3)$ і що $P(x)$ можна представити у вигляді $P(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot Q_3(x)$ і так далі. Зрештою, отримаємо: $P(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)\cdot Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ — деякий многочлен, що і потрібно було довести.

***Наслідок 3* (з теореми Безу). Ненульовий многочлен n-го степеня не може мати більше n різних коренів.**

Доведення. Припустимо протилежне: многочлен $P(x)$ степеня n має m різних коренів, причому $m>n$. Тоді:

$$P(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_m) \cdot Q(x) \qquad (3)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_m$ - корені многочлена $P(x)$, а $Q(x)$ - деякий многочлен, що не є нульовим. Степінь лівої частини рівності (3) рівний n, тоді як степінь його правої частини не нижчий, ніж m (чому?) – отримали суперечність. Отже, многочлен $P(x)$ не може мати більше, ніж n коренів, що і потрібно було довести.

Цей наслідок можна сформулювати інакше.

<u>Наслідок 3' (з теореми Безу).</u> **Якщо многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ має більше *n* різних коренів, то він є нульовим.**

<u>Теорема 6.</u> Многочлени $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ і $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли $a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots,\ a_1 = b_1; a_0 = b_0$.

Доведення. Достатність. Якщо $a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots,\ a_1 = b_1; a_0 = b_0$, то для будь-якого x_0:

$$P(x_0) = a_n x_0{}^n + a_{n-1} x_0{}^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = b_n x_0{}^n + b_{n-1} x_0{}^{n-1} + \ldots + b_1 x_0 + b_0 = Q(x_0).$$

Необхідність. Нехай $P(x) = Q(x)$. Розглянемо многочлен:

$$S(x) = P(x) - Q(x) = (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0).$$

За умовою многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ приймають рівні значення при будь-якому x, тобто $S(x) = 0$ для будь-якого x. Тоді многочлен $S(x)$ — нульовий: припустимо, що це не так. Нехай степінь n многочлена $S(x)$ $n \geq 0$. Будь-яке дійсне число є коренем многочлена $S(x)$, тоді як за наслідком 3 з теореми Безу він не може мати більш n різних коренів. Отримана суперечність показує, що $S(x)$ є нульовий многочлен, а це означає, що всі його коефіцієнти рівні нулю, тобто $a_n - b_n = 0,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0,\ \ldots,\ a_1 - b_1 = 0,\ a_0 - b_0 = 0$, звідки і слідує рівність відповідних коефіцієнтів многочленів $P(x)$ і $Q(x)$, що і потрібно було довести.

23. а) При яких значеннях a, b многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 6x + 1$ є квадратом деякого іншого многочлена?

Розв'язання. Припустимо, $P(x) = (Q(x))^2$, де $Q(x)$ — деякий многочлен. Тоді так як степінь многочлена $P(x)$ дорівнює 4, степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює 2. Отже, $Q(x)$ має вигляд $\pm(x^2 + px + q)$ (чому його старший коефіцієнт рівний ±1?), тоді:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 6x + 1 = \left(\pm(x^2 + px + q)\right)^2 = \left(x^2 + px + q\right)^2 =$$
$$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2.$$

Многочлени $P(x)$ і $(Q(x))^2$ будуть тотожно рівними тоді і тільки тоді, коли будуть рівними їх коефіцієнти при однакових степенях, тобто:

$$\begin{cases} 2p = a, \\ p^2 + 2q = b, \\ 2pq = -6, \\ q^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2p, \\ b = p^2 + 2q, \\ p = -\dfrac{3}{q}, \\ q = \pm 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \mp 6, \\ b = 9 \pm 2, \\ p = \mp 3, \\ q = \pm 1, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -6, \\ b = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 6, \\ b = 7. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $a = -6,\ b = 11$ або $a = 6,\ b = 7$.

б) При яких значеннях a, b многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$ є квадратом деякого іншого многочлена?

Відповідь: $a = -4,\ b = 8$ або $a = 4,\ b = 0$.

Для ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $(x - a)$ існує спеціальний алгоритм, який носить назву *схеми Горнера*.

Намалюємо табличку, що складається з двох рядків і $n + 2$ стовпців. У першому рядку перший стовпчик пропускаємо, починаючи з другого стовпця запишемо коефіцієнти многочлена-діленого (їх має бути $n + 1$ штук: $a_n; a_{n-1}; \ldots; a_1; a_0$); у другому рядку перший стовпчик пропускаємо, починаючи з другого стовпця запишемо коефіцієнти многочлена-дільника (їх має бути n штук: $b_{n-1}; b_{n-2}; \ldots; b_1; b_0$); в останній комірці другого рядка запишемо остачу від ділення r; у першому стовпці другого рядка запишемо значення змінної $x = a$:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_0	r

Проведемо теоретичне дослідження. Нехай

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - a) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

Розкривши дужки в правій частині і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - a \cdot b_{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - a \cdot b_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_0 - a \cdot b_1, \\ a_0 = r - a \cdot b_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + a \cdot b_{n-1}, \\ b_{n-3} = a_{n-2} + a \cdot b_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 = a_1 + a \cdot b_1, \\ r = a_0 + a \cdot b_0. \end{cases}$$

Отримані рівності дозволяють запропонувати наступний алгоритм заповнення другого рядка таблиці: у першому стовпці другого рядка записуємо значення змінної $x = a$. Далі зносимо коефіцієнт a_n, бо $b_{n-1} = a_n$:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$		$\ldots$		

Далі почнемо заповнювати комірки другого рядка, рухаючись зліва направо. Кожне наступне число буде рівне сумі числа, що стоїть над ним, і помноженого на a числа, що стоїть зліва від нього:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	$b_{n-2} = a_{n-1} + a \cdot b_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + a \cdot b_1$	$r = a_0 + a \cdot b_0$

У результаті в нижньому рядку отримаємо коефіцієнти частки $b_{n-1};b_{n-2};\ldots;b_1;b_0$ і остачу r.

24. Поділіть з остачею многочлен $5x^4 + 12x^3 - 6x + 3$ на двочлен $x + 2$.

Розв'язання. Застосуємо схему Горнера (в даному випадку $a = -2$), маємо многочлен четвертого степеня, тому записуємо п'ять коефіцієнтів при невідомих:

	5	12	0	-6	3
-2	5	$12 + 5 \cdot (-2) = 2$	$0 + 2 \cdot (-2) = -4$	$-6 + (-4) \cdot (-2) = 2$	$3 + 2 \cdot (-2) = -1$

Таким чином, частка дорівнює $5x^3 + 2x^2 - 4x + 2$, остача рівна -1.

Відповідь: $5x^4 + 12x^3 - 6x + 3 = (5x^3 + 2x^2 - 4x + 2)(x + 2) - 1$.

Теорема Безу дозволяє представити довільний многочлен $P(x)$ у вигляді $(x - a) \cdot Q(x)$, якщо відомий корінь a цього многочлена. Для многочленів другого, третього і четвертого степенів є формули для знаходження коренів за коефіцієнтами многочлена, але навіть для многочленів третього степеня ці формули мають вельми громіздкий вигляд і представляють швидше теоретичний, ніж практичний інтерес. Для многочленів п'ятого та вищих степенів таких формул і зовсім не існує, як не існує і якого-небудь алгоритму, що дозволяє знайти всі корені даного многочлена. Проте для *пошуку раціональних коренів многочленів* існує простий алгоритм, що дозволяє за скінченне число кроків знайти всі раціональні корені многочлена будь-якого степеня. З таким алгоритмом ми познайомимося в наступному параграфі.

Вправи

25. а) Знайдіть частку і остачу від ділення многочлена $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 3$ на двочлени $x + 1$; $x - 1$.

б) Знайдіть частку і остачу від ділення многочлена $3x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 3$ на двочлени $3x + 1$; $2x - 1$.

Вказівка: у пункті б) скористайтесь висновками задачі **17**.

в) Знайдіть частку і остачу від ділення многочлена $x^{100} + x + 1$ на двочлени $x + 1$; $x - 1$.

Розв'язання. Застосуємо схему Горнера, маємо многочлен сотого степеня, тому записуємо сто один коефіцієнт при невідомих (три коефіцієнти рівні одиниці, дев'яносто вісім – нулі):

	1	0	0	0	…	0	0	1	1
-1	1	-1	1	-1	…	-1	1	0	1

Таким чином, частка в і д ділення на $x+1$ дорівнює $x^{99}-x^{98}+x^{97}-x^{96}+...+x^3-x^2+x+0$, остача рівна 1.

	1	0	0	0	…	0	0	1	1
1	1	1	1	1	…	1	1	2	3

Таким чином, частка від ділення на $x-1$ дорівнює $x^{99}+x^{98}+...+x^2+x+2$, остача рівна 3.

г) Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^{100}+x+1$ на тричлен x^2+x-2.

Р о з в ' я з а н н я. Остача від ділення многочлена $x^{100}+x+1$ на многочлен другого степеня є многочлен меншого степеня або нуль-многочлен, тому: $x^{100}+x+1=\left(x^2+x-2\right)\cdot S(x)+(ax+b)$, звідки при $x=1$ і $x=-2$ отримаємо:

$$\begin{cases} 3=a+b, & \cdot(-1) \\ 2^{100}-1=-2a+b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4+2^{100}=-3a, \\ b=3-a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4-2^{100}}{3}, \\ b=\dfrac{5+2^{100}}{3}. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь. Остача $\dfrac{4-2^{100}}{3}\cdot x+\dfrac{5+2^{100}}{3}$.

д) Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^{100}+x+1$ на тричлен x^2-1.

26. При яких значеннях a многочлен $x^4-2x^3+x^2+ax+3$ при діленні на $x-2$ дає остачу, рівну 5?

Р о з в ' я з а н н я. 1-й спосіб. Застосуємо схему Горнера, маємо многочлен четвертого степеня, $x=2,\ r=5$:

	1	-2	1	a	3
2	1	0	1	$a+2$	$2a+7=5$

Звідки $a=-1$.

2-й спосіб. За теоремою Безу $P(2)=5$, $P(2)=16-16+4+2a+3=2a+7$. А тоді $2a+7=5$ і $a=-1$.

В і д п о в і д ь. $a=-1$.

27. а) Визначте, при яких значеннях a многочлен $3a^2x^3-4ax+1$ ділиться на двочлен $x-1$.

Р о з в ' я з а н н я. Многочлен $P(x)=3a^2x^3-4ax+1$ ділиться на двочлен $x-1$, якщо $P(1)=0 \Leftrightarrow 3a^2-4a+1=0 \Leftrightarrow 3\left(a-\dfrac{1}{3}\right)\left(a-1\right)=0.$

Відповідь. $a=\frac{1}{3}$; $a=1$.

б) Визначте, при яких значеннях a многочлен $a^2x^2-6ax+8$ ділиться на двочлен $x-2$.

Відповідь. $a=1$; $a=2$.

28. Доведіть, що $x^3-3abx+a^3+b^3$ ділиться на $(x+a+b)$ при будь-яких a,b.

Вказівка. Обчисліть $P(-a-b)$.

29. Відомо, що остача від ділення многочлена $P(x)$ на $x-1$ дорівнює 3, а остача від ділення $P(x)$ на $x+1$ дорівнює 1. Знайдіть остачу від ділення $P(x)$ на x^2-1.

Вказівка. Скористайтесь розкладом $P(x)=\left(x^2-1\right)\cdot S(x)+(ax+b)$ і обчисліть $P(1)$ і $P(-1)$ та визначте коефіцієнти a,b.

Відповідь. $x+2$.

30. Знайдіть остачу від ділення многочлена x^n-1 на x^2-1 ($n\in N, n\geq 2$).

Вказівка. Розгляньте окремо $n=2k,\ k\in N$ і $n=2k+1,\ k\in N$. Скористайтесь розкладом $P(x)=x^n-1=\left(x^2-1\right)\cdot S(x)+(ax+b)$ і обчисліть $P(1)$ і $P(-1)$ та визначте коефіцієнти a,b.

Відповідь. При $n=2k,\ k\in N$ остача $r=0$; при $n=2k+1,\ k\in N$ остача $r=x-1$.

31. Многочлен $P\left(x^k\right)$ ділиться на $x-1$. Доведіть, що він ділиться і на x^k-1.

Примітка. Многочлен $P\left(x^k\right)$— це вираз, отриманий після підстановки x^k замість x в канонічний вираз (1): $P\left(x^k\right)=a_n\left(x^k\right)^n+a_{n-1}\left(x^k\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(x^k\right)+a_0$.

Вказівка. Скористайтесь тим, що многочлен $P\left(x^k\right)$ ділиться на $x-1$, тобто $P(1)=0$, а отже сума коефіцієнтів многочлена $P\left(x^k\right)$ дорівнює нулю.

32. Доведіть, що $(x+1)^8-x^8-2x-1$ ділиться на многочлен $x(x+1)(2x+1)$.

Вказівка. Обчисліть значення многочлена $(x+1)^8-x^8-2x-1$ при $x=0$, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$.

33. Відомо, що $a\neq 0$. Доведіть, що:

а) якщо n — парне, то $\left(x^n-a^n\right)\vdots(x+a)$, $\left(x^n+a^n\right)$ не ділиться на $(x+a)$;

б) якщо n — непарне, то $\left(x^n-a^n\right)$ не ділиться на $(x+a)$, $\left(x^n+a^n\right)\vdots(x+a)$.

Вказівка. Обчисліть значення вказаних многочленів при $x=-a,\ x=a$.

34. Нехай $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Рівняння $P(x)=1$ має чотири різні цілі корені. Доведіть, що рівняння $P(x)=-1$ не має цілочисельних розв'язків.

Вказівка. Розгляньте многочлен $Q(x)=P(x)-1$ з цілими коефіцієнтами, він має чотири різні цілі корені, тобто $Q(x)=P(x)-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)S(x)$, причому $S(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами (чому?), і нехай x_0 – цілий корінь рівняння $P(x)=-1$, тобто $P(x_0)=-1$.

Тоді $P(x_1)=1$, $P(x_2)=1$, $P(x_3)=1$, $P(x_4)=1$, і $\left(P(x_1)-P(x_0)\right)\vdots(x_1-x_0)$, $2\vdots(x_1-x_0)$, аналогічно, $2\vdots(x_2-x_0)$, $2\vdots(x_3-x_0)$, $2\vdots(x_4-x_0)$. Усі цілі дільники числа 2 – це $\{\pm1;\pm2\}$, вирази (x_i-x_0) усі різні і набувають значень $\{-1;1;-2;2\}$. Тоді з $Q(x_0)=P(x_0)-1=(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)S(x_0)$ отримаємо $-2=1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-2)\cdot S(x_0)\Rightarrow S(x_0)=-\frac{1}{2}$, що неможливо.

35. Спростіть вираз $P(x)=\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+$
$+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}-1$, де a,b,c,d – різні довільні числа.

Вказівка. Доведіть, що многочлен $P(x)$ степеня не вище третього і має, щонайменше, чотири різні корені, а тому є нуль-многочленом.

§ 4. Пошук раціональних коренів многочлена

<u>Т е о р е м а 7.</u> Нехай:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

многочлен з цілими коефіцієнтами, $a = \dfrac{k}{m}$ **– його раціональний ненульовий корінь, причому дріб – нескоротний. Тоді** $a_0 \vdots k, a_n \vdots m$ **(чисельник дробу є дільником вільного члена, а знаменник – дільником старшого коефіцієнта).**

Д о в е д е н н я. За умовою $a_n \dfrac{k^n}{m^n} + a_{n-1} \dfrac{k^{n-1}}{m^{n-1}} + \ldots + a_1 \dfrac{k}{m} + a_0 = 0$. Помножимо обидві частини цієї рівності на m^n і перенесемо останній доданок в праву частину: $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} m + \ldots + a_1 k m^{n-1} = -a_0 m^n$.

Усі доданки лівої частини діляться на k – отже $\left(a_0 m^n\right) \vdots k$. Оскільки НСД$(k,m) = 1$ (з умови нескоротності дробу), то і НСД$\left(k, m^n\right) = 1$, і тоді $a_0 \vdots k$.

Доведення другого твердження є аналогічним:

$$-a_n k^n = a_{n-1} k^{n-1} m + \ldots + a_1 k m^{n-1} + a_0 m^n.$$

Доведіть його самостійно.

<u>Н а с л і д о к (з т е о р е м и 7).</u> **Нехай** $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **- зведений многочлен з цілими коефіцієнтами,** a **– його раціональний ненульовий корінь. Тоді** $a \in Z$ **і** $a_0 \vdots a$**.**

Як видно із сформульованого наслідку, зведений многочлен з цілими коефіцієнтами не може мати раціонального нецілого кореня.

П р и м і т к а. Підкреслимо, що теорема 7 і наслідок з неї застосовні лише для пошуку н е н у л ь о в и х коренів многочленів. Очевидно, що *нульовим коренем* многочлен володіє тоді і тільки тоді, коли його вільний член рівний нулю.

З використанням теореми 7 пошук раціонального кореня будь-якого многочлена зводиться до простого перебору всіх можливих значень дробів, чисельник яких є дільником вільного члена, а знаменник – дільником старшого коефіцієнта. Розберемо застосування цієї теореми на прикладі.

36. Знайдіть всі раціональні корені многочлена $10x^4 - 3x^3 + 29x^2 - 9x - 3$. Знайдіть розклад даного многочлена на множники.

Р о з в ’ я з а н н я. Очевидно, $x = 0$ не є коренем даного многочлена. Усі ненульові раціональні корені за теоремою 7 мають вигляд $\dfrac{k}{m}$, де НСД$(k,m) = 1$, $(-3) \vdots k,\ 10 \vdots m$. Випишемо усі можливі значення $\dfrac{k}{m}$: $\pm 1; \pm 3;\ \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{3}{2};\ \pm\dfrac{1}{5}; \pm\dfrac{3}{5};$ $\pm\dfrac{1}{10}; \pm\dfrac{3}{10}$.

Виконавши підстановку, ми переконуємося що числа $-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}$ є коренями даного многочлена:

	10	-3	29	-9	-3
$-\frac{1}{5}$	10	-5	30	-15	0

Виконавши ділення на двочлен $\left(x+\frac{1}{5}\right)$, отримаємо:

$$10x^4-3x^3+29x^2-9x-3=\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot(10x^3-5x^2+30x-15).$$

	10	-5	30	-15
$\frac{1}{2}$	10	0	30	0

$10x^4-3x^3+29x^2-9x-3=10\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+3)$. Останній множник не можна розкласти на лінійні множники у множині дійсних чисел.

