# ІНТЕГРАТНВННЙ ПІДХІД ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІЗННХ МАТЕМАТНЧННХ ЗАДАЧ  НА ОСНОВІ ВНЗНАЧЕНОГО СПОСОБУ

**Василь КУШНІР, Реиат РІЖНЯК**

*В статті досліджуються проблеми використання обраного способу для розв’язування різних математичних задач з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів.*

*The article investigates the problems of using the selected method for solving various mathematical problems in order of integrative learning activities of students.*

**Постановка проблемн**. Вивчеиия будь-якої навчальної діяльності завждп передбачає формування знань, умінь та навнчок відповідного профілю або відповідної галузі. Процес об’єднання (інтеграції) розрізненпх математнчннх знань та умінь відіграє важлнву роль в організації навчальної діяльності учнів і вказує на такі способп регулювання навчальною діяльністю у процесі розв’язування математнчннх задач інтегратнвного змісту: набуття знань про задачу і формування зв’язків між компонентамн цнх знань; внзначення та дослідження особлнвостей перетворення задачі; формування правнл добору та послідовності застосування необхідних перетворень для розв’язання задачі; оцінка можлнвості внкорнстання відомого способу до розв’язування задачі. Спочатку такі способп регулювання навчальною діяльністю є предметом засвоєння, а вже після формування умінь їх застосування суб’єктами навчальної діяльності перетворюються у способп регулювання саме навчальною діяльністю інтегратнвного характеру.

**Аналіз раніше викоиаиих досліджень**. Інтегратнвнний підхід у навчанні дає можлнвість розглядатн зміст навчання окремої днсцнплінн саме у процесі взаємодії з іншнмн навчальнннмн днсцнплінамн, співставлятн закономірності та законн навчальної днсцпплінн, яка внвчається, із закономірностямн та законамн прпродн. У [1] та [2] ми вже відзначалн, що інтегратнвна лінія у шкільному курсі математнкн поступово знаходнть більш детальну реалізацію у внкорнстанні навчальннх математнчннх задач інтегратнвного змісту (оппсове означення поняття задачі інтегратнвного змісту було надане у цих роботах). Розв’язування таких задач потребує глибоких знань та вннахідлнвості; тут не лпше внкорнстовуються знання учнів з певної темн, а й внннкає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільного курсу математики в аспекті актуалізації її основних змістовних ліній [1], [3], що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури [2], [3].

**Мета статті**. Автори мають намір детально розглянути процес роботи над задачею у контексті оцінки можливості її розв'язування стандартним, наперед заданим (або знайденим) способом, цитуючи Д.Пойа – «погляд назад» [4]. Раніше ми досліджували використання способів організації етапів розв'язування задач (див. [1], [2], [5]). У даній роботі зупинимося на застосуванні у процесі розв'язування різних математичних задач одного і того ж способу (раніше виведеного факту) і, як наслідок, дослідимо методичну доцільність використання такого прийому у контексті формування в учнів інтегративних знань і умінь в оперуванні математичним матеріалом.

**Виклад основного матеріалу**. Під інтегрованим образом способу розв'язування групи математичних задач будемо розуміти цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для оцінки можливості розв'язування наперед заданої групи математичних задач обраним способом (або з використанням відомої ідеї, чи заздалегідь вивченого факту). Зазначимо, що як не можна говорити про повний перелік задач, що можуть бути розв'язані обраним способом, так і немає сенсу говорити про найбільший (найповніший) обсяг інтегрованого образу способу розв'язування. Обсяг інтегрованого образу способу розв'язування групи математичних задач будемо визначати у відповідності до поставлених цілей навчальної діяльності. Визначимо зміст інтегративної навчальної діяльності учнів при розв'язуванні математичних задач наперед обраним способом так:

- формування *інтегрованого образу способу розв'язування*, що представляє собою цілісну структуру знань, умінь та навичок, наявність яких у суб'єкта є умовою володіння обраним способом розв'язування;
- *аналіз* ознак та характеристик компонентів змісту інтегрованого образу способу розв'язування групи задач, їх *порівняння*;
- *абстрагування* від несуттєвих характеристик компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач;
- мисленне об'єднання компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач за їх істотними ознаками – *узагальнення*;
- розподіл компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками за їхньою подібністю – *класифікація*;
- розділення та подальше об'єднання не окремих компонентів інтегрованого образу способу розв'язування групи задач, а їх класів (наприклад, у вигляді ієрархії) – *систематизація*;
- утворення нового знання про розв'язану групу задач – *синтез* нових знань.