Відповідь: корені многочлена $-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}$; $10\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+3)$ - розклад даного многочлена на множники.

37. Розв'яжіть рівняння $6x^5+5x^4+4x^3-2x^2-x=0$.

Розв'язання. Оскільки

$$6x^5+5x^4+4x^3-2x^2-x=x\cdot(6x^4+5x^3+4x^2-2x-1),$$

то коренями даного рівняння будуть $x=0$ і всі корені многочлена

$$P(x)=6x^4+5x^3+4x^2-2x-1.$$

За наслідком з теореми 7 ненульові раціональні корені многочлена $P(x)$ слід шукати серед чисел $\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{6}$. Безпосередньою підстановкою переконуємося, що числа $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}$ є коренями цього многочлена.

	6	5	4	-2	-1
$\frac{1}{2}$	6	8	8	2	0
$-\frac{1}{3}$	6	6	6	0	

Виконавши ділення, отримаємо:

$$6x^4+5x^3+4x^2-2x-1=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1).$$

Останній множник не має коренів у множині дійсних чисел.

Відповідь: $-\frac{1}{3};0;\frac{1}{2}$.

Зауваження. При розв'язанні задачі **37** можна відмітити наступне: після того, як знайшли перший раціональний корінь многочлена $x=\frac{1}{2}$ і поділили на двочлен $\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $6x^4+5x^3+4x^2-2x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(6x^3+8x^2+8x+2)$, отримали многочлен-частку $S(x)=6x^3+8x^2+8x+2$, усі коефіцієнти якого додатні. Очевидно, якщо $x\ge 0$, то і $S(x)>0$, тобто многочлен $S(x)$ не може мати додатних коренів. Тому, виконуючи підстановку, можна було обмежитися лише розглядом від'ємних значень. Це дозволило б скоротити обчислювальну роботу.

Вправи

38. Знайдіть всі раціональні корені многочленів:

а) x^3-6x+4; б) x^4-x^2-x-10; в) $9x^4-18x^3+11x^2+2x-8$;

г) $10x^4+13x^3+12x^2+2x-1$; д) $12x^5-26x^4+14x^3-22x^2+2x+4$.

39. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^3+2x^2-6x+1=0$; б) $15x^4-x^3+9x^2-x-6=0$;

в) $22x^6+59x^5-x^4+53x^3-23x^2-6x=0$.

40. Доведіть, що рівняння $x^p+x^{p-1}+\ldots+x^2+x+p=0$, де p — просте число, не має раціональних коренів.

Вказівка. Рівняння не може мати додатних коренів (чому?), перевірте значення: $-1, -p$.

§ 5. Розкладання многочлена на множники

Із шкільного курсу алгебри відомі деякі прийоми *розкладу многочленів на множники*: винесення спільного множника за дужки, групування доданків, застосування формул скороченого множення, введення додаткових доданків (наприклад, доповнення до квадрата суми), заміна змінної. У § 3 був розглянутий ще один спосіб, який дає можливість представити многочлен у вигляді добутку многочленів меншого степеня, якщо відомий один або декілька коренів цього многочлена. У цьому параграфі ми дамо деякі відомості теоретичного характеру.

Деякі многочлени можна розкласти на множники, що є многочленами менших степенів – наприклад:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+2)(x+1)(x-2).$$

Для інших многочленів (наприклад, $x^2 - 4x + 5$) такий розклад неможливий.

Означення. Многочлени степеня 1 або вище, які не можна представити у вигляді добутку декількох многочленів степеня 1 або вище, називаються *такими, що не зводяться (незвідними);* многочлени степеня 1 або вище, які можна представити у вигляді добутку декількох многочленів степеня 1 або вище, називаються *такими, що зводяться (звідними).*

Многочлени степенів 0 і $-\infty$ не відносять ні до тих, що зводяться, ні до тих, що не зводяться.

Відзначимо, що іноді незвідність многочлена помилково ототожнюється з відсутністю у нього коренів. Насправді має місце наслідок тільки в один бік: якщо многочлен не зводиться, то він не має коренів (це легко довести за допомогою наслідка 1 з теореми Безу). Зворотне ж твердження невірне: так, наприклад, многочлен $x^4 + 4$ не має коренів, проте є таким, що зводиться. Многочлени, що не зводяться, — це в деякому роді аналог простих чисел. Справедлива теорема, аналогічна основній теоремі арифметики.

Теорема 8. Будь-який зведений многочлен степеня 1 або вище розкладається на добуток зведених многочленів, що не зводяться, єдиним (з точністю до порядку слідування множників) способом.

Основна ідея доведення теореми 8 – така ж, як у основної теореми арифметики.

Зауваження. У теоремі 8 мова йде тільки про зведені многочлени, оскільки для незведених многочленів порушується єдиність розкладання. Наприклад: $30x^2 + 5x - 5 = (3x-1)(10x+5) = (15x-5)(2x+1) = 5(3x-1)(2x+1)$.

Теорема 9. Всі многочлени першого степеня і многочлени другого степеня з від'ємним дискримінантом є такими, що не зводяться на множині дійсних чисел. Всі многочлени другого степеня з невід'ємним дискримінантом і многочлени степенів вищих за два є такими, що зводяться на множині дійсних чисел.

Твердження теореми щодо многочленів першого степеня є очевидним. Доведення теореми для многочленів другого степеня ми пропонуємо вам як завдання для самостійного розв'язання. Доведення теореми для многочленів третього і вищих степенів ми не розглядатимемо.

Вправа

41. Доведіть, що квадратний тричлен не зводиться тоді і тільки тоді, коли його дискримінант від'ємний.

Вказівка. Необхідно довести два твердження:

1) якщо квадратний тричлен не зводиться, то його дискримінант від'ємний;

2) якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то цей тричлен не зводиться.

Обидва твердження зручно доводити методом «від супротивного».

§ 6. Найбільший спільний дільник многочленів

Означення. *Найбільшим спільним дільником* двох многочленів $P(x)$ і $Q(x)$, хоч би один з яких не є нульовим, називається многочлен найбільшого степеня $S(x)$ такий, що $P(x) \vdots S(x)$ і $Q(x) \vdots S(x)$. Найбільший спільний дільник многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ позначають через НСД($P(x), Q(x)$).

Найбільший спільний дільник визначений неоднозначно: наприклад, найбільшим спільним дільником многочленів $x^2 - 3x + 2$ і $x^2 - 1$ є і многочлен $x - 1$, і многочлен $3x - 3$, і многочлен $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, і будь-який многочлен вигляду $k(x-1)$, де $k \neq 0$. Це слідує з того, що якщо $P(x) \vdots Q(x)$, то $P(x) \vdots (kQ(x))$, де $k \neq 0$.

Найбільший спільний дільник многочленів визначений з точністю до множення на ненульову константу. Часто найбільший спільний дільник вибирають так, щоб його старший коефіцієнт був рівний 1.

Шукати найбільший спільний дільник многочленів можна двома основними способами: *розкладанням на множники, що не зводяться*, і за допомогою *алгоритму Евкліда*. Сформулюємо дві теореми, на які спираються ці методи.

Теорема 10. Нехай:

$$P(x) = p \cdot (S_1(x))^{\alpha_1} \cdot (S_2(x))^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (S_n(x))^{\alpha_n},$$
$$Q(x) = q \cdot (S_1(x))^{\beta_1} \cdot (S_2(x))^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot (S_n(x))^{\beta_n},$$

де $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x)$ **– різні многочлени, що не зводяться,** $\alpha_i, \beta_i \in N \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq n$, $p, q \neq 0$**. Тоді:**

$$\text{НСД}\,(P(x), Q(x)) = k \cdot (S_1(x))^{\gamma_1} \cdot (S_2(x))^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot (S_n(x))^{\gamma_n},$$

де $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$**,** $1 \leq i \leq n$, $k \neq 0$**.**

Теорема 11. Нехай $P(x)$**,** $Q(x)$ **– многочлени, що не є нульовими, і степінь многочлена** $P(x)$ **не менший степеня многочлена** $Q(x)$**. Нехай також:**

$$P(x) = S_1(x)Q(x) + R_1(x),$$
$$Q(x) = S_2(x)R_1(x) + R_2(x),$$
$$R_1(x) = S_3(x)R_2(x) + R_3(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{n-2}(x) = S_n(x)R_{n-1}(x) + R_n(x),$$
$$R_{n-1}(x) = S_{n+1}(x)R_n(x),$$

тоді остання відмінна від нуля остача в алгоритмі Евкліда (з точністю до сталого множника) є НСД ($P(x), Q(x)$**)=**$kR_n(x)$**, де** $k \neq 0$**.**

Розберемо процес знаходження найбільшого спільного дільника на прикладах.

42. Знайдіть НСД($x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x;\ x^4 - 9x^2 - 4x + 12$).

Р о з в ’ я з а н н я. 1-й спосіб. Розкладемо многочлени на незвідні множники, для цього перевіримо чи є у них раціональні корені:

$P(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6)$, перевіряємо дільники числа 6:

	1	3	-3	-7	6
1	1	4	1	-6	0
1	1	5	6	0	
-2	1	3	0		
-3	1	0			

Розклад многочлена $P(x)$ на незвідні множники: $P(x) = x \cdot (x-1)^2 (x+2)(x+3)$.