Отже, основна ***мета нашого дослідження*** буде полягати у тому, щоб *визначити методичні умови, при яких використання для розв'язування групи математичних задач наперед обраного способу розв'язання буде набувати методичної доцільності з метою формування в учнів знань і вмінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом.*

Розглянемо проблему розв'язування математичних задач дослідження на прикладі використання знань про основну тригонометричну тотожність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ та різних дробово-раціональних співвідношень, що можуть бути зведені через проведення заміни до названої тотожності (наприклад: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$ або $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$ та інші подібні).

***Задача 1. Визначити найбільше та найменше значення виразу:***

$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha$,

***де a та b – деякі дійсні числа, не рівні нулю одночасно.***

Для розв'язування задачі слід помножити та поділити даний у задачі вираз на $\sqrt{a^2+b^2}$. Тоді отримаємо:

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\alpha\right).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можна провести заміну $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ на $\cos\varphi$, а вираз $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ замінити на $\sin\varphi$ (адже виконується тотожність $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$). Скориставшись формулою синуса суми двох кутів, даний у задачі вираз можна представити так:

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi).$$

Очевидно, що за умови $-1 \le \sin(\alpha + \varphi) \le 1$ найбільшим значенням виразу буде $\sqrt{a^2+b^2}$, а найменшим $-\sqrt{a^2+b^2}$.

***Задача 2. Визначити властивості та побудувати графік функції:***

$y(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

Спосіб розв'язування даної вправи аналогічний до розв'язаної раніше – зводимо задану функцію до вигляду: $y(x) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$, де $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Очевидно, що графік отриманої функції відрізняється від графіка функції $y(x) = \sin x$ паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{(-\varphi;\, 0)}$ та більшою в $\sqrt{a^2+b^2}$ рази амплітудою.

Очевидними тепер є і властивості отриманої функції.

***Задача 3. Розв'язати рівняння:*** $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ ***де a, b та c – деякі дійсні числа, не рівні нулю одночасно.***

Для розв'язування використовуємо той же спосіб – ділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$. Отримаємо:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а ввівши додатковий кут $\varphi$ такий, що $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і згорнувши ліву частину рівняння до синуса суми двох кутів, маємо:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отримане рівняння є елементарним і має загальні розв'язки

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \varphi + \pi k,\ k \in Z$$

при умові, що $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$.

Таким же способом розв'язуються і подібні нерівності.

Очевидно, що вказані задачі можуть породжувати низку задач (чи окремі їхні серії) на застосування описаного способу їх розв'язування. Зазначимо, що тут ми маємо справу ще з однією методичною проблемою, а саме методичною доцільністю використання складання та розв'язування різних задач, породжених задачною темою у формуванні в учнів інтегративних знань і умінь при оперуванні математичним матеріалом.

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі розв'язування зазначених математичних задач наперед заданим способом здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначених завдань. Результати такого аналізу показані на рис.1 у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу способу розв'язування кожної задачі, яка сама по собі у практичному використанні є досить корисною; особливо це стосується підготовки на базі таких структурних аналізів уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів або розробки з використанням подібних деталізованих схем системи завдань навчального чи контрольного характеру. Дійсно, подана схема ілюструє детальний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування задач у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язування задачі обраним методом або способом; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння обраним для розв'язування способом.