$Q(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$:

	1	0	-9	-4	12
1	1	1	-8	-12	0
3	1	4	4	0	
-2	1	2	0		
-2	1	0			

Розклад многочлена $Q(x)$ на незвідні множники: $Q(x) = (x-1)(x-3)(x+2)^2$.

Тоді НСД ($x(x-1)^2(x+2)(x+3); (x-1)(x-3)(x+2)^2$) $= (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$.

2-й спосіб. Застосуємо алгоритм Евкліда:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,\begin{array}{l} x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x \\ \underline{x^5 \qquad - 9x^3 - 4x^2 + 12x} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^4 - 9x^2 - 4x + 12} \\ x + 3 \end{array} \\
\qquad 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 6x & \\
\quad -\,\underline{3x^4 \qquad - 27x^2 - 12x + 36} & \\
\qquad\quad \underline{6x^3 + 24x^2 + 6x - 36} & \\
\qquad\quad 6(x^3 + 4x^2 + x - 6) &
\end{array}.
$$

Поділивши всі коефіцієнти многочлена $6x^3 + 24x^2 + 6x - 36$ на 6 (найбільший спільний дільник від цього не зміниться), отримаємо многочлен $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Наступний крок алгоритму:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,\begin{array}{l} x^4 + 0x^3 - 9x^2 - 4x + 12 \\ \underline{x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^3 + 4x^2 + x - 6} \\ x - 4 \end{array} \\
\qquad -4x^3 - 10x^2 + 2x + 12 & \\
\quad -\,\underline{-4x^3 - 16x^2 - 4x + 24} & \\
\qquad\qquad \underline{6x^2 + 6x - 12} & \\
\qquad\qquad 6(x^2 + x - 2) &
\end{array}.
$$

Наступний крок алгоритму:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3+4x^2+x-6 \\ \underline{x^3+x^2-2x} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+x-2} \\ x+3 \end{array} \\
\begin{array}{r} 3x^2+3x-6 \\ -\underline{3x^2+3x-6} \\ 0 \end{array} &
\end{array}.
$$

Найбільший спільний дільник початкових многочленів — це остання ненульова остача, тобто x^2+x-2.

Відповідь: x^2+x-2.

43. Знайдіть НСД $(10x^4-3x^3+29x^2-9x-3; 10x^4-13x^3+12x^2-2x-1)$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Розкладемо многочлени на многочлени, що не зводяться (перевіримо чи є раціональні корені):

	10	-3	29	-9	-3
$\frac{1}{2}$	10	2	30	6	0
$-\frac{1}{5}$	10	0	30	0	

	10	-13	12	-2	-1
$\frac{1}{2}$	10	-8	8	2	0
$-\frac{1}{5}$	10	-10	10	0	

$$10x^4-3x^3+29x^2-9x-3=10\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+3);$$

$$10x^4-13x^3+12x^2-2x-1=10\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-x+1),$$

(відмітимо, що многочлени $x^2+3; x^2-x+1$ не зводяться, оскільки їхні дискримінанти від'ємні). Тоді (за теоремою 10):

НСД $(10x^4-3x^3+29x^2-9x-3; 10x^4-13x^3+12x^2-2x-1)=10\left(x+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=$

$=10x^2-3x-1$.

2-й спосіб. Застосуємо алгоритм Евкліда:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 10x^4-3x^3+29x^2-9x-3 \\ \underline{10x^4-13x^3+12x^2-2x-1} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{10x^4-13x^3+12x^2-2x-1} \\ 1 \end{array} \\
10x^3+17x^2-7x-2 &
\end{array}.
$$

Наступний крок алгоритму:

$$\begin{array}{l|l}
-\underline{\begin{array}{l}10x^4-13x^3+12x^2-2x-1\\ 10x^4+17x^3-7x^2-2x\end{array}} & \begin{array}{l}10x^3+17x^2-7x-2\\ \hline x-3\end{array}\\
\quad -\underline{\begin{array}{l}-30x^3+19x^2-1\\ -30x^3-51x^2+21x+6\end{array}} & \\
\qquad\qquad \underline{70x^2-21x-7} & \\
\qquad\qquad 7(10x^2-3x-1) &
\end{array}.$$

Поділивши всі коефіцієнти многочлена $70x^2-21x-7$ на 7 (найбільший спільний дільник від цього не зміниться), отримаємо многочлен $10x^2-3x-1$. Наступний крок алгоритму:

$$\begin{array}{l|l}
-\underline{\begin{array}{l}10x^3+17x^2-7x-2\\ 10x^3-3x^2-x\end{array}} & \begin{array}{l}10x^2-3x-1\\ \hline x+2\end{array}\\
\qquad -\underline{\begin{array}{l}20x^2-6x-2\\ 20x^2-6x-2\end{array}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}.$$

Найбільший спільний дільник початкових многочленів — це остання ненульова остача, тобто $10x^2-3x-1$.

В і д п о в і д ь: $10x^2-3x-1$.

Вправи

44. Знайдіть найбільший спільний дільник наступних пар многочленів:

а) $x(x+1)^3(x+2)^2(x^2-x+3)$; $x^3(x+1)^2(x+2)^3(x^2-x+1)$;

б) $(x-1)^3(x+2)^2(x^2-x+2)$; $(x-1)^2(x+1)(x+2)^4(x^2+1)$;

в) $x^5+x^4-16x^3+16x^2-17x+15$; x^3+3x^2-9x+5;

В і д п о в і д ь: $(x-1)(x+5)=x^2+4x-5$;

г) $x^5-7x^4+14x^3-5x^2+3x-18$; $x^4-5x^3+4x^2+10x-12$;

В і д п о в і д ь: $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$;

д) $x^5-2x^4-10x^3+8x^2+33x+18$; $x^4+2x^3-7x^2-20x-12$;

В і д п о в і д ь: $(x+2)(x+1)(x-3)=x^3-7x-6$.

§ 7. Кратні корені многочлена

О з н а ч е н н я. Нехай $k \in N$. Дійсне число a називається *коренем кратності* k многочлена $P(x)$, якщо $P(x) \vdots (x-a)^k$ і $P(x)$ не ділиться на $(x-a)^{k+1}$. Корінь кратності 1 називається *простим коренем*, корінь кратності 2 і більше — *кратним коренем* (двократним коренем або коренем кратності два).

Наприклад, число 1 є коренем кратності 1 многочлена $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 15x - 9$, а число 3 є двократним коренем цього многочлена, це випливає з рівності:

$$x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x-3)^2(x^2+1);$$

	1	-7	16	-16	15	-9
1	1	-6	10	-6	9	0
3	1	-3	1	-3	0	
3	1	0	1	0		

число 1 є коренем кратності 3 многочлена $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, а число (-2) є простим коренем цього многочлена, оскільки:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(x-1)^3;$$

	1	-1	-3	5	-2
-2	1	-3	3	-1	0
1	1	-2	1	0	
1	1	-1	0		
1	1	0			

45. Д о в е д і т ь, що $x = -2$ — кратний корінь многочлена $P(x) = x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 25x^3 - 30x^2 - 28x - 24$. Знайдіть його кратність.

Р о з в ' я з а н н я. Обчислимо $P(-2)$ за допомогою схеми Горнера:

	1	3	-5	-25	-30	-28	-24
-2	1	1	-7	-11	-8	-12	0

$P(-2) = 0$, тому за наслідком 1 з теореми Безу $P(x) \vdots (x+2)$. Частку від ділення ми вже отримали за допомогою схеми Горнера: $P(x) = (x+2) \cdot Q(x)$, де $Q(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - 11x^2 - 8x - 12$. Обчислимо $Q(-2)$:

	1	1	-7	-11	-8	-12
-2	1	-1	-5	-1	-6	0

$Q(-2) = 0$, тому за наслідком 1 з теореми Безу $Q(x) \vdots (x+2)$, тобто $P(x) = (x+2)^2 \cdot S(x)$, причому $S(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$. Обчислимо $S(-2)$:

	1	-1	-5	-1	-6
-2	1	-3	1	-3	0

Маємо: $P(x)=(x+2)^3\cdot(x^3-3x^2+x-3)$, обчислимо значення многочлена-частки x^3-3x^2+x-3 при $x=-2$:

	1	-3	1	-3
-2	1	-5	11	$-25\neq 0$

Маємо, що $P(x)\vdots(x+2)^3$ і $P(x)$ не ділиться на $(x+2)^4$. Це означає, що $x=-2$ є коренем кратності 3 даного многочлена.

Відповідь: 3.

Розглянувши окремий випадок квадратного тричлена, можна помітити, що він має один корінь кратності 2 тоді і тільки тоді, коли дискримінант тричлена рівний 0. При додатному дискримінанті квадратний тричлен має два прості корені, при від'ємному — не має дійсних коренів.

Нескладно показати, що якщо многочлен $P(x)$ має корінь a_1 кратності m_1, корінь a_2 кратності m_2, … корінь a_k кратності m_k, то:

$$P(x)=(x-a_1)^{m_1}\cdot(x-a_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{m_k}\cdot Q(x),$$

де $Q(x)$ — деякий многочлен. Якщо $P(x)$ не має інших коренів, окрім a_1, a_2, …, a_k, то $Q(x)$ складається з добутку квадратних тричленів з від'ємними дискримінантами, або має нульовий степінь.