*Рис. 1. Схема основних компонентів інтегрованого образу при виборі способу розв'язання задач.*

Проведемо узагальнення схеми (рис.1), об'єднавши в одній моделі всі можливі компоненти побудованого інтегрованого образу способу розв'язування задач. Отримаємо перелік складних математичних умінь (очевидно, що структура кожного з цих умінь розкривається), які в свою чергу класифікуємо на взаємопов'язані класи за належністю до різних змістовних ліній шкільного курсу математики. На рис. 2 якраз і зображений продукт систематизації – об'єднання класів компонентів інтегрованого образу способу розв'язування задач. Зв'язки між класами та компонентами інтегрованого образу і становлять продукт операції синтезу нових знань учнів, що набуваються у процесі використання наперед заданого способу розв'язування для різних математичних задач.


*Рис. 2. Класифікація складних математичних умінь за належністю до різних змістовних ліній ШКМ.*

Зазначимо, що вказані дві задачі не вичерпують можливих варіантів застосування описаного способу розв'язування. Мета написання даної статті потребує деталізації та розкриття методичних умов, при яких використання наперед обраного математичного факту при розв'язуванні різних математичних задач буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом.

**Висновки**.

1. Формування інтегрованого образу способу розв'язування задачі з уведенням додаткового кута передбачає детальний аналіз та порівняння ознак і характеристик окремих його компонентів.

2. Вибір множини задач, що розв'язуються наперед заданим способом здійснюється з урахуванням

загальної мети організації навчальної діяльності учнів і залежить лише від планування вчителем можливої широти навчальної діяльності учнів [6]. Тому, модель (схема, характеристики чи кінцевий результат) формування інтегрованого способу розв'язування математичних задач залежать, по-перше, від мети, поставленої вчителем. З іншого боку вибір вже готового способу розв'язування задачі як результат евристичної діяльності не може бути об'єктивно визначений як нераціональний – наперед обраний спосіб розв'язування певної задачі для формування умінь використання саме обраного вчителем способу на практиці однозначно є раціональним.

3. При формуванні інтегрованого образу обраного способу розв'язання серії задач вчитель організовує процес мисленого об'єднання компонентів цього образу за їхніми істотними ознаками; тому у процесі реалізації такого способу продуктивним для використання є метод узагальнення знань та умінь учнів.

4. У процесі планування та підготовки формування інтегрованого образу обраного способу розв'язання серії задач здійснюється розподіл компонентів інтегрованого образу на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками їх подібності; у процесі безпосереднього формування інтегрованого образу такого способу розв'язання задач відбувається систематизація – об'єднання компонентів інтегрованого образу у єдину цілісність з подальшим синтезом нових знань. Процес інтеграції знань, умінь та навичок, що актуалізується для використання обраного способу розв'язування серії задач, зображений на рис. 1 та 2.

Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання обраного способу розв'язання серії задач з метою формування стійких умінь оперування математичним матеріалом.

## БІБЛІОГРАФІЯ


1. Кушнір В., Ріжняк Р. Формування в учнів складннх умінь внкористовуватн моделювання у процесі розв'язування математичннх задач інтегратнвного змісту // Математнка в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
2. Кушнір В., Ріжняк Р. Розв'язування математичннх задач інтегратнвного змісту засобамн комп'ютерного моделювання // Математнка в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
3. Раков С.А. Математична освіта: компетентніснні підхід з внкорнстанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
4. Пойа Д. Как решать задачу. – Москва: Учпедгнз, 1959.
5. Кушнір В., Кушнір Г., Ріжняк Р. Системне моделювання процесу розв'язування текстовнх математичннх задач: кібернетичнні підхід // Постметоднка. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
6. Кушнір В. Снстемнні аналіз педагогічного процесу: методологічнні аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.


## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ


**Кушнір Василь Андрійовнч** – доктор педагогічннх наук, професор кафедри математнки Кіровоградського державного педагогічного універснтету імені Володнмира Внннниченка.

**Ріжняк Ренат Ярославовнч** – кандидат педагогічннх наук, професор кафедри математнки Кіровоградського державного педагогічного універснтету імені Володнмира Внннниченка, декан фізнко-математичного факультету.


*Наукові інтереси*: методнка навчання математнки.