46. Знайдіть значення a,b, при яких $x=-1$ є коренем кратності 2 многочлена $3x^4-2x^3+ax^2+b$.

Використаємо схему Горнера:

	3	-2	a	0	b
-1	3	-5	$5+a$	$-5-a$	$5+a+b=0$
-1	3	-8	$13+a$	$-18-2a=0$	
-1	3	-11	$24+a\neq 0$		

Маємо $\begin{cases}5+a+b=0,\\-18-2a=0,\\24+a\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-9,\\b=4.\end{cases}$

Відповідь: $a=-9, b=4$.

Вправи

47. а) Знайдіть кратність кореня $x=-3$ для многочлена $x^3+7x^2+15x+9$.

Відповідь: 2.

б) Знайдіть кратність кореня $x=-1$ для многочлена $x^5+4x^4+4x^3-2x^2-5x-2$.

Відповідь: 3.

в) Знайдіть кратність кореня $x = 2$ для многочлена $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16$.

Відповідь: 4.

48. а) Знайдіть усі кратні корені многочлена $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$.

Відповідь: (-1) є двократним коренем многочлена, 2 – трикратним.

б) Знайдіть усі кратні корені многочлена $x^5 + 9x^4 + 14x^3 - 34x^2 - 15x + 25$.

Відповідь: 1, (-5) є двократними коренями многочлена, (-1) – простим коренем.

49. а) Знайдіть значення a, b, при яких $x = 1$ є коренем кратності 2 многочлена $x^3 + ax + b$.

Відповідь: $a = -3, b = 2$.

б) Знайдіть значення a, b, при яких $x = 2$ є коренем кратності 2 многочлена $x^4 + ax^2 + b$. Чи має отриманий многочлен кратний корінь, крім $x = 2$? Якої кратності?

Відповідь: $a = -8, b = 16$. Так, двократний.

в) Знайдіть значення a, b, при яких $x = -3$ є коренем кратності 2 многочлена $x^4 - 19x^2 + ax + b$. Чи має отриманий многочлен кратний корінь, крім $x = -3$? Якої кратності?

Відповідь: $a = -6, b = 72$. Ні, тільки прості.

§ 8. Теорема Вієта

Франсуа Вієт (В'єт) (фр. *François Viète, seigneur de la Bigotière*) – французький математик (1540 − 1603), основні його праці присвячені алгебрі (поклав початок алгебрі як науці про перетворення виразів, про розв'язування рівнянь у загальному вигляді), тригонометрії, сферичній геометрії та астрономії.

<u>**Теорема 12. (теорема Ф. Вієта).**</u> **Нехай x_1, x_2 − корені квадратного тричлена x^2+px+q. Тоді справедливі *формули Вієта*: $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.**

Доведення. Оскільки числа x_1 і x_2 є коренями квадратного тричлена, то за наслідком 2 з теореми Безу:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2.$$

Отже, $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1\cdot x_2$, що і потрібно було довести.

Справедлива *обернена теорема Вієта*.

<u>**Теорема 13.**</u> **Нехай для чисел x_1 і x_2 виконуються співвідношення $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Тоді x_1 і x_2 є коренями квадратного тричлена x^2+px+q.**

Доведення. Позначимо даний квадратний тричлен через $P(x)$. Відмітимо, що:

$$P(x)=x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=(x-x_1)(x-x_2).$$

Отже, $P(x_1)=(x_1-x_1)(x_1-x_2)=0$, тобто x_1 є коренем многочлена $P(x)$ (аналогічно для x_2), що і потрібно було довести.

Співвідношення $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$ справедливі тільки для зведених многочленів. Нескладно узагальнити їх на випадок довільного старшого коефіцієнта: очевидно, що корені квадратного тричлена ax^2+bx+c співпадають з коренями зведеного квадратного тричлена $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ (до якого вже можна застосувати доведені теореми), а тому формули Вієта в загальному вигляді запишуться так:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Теорему Вієта і зворотну до неї можна сформулювати і для многочленів третього і вищих степенів.

<u>**Теорема 14.**</u> **Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корені многочлена n-го степеня**

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Тоді справедливі формули Вієта:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = (-1)^3 \frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n},$$

(ліва частина k-ої рівності є сумою усіх можливих добутків, що складаються з k різних елементів з набору $(x_1, x_2, ..., x_n)$; знаки в правій частині чергуються).

Тепер сформулюємо обернену теорему.

Теорема 15. **Хай числа $x_1, x_2, ..., x_n$ задовольняють співвідношенням (4). Тоді вони є коренями многочлена:**

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Ідея доведення цих двох теорем така ж, як і у прямої і оберненої теореми Вієта для квадратного тричлена. Треба використовувати той факт, що в лівій частині k-го рівняння стоїть (з точністю до знаку) коефіцієнт при x^{n-k}, що виходить після розкриття дужок у виразі: $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Зауваження. Якщо многочлен має кратні корені, то кожен корінь рахується в теоремі Вієта стільки раз, яка його кратність. Наприклад, коренями многочлена $(x+1)^4(x-1)^3(x+2)$ є $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1,\ x_5 = x_6 = x_7 = 1,\ x_8 = -2$. Якщо кількість коренів з урахуванням їх кратності менша степеня многочлена (так трапляється, коли розклад многочлена на множники містить квадратні тричлени, що не зводяться), то теоремою Вієта скористатися не можна (у множині дійсних чисел).

Розберемо декілька завдань на застосування теореми Вієта.

50. Напишіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа 8 та (-5).

Розв'язання. Оскільки $-(8+(-5)) = -3$, $8 \cdot (-5) = -40$, то за оберненою теоремою Вієта рівняння $x^2 - 3x - 40 = 0$ має корені 8 і (-5).

Відповідь: $x^2 - 3x - 40 = 0$.

51. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ xy = 63. \end{cases}$$

Розв'язання. За оберненою теоремою Вієта числа x, y є коренями квадратного рівняння $t^2 - 16t + 63 = 0$ (і навпаки за прямою теоремою Вієта два числа, що є коренями цього рівняння, задовольняють системі). Розв'язуючи це рівняння, знаходимо його корені: $t_1 = 7;\ t_2 = 9$. Це дає два розв'язки системи: $(7;9)$ і $(9;7)$.

Відповідь: $(7;9)$ і $(9;7)$.

Розглянемо ще одну корисну властивість коренів квадратного рівняння, що випливає з теореми Вієта.

Теорема 16. Хай квадратний тричлен x^2+px+q має два корені (різних або однакових). Тоді:

1. Обидва корені додатні тоді і тільки тоді, коли $p<0, q>0$;

2. Обидва корені від'ємні тоді і тільки тоді, коли $p>0, q>0$.

Доведення. Доведемо твердження 1. Очевидно, якщо $x_1>0, x_2>0$, то $p=-(x_1+x_2)<0$, $q=x_1\cdot x_2>0$. Навпаки, якщо $p<0$ і $q>0$, то, отже, $x_1+x_2>0$ і $x_1\cdot x_2>0$. З нерівності $x_1\cdot x_2>0$ випливає, що x_1 і x_2 одного знаку (обидва додатні, обидва від'ємні), а з нерівності $x_1+x_2>0$ випливає, що вони не можуть бути обидва від'ємні. Отже, $x_1>0$ і $x_2>0$.

Доведення твердження 2 є аналогічним. Проведіть його самостійно.

52. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2-2(a+2)x+14a-12=0$ має два різні додатні корені?

Розв'язання. Для існування двох різних коренів необхідно і достатньо виконання умови $D>0$, $D=\left(-2(a+2)\right)^2-4\cdot\left(14a-12\right)>0$ або $(a+2)^2-14a+12>0$, а для того, щоб корені були додатними, необхідно і достатньо виконання умов $p<0, q>0$. Тобто:

$$\begin{cases}(a+2)^2-14a+12>0,\\-2(a+2)<0,\\14a-12>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-10a+16>0,\\a+2>0,\\7a>6,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a-8)>0,\\a+2>0,\\7a>6,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<2,\\a>8,\end{array}\right.\\a>-2,\\a>\dfrac{6}{7},\end{cases}$$

Відповідь: $a\in\left(\dfrac{6}{7};2\right)\cup\left(8;\infty\right)$.

53. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння ax^2+bx+c, знайдіть:

а) ${x_1}^2+{x_2}^2$; б) ${x_1}^3+{x_2}^3$; в) $x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_2$; г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$; г) $\dfrac{x_1}{{x_2}^2}+\dfrac{x_2}{{x_1}^2}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Вієта: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

а) ${x_1}^2+{x_2}^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2\left(x_1x_2\right)=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}$;

б) ${x_1}^3+{x_2}^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3\left(x_1+x_2\right)\left(x_1x_2\right)=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{c}{a}=-\left(\dfrac{b}{a}\right)^3+\dfrac{3bc}{a^2}$;

в) $x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_2=(x_1x_2)(x_2+x_1)=\dfrac{c}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-\dfrac{bc}{a^2}$;

г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2-2\left(x_1x_2\right)}{x_1x_2}=\dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}}{\dfrac{c}{a}}=\dfrac{b^2-2ac}{ac}$;

д) $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)(x_1x_2)}{(x_1x_2)^2}=\dfrac{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{c}{a}}{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2}=\dfrac{-b^3+3abc}{ac^2}$.

54. Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=36$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Вієта: $x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q$. З умови маємо $-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=36 \Leftrightarrow (x_1-1)\cdot(x_2-1)=37$, крім того, відомо, що $x_1;x_2$ – цілі числа. 37 – просте число, його дільниками є числа $\pm1;\pm37$. Тому можливі випадки (нехай $x_1\le x_2$):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1-1=-37,\\ x_2-1=-1,\end{cases}\\ \begin{cases}x_1-1=1,\\ x_2-1=37,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-36,\\ x_2=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=2,\\ x_2=38,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=36,\\ q=0,\end{cases}\\ \begin{cases}p=-40,\\ q=76.\end{cases}\end{array}\right. \text{(перевірка: сума } p+q=36\text{)}.$$

Відповідь. $x_1=-36,\ x_2=0$ або $x_1=2,\ x_2=38$.

55. Визначте q, якщо відомо, що один з коренів рівняння $x^2-10x+q=0$ є кубом іншого.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Вієта: $x_1+x_2=10,\quad x_1\cdot x_2=q$. З умови маємо $x_2=(x_1)^3$, тоді $x_1+x_1^3=10$. Маємо рівняння третього степеня, один його корінь $x_1=2$:

	1	0	1	-10
2	1	2	5	0

Тоді $x_1^3+x_1-10=(x_1-2)(x_1^2+2x_1+5)$. Останнє рівняння дійсних коренів не має, тому єдине значення $x_1=2$, а тоді $x_2=2^3=8,\quad q=2\cdot8=16$.

Відповідь. $q=16$.

56. Многочлен $x^3+ax^2-10x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-4,\ x_2=2$. Знайдіть x_3 та вкажіть значення невідомих a і b.

Розв'язання. За теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-a,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-10,\\ x_1x_2x_3=-b,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4+2+x_3=-a,\\ -8-4x_3+2x_3=-10,\\ -8x_3=-b,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=1;\\ a=1;\\ b=8.\end{cases}$$

Відповідь. $x_3=1;\ a=1;\ b=8$.

57. Відомо, що сторони прямокутного паралелепіпеда є коренями многочлена $x^3-16x^2+82x-136$. Не обчислюючи коренів многочлена, знайти об'єм, повну поверхню та діагональ прямокутного паралелепіпеда.

Розв'язання. За теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=16, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=82, \\ x_1x_2x_3=136, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V=x_1x_2x_3=136 \\ S=2\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=164, \\ d^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2\cdot(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16^2-164=92, \end{cases}$$

Відповідь. $V=136$ (куб.од.); $S=164$ (кв.од.); $d=2\sqrt{23}$ (од.).

Зауваження: нескладно перевірити, що усі корені многочлена є дійсними додатними числами: $4,\ 6+\sqrt{2},\ 6-\sqrt{2}$, а тому задача є коректною.

58. Корені многочлена $x^2+ax+b+1$ – натуральні числа. Доведіть, що a^2+b^2 – складене число.

Розв'язання. За теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1x_2=b+1, \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2={x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2+(x_1x_2)^2-2x_1x_2+1=$$

$$={x_1}^2+{x_2}^2+(x_1x_2)^2+1=({x_1}^2+1)({x_2}^2+1).$$

За умовою, $x_1, x_2\in N$, а тому кожний співмножник добутку $({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)$ не дорівнює одиниці. А це означає, що число a^2+b^2 є складеним.

Вправи

59. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2+7x+2=0$. Не розв'язуючи рівняння, обчисліть:

а) ${x_1}^2+{x_2}^2$; б) ${x_1}^3+{x_2}^3$; в) $x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_2$; г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$; д) $\dfrac{1}{{x_2}^2}+\dfrac{1}{{x_1}^2}$; е) $\dfrac{x_1}{{x_2}^2}+\dfrac{x_2}{{x_1}^2}$.

Вказівка. Скористайтеся теоремою Вієта.

60. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+5x-2=0$. Напишіть яке-небудь квадратне рівняння, яке має корені:

а) $-x_1$ і $-x_2$; б) x_1+2 і x_2+2; в) $3x_1$ і $3x_2$; г) $\dfrac{1}{x_1}$ і $\dfrac{1}{x_2}$; д) ${x_1}^2+{x_2}^2$ і $x_1\cdot x_2$.

Вказівка. Скористайтеся теоремою Вієта.

61. Нехай x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+px+q=0$. Напишіть квадратне рівняння, єдиним коренем якого є число $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

Вказівка. Скористайтеся теоремою Вієта.

62. а) Сума квадратів коренів рівняння $x^2-2x+q=0$ рівна 10. Знайдіть q.

Вказівка. Скористайтеся теоремою Вієта.

Відповідь. $q=-3$.

б) Знайдіть q, якщо сума квадратів коренів рівняння $x^2-8x+q=0$ рівна 50.

Відповідь. $q=7$.

63. а) Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=18$.

Відповідь. $x_1 = -18,\ x_2 = 0$ або $x_1 = 2,\ x_2 = 20$.

б) Корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p + q = 42$.

Відповідь. $x_1 = -42,\ x_2 = 0$ або $x_1 = 2,\ x_2 = 44$.

64. а) Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $8x^2 - 6x + b = 0$ є квадратом іншого.

Відповідь. $b_1 = 1\left(x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{4}\right);\ b_2 = -27\left(x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = \frac{9}{4}\right)$.

б) Визначте q, якщо відомо, що один з коренів рівняння $x^2 - 30x + q = 0$ є кубом іншого.

Відповідь. $q = 81\ (x_1 = 3,\ x_2 = 27)$.

65. Знайдіть всі такі значення а, при яких рівняння $x^2 + ax + 10 = 0$ має два корені, які є а) цілими числами; б) цілими додатними числами.

66. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2(a-5)x + 7a - 45 = 0$ має два різні додатні корені?

Відповідь: $a \in \left(\frac{45}{7}; 7\right) \cup (10; \infty)$.

67. Рівняння $x^2 - 7x + 2a = 0$ і $x^2 - bx + 4a - 2 = 0$ мають по два корені, і корені першого рівняння на 1 менше коренів другого рівняння. Знайдіть a, b.

Вказівка. Скористайтеся теоремою Вієта.

Відповідь. $a = 5,\ b = 9$.

68. Знайдіть суму ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$, де x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

69. Корені многочлена $3x^3 - 5x + 1 = 0$ рівні x_1, x_2, x_3. Напишіть яке-небудь рівняння, коренями якого були б числа:

а) x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 ; б) $\frac{1}{x_1x_2}, \frac{1}{x_1x_3}, \frac{1}{x_2x_3}$.

70. Многочлен $x^3 + ax^2 - 11x + b = 0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1 = -3,\ x_2 = 5$. Знайдіть x_3 (вкажіть значення невідомих a та b).

Відповідь. $x_3 = 2;\ a = -4;\ b = 30$.

71. Розв'яжіть системи:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$ Відповідь. $(-2;6);(6;-2)$.

б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 50. \end{cases}$ Відповідь. $(1;7);(7;1)$.

в) $\begin{cases} xy = -21, \\ x^2 + y^2 = 58. \end{cases}$ Відповідь. $(-3;7);(-7;3);(7;-3);(3;-7)$.

г) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=5, \\ .xyz=2. \end{cases}$ Відповідь. $(1;1;2);(1;2;1);(2;1;1)$.

д) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ xy+xz+yz=-1, \\ .xyz=-3. \end{cases}$

Відповідь. $(3;1;-1);(3;-1;1);(1;3;-1);\ (1;\ -1;3);(-1;3;1);(-1;\ 1;3)$.

е) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=30, \\ .xyz=-10. \end{cases}$

Відповідь. $(2;5;-1);(2;-1;5);(-1;2;5);\ (-1;\ 5;2);(5;-1;2);(5;\ 2;-1)$.

§ 9. Многочлени від декількох змінних

Означення. *Одночленом* від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається вираз виду $k \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$, де k — довільне число, назване *коефіцієнтом*, $\alpha_i \in N_0, 1 \le i \le n$.

При записі одночленів множники, що мають нульові степені, зазвичай опускають: так, наприклад, замість $5 \cdot x_1^5 x_2^0 x_3^0 x_4^1$ пишуть $5x_1^5 x_4$.

Означення. *Многочленом* від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається сума декількох одночленів від цих змінних, в якій зведені подібні доданки (тобто одночлени, що відрізняються тільки коефіцієнтом).

Приклади: $P(x_1, x_2) = 4x_1^3 + 3x_1 x_2^2 - x_2 + 6$ — многочлен від змінних x_1, x_2, $Q(x, y, z) = 2x^3 z + 3xy^2 - x + 4xyz^2 - 2$ — многочлен від змінних x, y, z.

Відзначимо, що деякі змінні можуть і не входити в запис многочлена: так, наприклад, змінні x_2, x_4 не входять в запис многочлена $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_3^3 + 3x_1^4 x_5 - x_3$.

Нульовий многочлен — многочлен, до складу якого входять тільки одночлени з нульовими коефіцієнтами.

На відміну від випадку однієї змінної, у многочленів від декількох змінних не існує канонічного вигляду. Це пов'язано з тим, що одночлени, залежні від багатьох змінних, можна впорядковувати декількома принципово різними способами.

Степенем одночлена $k \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$, де $k \ne 0$, називається число $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Якщо $k = 0$, то степінь такого одночлена не визначений (не має степеня). *Степенем многочлена* називається максимальний із степенів одночленів, що входять до його складу.

Підкреслимо, що при визначенні степеня многочлена слід звести подібні доданки. Наприклад, було б помилково вважати, що степінь многочлена $P(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2 + 3x_1 x_2^2 - x_1^3 x_2^2 + x_1 x_2 + 1$ рівний 5: це взагалі не многочлен, оскільки подібні доданки не зведені. Після їх зведення виходить многочлен $P(x_1, x_2) = 3x_1 x_2^2 + x_1 x_2 + 1$ степеня 3.

Іноді при записі многочленів ми опускатимемо позначення змінних, якщо це не приводитиме до плутанини: наприклад, замість $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ або $P(x, y, z)$ записуватимемо просто P.

Для многочленів від декількох змінних є вірними теореми 1 і 2 про степінь суми і добутку многочленів (див. § 1). Означення значення многочлена і тотожної рівності многочленів можна сформулювати так само, як і для многочленів від однієї змінної. Теорема про тотожну рівність многочленів також виконується для випадку декількох змінних. Сформулюємо її, не наводячи доведення.

Теорема 17. Розглянемо два многочлени: $P = a_1 S_1 + a_2 S_2 + ... + a_k S_k$ **і**

$Q = b_1S_1 + b_2S_2 + \ldots + b_kS_k$**, де** $S_1, S_2, \ldots, S_k$ **− різні зведені одночлени (тобто що мають вид** $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ **). Многочлени** P **і** Q **будуть тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли** $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$**.**

Вправа

72. У виразі $(x+y-z)^{2009}(x-y+z)^{2009}(-x+y+z)^{2009}$ розкрили дужки та звели подібні доданки. Знайдіть суму коефіцієнтів отриманого многочлена.

Відповідь: 1.

§ 10. Симетричні многочлени

Означення. Многочлен $P(x_1,x_2,...,x_n)$ називається *симетричним*, якщо він не змінюється при будь-якій перестановці змінних $x_1,x_2,...,x_n$.

Наприклад, проведемо в многочлені $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-3x_1x_2x_3$ таку перестановку: x_1 замінимо на x_2, x_2 замінимо на x_3, x_3 замінимо на x_1 (цю перестановку можна записати так: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$; кожна змінна з верхнього рядка переходить в змінну, що знаходиться під нею). Отримаємо многочлен: $x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_1^{\,2}+2x_2x_3+2x_2x_1+2x_3x_1-3x_2x_3x_1$, що співпадає з початковим. Аналогічним чином можна переконатися, що при будь-якій перестановці змінних x_1,x_2,x_3 (всього для трьох змінних існує 6 перестановок, включаючи тотожну, коли всі змінні залишаються на місці) даний многочлен не зміниться. Отже, цей многочлен є симетричним.

Відзначимо, що при перестановці різні змінні не можуть переходити в одну й ту саму: наприклад запис $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ не задає перестановку, оскільки різні змінні x_1 та x_2 переходять в одну і ту ж змінну x_3. А ось перестановки, що переводять деякі змінні самі в себе, наприклад, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ допускаються.

73. Доведіть, що на n змінних існує $n!$ різних перестановок.

Нескладно зрозуміти, як повинен виглядати симетричний многочлен: якщо, наприклад, симетричний многочлен від трьох змінних x,y,z містить одночлен $2x^2y$, то він повинен містити і одночлени $2x^2z$, $2y^2x$, $2y^2z$, $2z^2x$ і т.п.

Серед симетричних многочленів від n змінних виділяють n *елементарних симетричних многочленів:*

$$\sigma_1(x_1,x_2,...,x_n)=x_1+x_2+...+x_n;$$
$$\sigma_2(x_1,x_2,...,x_n)=x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n;$$
$$\sigma_3(x_1,x_2,...,x_n)=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n(x_1,x_2,...,x_n)=x_1x_2\cdot...\cdot x_n.$$

До складу многочлена σ_k входять всілякі одночлени, що представляють собою добуток k різних змінних з набору $(x_1,x_2,...,x_n)$. Кожен добуток узятий один раз: так, наприклад, якщо доданок $x_2x_3x_4$ увійшов до складу σ_3, то доданки $x_2x_4x_3$, $x_4x_3x_2$ і тому подібні вже не входять в нього.

Подивившись на формули Вієта для многочленів довільного степеня, можна побачити, що в лівій частині цих формул стоять якраз значення елементарних симетричних многочленів $\sigma_1(x_1,x_2,...,x_n)$, $\sigma_2(x_1,x_2,...,x_n)$, $\ldots,\sigma_n(x_1,x_2,...,x_n)$, якщо $x_1,x_2,...,x_n$ - корені даного многочлена.

Теорема 18. Будь-який симетричний многочлен виражається через елементарні многочлени, причому єдиним чином.

Ми не доводитимемо цю теорему, оскільки її доведення є досить складним. Розглянемо два приклади, в яких потрібно виразити симетричний многочлен через елементарні.

74. Виразіть симетричний многочлен $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ через елементарні симетричні многочлени від змінних x,y,z.

Розв'язання. $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-(2xy+2xz+2yz)=$
$=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=\sigma_1{}^2-2\sigma_2$.

Відповідь: $\sigma_1{}^2-2\sigma_2$.

75. Виразіть симетричний многочлен $P(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ через елементарні симетричні многочлени від змінних x,y,z.

Розв'язання. Скористаємося рівністю:
$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+6xyz$, запишемо
$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)-6xyz=$
$=(\sigma_1)^3-3(xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z))-6\sigma_3=$
$=\sigma_1{}^3-3(xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yz(x+y+z)-3xyz)-6\sigma_3=$
$=\sigma_1{}^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+9xyz-6\sigma_3=$
$=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3-6\sigma_3=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

Відповідь: $\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

Вправи

76. Виразіть через елементарні симетричні многочлени:

а) x^3+y^3; в) $(x+y)(x+z)(y+z)$;

б) x^4+y^4; г) $x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y$.

Відповідь: а) $\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2$; б) $\sigma_1{}^4+2\sigma_2{}^2-4\sigma_1{}^2\sigma_2$; в) $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$;
г) $\sigma_1{}^2\sigma_2-2\sigma_2{}^2-\sigma_1\sigma_3$.

77. Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2-3x-5=0$, не обчислюючи корені.

Відповідь: $\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2=72$.

78. Многочлен $f(x;y)$ є симетричним. Доведіть, що якщо він ділиться на $x-y$, то він ділиться і на $(x-y)^2$.

Вправи для самостійного розв'язування.

У цьому розділі ми пропонуємо вправи для контролю отриманих умінь. У лівій частині таблиці вказана умова вправи, а у правій – лише відповідь без вказівок з розв'язання. Не забувайте, що консультації з розв'язання вправ можна отримати у рамках навчання у заочній фізико-математичній школі.

Умова	**Відповідь**
1. Знайдіть степінь многочлена	
$(x-2)^2+(x+2)^2-(x-3)^2-(x+3)^2$	нуль
$(x-1)^3+(x+1)^3-(x-2)^3-(x+2)^3$	один
$(x-2)^2\cdot(x+1)^2-(x-1)^2\cdot(x+2)^2+4\cdot x\cdot\left(x^2-2\right)$	не має степеня
$(\mathrm{x}+2)^2\cdot(x+3)^2-(x-3)^2\cdot(x+8)^2$	два
$(x-1)^2\cdot(x+3)^2-(x+1)^2\cdot(x-3)^2-8\cdot x\cdot\left(x^2-3\right)$	не має степеня
$(x-1)^3\cdot(x+4)-(x+1)^3\cdot(x-2)$	два
$(x-2)^2\cdot(x-3)^2-(x-4)^2\cdot(x-1)^2-(2x-5)^2$	нуль
2. Поділіть з остачею, у відповіді вкажіть частку і остачу	
$x^5+6x^4+9x^3+7x^2+25x+4$ на $x^3+3\cdot x^2-x+7$	$S(x)=x^2+3\cdot x+1;$ $R(x)=5\cdot x-3$
$10x^4-11x^3+3x^2-21x-2$ на $2\cdot x^2-3\cdot x-1$	$S(x)=5\cdot x^2+2\cdot x+7;$ $R(x)=2\cdot x+5$
$15x^5-10x^4+24x^3+x^2-6x$ на $3\cdot x^2-2\cdot x+6$	$S(x)=5\cdot x^3-2\cdot x-1;$ $R(x)=4\cdot x+6$
$x^5+6x^4+9x^3+8x^2+15x+4$ на $x^3+3\cdot x^2-x+7$	$S(x)=x^2+3\cdot x+1;$ $R(x)=x^2-5\cdot x-3$
$x^6-4x^5-3x^4+10x^3+x^2-14x$ на $x^4-2\cdot x^2+x+3$	$S(x)=x^2-4\cdot x-1;$ $R(x)=x^3-x+3$
3. Поділіть на двочлен, вкажіть частку і остачу	
$5x^4-42x^3+85x^2-14x+13$ на $x-3$	$5x^3-27x^2+4x-2;$ $r=7$
$3x^4+13x^3+18x^2+6x-1$ на $x+2$	$3x^3+7x^2+4x-2;$ $r=3$
$5x^4+22x^3+7x^2+x+7$ на $x+4$	$5x^3+2x^2-x+5;$ $r=-13$
$2x^4-6x^3-21x^2+8x-2$ на $x-5$	$2x^3+4x^2-x+3;$ $r=13$
$5x^4-17x^3+10x^2+11x+6$ на $x-2$	$5x^3-7x^2-4\cdot x+3;$ $r=12$

4. При яких значеннях a при діленні на $x-3$ многочлен $x^5-3x^4-2x^3+7x^2+ax-7$ дає остачу, рівну 2?	$a=0$
При яких значеннях a при діленні на $x+4$ многочлен $x^5+2x^4-7x^3+4x^2+ax+2$ дає остачу, рівну (-10)?	$a=3$
При яких значеннях a при діленні на $x-1$ многочлен $x^5-3x^4+5x^3+x^2+ax-4$ дає остачу, рівну 2?	$a=2$
При яких значеннях a при діленні на $x+1$ многочлен $5x^4+3x^3+x^2+ax+1$ дає остачу, рівну (-5)?	$a=9$
При яких значеннях a при діленні на $x+4$ многочлен $6x^4+19x^3-18x^2+ax+43$ дає остачу, рівну 15?	$a=15$
5. Знайдіть всі раціональні корені многочлена $6x^4+29x^3-48x^2+2x+7$.	$-\frac{1}{3};\frac{1}{2}$
$3x^4+4x^3+16x^2-16x-7$	$-\frac{1}{3};1$
$2x^4-3x^3-5x^2+9x-3$	$\frac{1}{2};1$
$5x^3-27x^2+40x-12$	$\frac{2}{5};2;3$
$4x^3+x^2-11x+6$	$-2;\frac{3}{4};1$
$3x^3-14x^2-7x+10$	$-1;\frac{2}{3};5$
$3x^5+3x^4+17x^3+17x^2+10x+10$	-1
6. Розв'яжіть рівняння	
$4x^4+6x^3-8x^2+3x-5=0$	$-\frac{5}{2}, 1$
$3x^4+4x^3-5x^2-8x-2=0$	$-\frac{1}{3}, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$
$2x^4-9x^3+6x^2+11x-6=0$	$2, 3, \frac{1}{2}, -1$
$2x^4-5x^3-4x^2+15x-6=0$	$2, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$
$4x^4-15x^3-3x^2+13x-3=0$	$\frac{3}{4}, -1, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$
$5x^4-6x^3-14x^2-2x+1=0$	$\frac{1}{5}, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$
7. Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=40$.	$x_1=-40, x_2=0;$ $x_1=2, x_2=42$
Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами.	$x_1=-52, x_2=0;$

Знайдіть ці корені, якщо $p+q=52$.	$x_1=2,\ x_2=54$
Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=4$.	$x_1=-4,\ x_2=0;$ $x_1=2,\ x_2=6$
Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=12$.	$x_1=-12,\ x_2=0;$ $x_1=2,\ x_2=14$
Корені рівняння $x^2+px+q=0$ є цілими числами. Знайдіть ці корені, якщо $p+q=3$.	$(-3;0);(-1;-1);$ $(2;5);(3;3)$
8. Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $27x^2-12x+b=0$ є квадратом іншого	$b_1=1$; $b_2=-64$
Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $343x^2-126x+b=0$ є квадратом іншого	$b_1=8$; $b_2=-729$
Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $125x^2-70x+b=0$ є квадратом іншого	$b_1=8$; $b_2=-343$
Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $64x^2-20x+b=0$ є квадратом іншого	$b_1=1$; $b_2=-125$
Визначте b, якщо відомо, що один з коренів рівняння $8x^2-30x+b=0$ є квадратом іншого	$b_1=27$; $b_2=-125$
9. Знайдіть НСД двох многочленів $x^4-3x^3-2x^2-3x+1;\quad x^5-5x^4+6x^3-5x^2+x$	x^2-4x+1
$x^4+4x^3+5x^2+4x+1;\quad x^4+2x^3-x^2+2x+1$	x^2+3x+1
$x^5-x^3-2x+x^2+1;\quad x^6-2x^4+2x-1$	x^3-2x+1
$x^4-4x^3-3x^2-4x+1;\quad x^4-5x^3+5x-1$	x^2-5x+1
$x^4+10x^3+35x^2+50x+24;\quad x^3-4x^2+x+6$	$x+1$
$x^5-x^4-4x^3+7x^2+3x-6;\quad x^4+2x^3-8x^2+3x+12$	x^3-2x^2+3
$x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12;\quad x^3+4x^2-7x-10$	$x-2$
10. Знайдіть усі кратні корені многочлена, вкажіть їх кратність $x^7+5x^6-6x^5-34x^4-11x^3+57x^2+64x+20$	$x=-1$ - 4-кратний, $x=2$ - 2-кратний
$x^5+8x^4+25x^3+38x^2+28x+8$	$x=-1$ - 2-кратний, $x=-2$ - 3-кратний
$x^6-2x^5-7x^4+16x^3+8x^2-32x+16$	$x=1$, $x=2$, $x=-2$ - 2-кратні корені
$x^5-3x^4-6x^3+10x^2+21x+9$	$x=-1$ - 3-кратний, $x=3$ - 2-кратний
$x^6-2x^5+3x^4-12x^3+23x^2-18x+5$	$x=1$ - 4-кратний
$x^3+4x^2-7x-10$	немає кратних коренів

11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=-72. \end{cases}$	(-12; 6); (6;-12)
$\begin{cases} x+y=11, \\ xy=-60. \end{cases}$	(-4; 15); (15;-4)
$\begin{cases} x+y=20, \\ xy=91. \end{cases}$	(7; 13); (13; 7)
$\begin{cases} x+y=-14, \\ xy=48. \end{cases}$	(-6;-8); (-8;-6)
$\begin{cases} x+y=-20, \\ xy=-69. \end{cases}$	(-23; 3); (3;-23)
12. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$	$(1;3);(3;1)$
$\begin{cases} x+y=11, \\ x^2+y^2=65. \end{cases}$	$(4;7);(7;4)$
$\begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=117. \end{cases}$	$(9;-6);(-6;9)$
$\begin{cases} xy=-48, \\ x^2+y^2=100. \end{cases}$	$(-6;8);(8;-6);$ $(6;-8);(-8;6)$
$\begin{cases} xy=72, \\ x^2+y^2=145. \end{cases}$	$(-9;-8);(-8;-9);$ $(9;8);(8;9)$
$\begin{cases} x+y+z=8, \\ xy+xz+yz=20, \\ xyz=16. \end{cases}$	$(2;2;4);(2;4;2);$ $(4;2;2)$
$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-11, \\ xyz=-12. \end{cases}$	$(-3;1;4);(-3;4;1);$ $(1;-3;4);(1;4;-3);$ $(4;1;-3);(4;-3;1)$
$\begin{cases} x+y+z=-3, \\ x^2+y^2+z^2=9, \\ xyz=4. \end{cases}$	$(-2;-2;1);\ \ (-2;1;-2);$ $(1;-2;-2)$
$\begin{cases} x+y+z=7, \\ x^2+y^2+z^2=33, \\ xyz=-16. \end{cases}$	$(4;4;-1);\ \ (4;-1;4);$ $(-1;4;4)$

$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=30, \\ xyz=-10. \end{cases}$	$(-2;5;1);(-2;1;5);$ $(5;-2;1);(5;1;-2);$ $(1;5;-2);(1;-2;5);$
13. Многочлен $x^3+ax^2-25x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-7$, $x_2=1$. Знайдіть x_3, a та b.	$x_3=3;$ $a=3; b=21$
Многочлен $x^3+ax^2-6x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-4$, $x_2=2$. Знайдіть x_3, a та b.	$x_3=-1;$ $a=3; b=-8$
Многочлен $x^3+ax^2+8x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-2$, $x_2=5$. Знайдіть x_3, a та b.	$x_3=6;$ $a=-9; b=60$
Многочлен $x^3+ax^2-16x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-6$, $x_2=1$. Знайдіть x_3, a та b.	$x_3=2;$ $a=3; b=12$
Многочлен $x^3+ax^2-2x+b=0$ має три корені: x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1=-3$, $x_2=2$. Знайдіть x_3, a та b.	$x_3=-4;$ $a=5; b=-24$
14. Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2-3x-6=0$, не обчислюючи корені.	81
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2+8x-6=0$.	-656
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2+4x-7=0$.	-148
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2+6x-9=0$.	-378
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2+6x+2=0$.	-180
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $x^2-7x+2=0$.	301
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $2x^2-7x+2=0$.	$\frac{259}{8}$
Знайдіть суму кубів коренів рівняння $2x^2-10x+3=0$.	$\frac{205}{2}$

Предметний покажчик.

Зміст

Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи

Многочлени

Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10–11 класів

Людмила Володимирівна Ізюмченко
Вікторія Вікторівна Нічишина
Ренат Ярославович Ріжняк

Для нотаток

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ,
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 03.02.2009. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Папір офсет. Друк різограф.
Ум. др. арк. 2,85. Тираж 300. Зам. № 5452.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua