УДК 519.21

ПРО ОДИН КЛАС МІР РАЙХМАНА, ПОРОДЖЕНИХ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

О.П. МАКАРЧУК

Построено два класа вероятностных мер Райхмана, порожденных случайнымн величннамн типа Джессена-Винтнера.

We construct two classes of probability measures Reichman generated by the random variables of type Jessen-Wintner.

Иехай ξ_k послідовність незалежних випадкових велнчнн (в.в), які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностямн $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}$ відповідно. В.в $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$ назнвається випадковою велнчиною, зображеною двійковнм дробом з двома надлншковнмн цнфрамн.

За теоремою Джессена-Вінтнера [4] в.в. ξ має чистий розподіл, тобто чисто дискретнн̆й або чисто абсолютно неперервнн̆й або чисто снгулярнн̆й. За теоремою П.Леві [6] в.в ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тількн тоді коли $\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0\le i\le 3}\{p_{ik}\} > 0$.

Характеристнчною функцією внпадкової велнчннн назнвається комплекснозначна функція $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$, де M математнчне сподівання. Відомо[2, с.35], якщо в.в ξ має абсолютно неперервнн̆й розподіл, то $L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 0$. Ймовірнісна міра $P_\xi(\cdot)$ породжена випадковою велнчнною ξ, для якої $L_\xi = 0$ назнвається мірою Райхмана. Потрібно відмітнтн, що в роботі [3] побудовані приклади сингулярних, відносно міри Лебега ймовірнісних мір Райхмана.

Теорема 1. *Якщо* $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} - \sqrt{p_{3k}})^2 < \infty$, *то* $P_\xi(\cdot)$ – *ймовірнісна міра Райхмана..*

Доведення. Розглянемо випадкову велнчнну $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k 2^{-k}$, де ψ_k - незалежні випадкові велнчинн, які мають наступні розподіли

$$\psi_k: \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q_{0k} & \frac{1}{2}-q_{0k} & q_{0k} & \frac{1}{2}-q_{0k} \end{matrix}$$

де $\quad q_{0k}=\dfrac{(\sqrt{p_{0k}}+\sqrt{p_{2k}})^2}{2((\sqrt{p_{0k}}+\sqrt{p_{2k}})^2+(\sqrt{p_{1k}}+\sqrt{p_{3k}})^2)}$, $\forall k\in N$

Функція розподілу в.в ψ абсолютно неперервна [2],отже, ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега на $[0;3]$.

Визначнмо дві послідовності ймовірнісних просторів $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$ наступннм чииом:

$\Omega_k=\{0;1;2;3\}$, σ-алгебра A_k внзначена на всіх підмножннах Ω_k.

$\mu_k(0)=p_{0k}, \mu_k(1)=p_{1k}, \mu_k(2)=p_{2k}, \mu_k(3)=p_{3k}$;

$\nu_k(0)=q_{0k}, \nu_k(1)=q_{1k}=\frac{1}{2}-q_{0k}, \nu_k(2)=q_{2k}=q_{0k}, \nu_k(3)=q_{3k}=\frac{1}{2}-q_{0k}$;

Очевидно, що $\mu_k\sim\nu_k$ для будь-яких $k\in N$. Розглянемо нескінченні добуткн ймовірнісннх просторів $(\Omega, A, \mu)=\prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, A_k, \mu_k)$, $(\Omega, A, \nu)=\prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, A_k, \nu_k)$

Використовуючн, теорему Какутані [5], можемо зробитн висиовок, що $\mu\sim\nu$ тоді і тількн тоді , коли

$\prod_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}}d\nu_k>0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\sqrt{p_{ik}q_{ik}}>0$, враховуючн умову маємо:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\sqrt{p_{ik}q_{ik}}>0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}}+\sqrt{p_{2k}})^2+(\sqrt{p_{1k}}+\sqrt{p_{3k}})^2)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}}+\sqrt{p_{2k}})^2+(\sqrt{p_{1k}}+\sqrt{p_{3k}})^2)>0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2}((\sqrt{p_{0k}}+\sqrt{p_{2k}})^2+(\sqrt{p_{1k}}+\sqrt{p_{3k}})^2)<\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{p_{0k}}-\sqrt{p_{2k}})^2+(\sqrt{p_{1k}}-\sqrt{p_{3k}})^2<\infty$$

Розглянемо внмірне відображення $\Omega \xrightarrow{\varphi} [0;3]$ внзначене рівністю:

$$\forall\omega\in\Omega: \varphi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k}{2^k}$$

Визначнмо образн μ^* і ν^* мір μ і ν під дією φ наступннм чииом

$$\mu^*(E)=\mu(\varphi^{-1}(E))$$
$$\nu^*(E)=\nu(\varphi^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножннн E.

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_ξ ,а міра ν^* — з ймовірнісною мірою P_ψ еквівалентною мірі Лебега . З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν внплнває абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскількн $\nu^* \sim \lambda$ то з умовн внплнває абсолютна неперервність розподілу ξ , а тому $L_\xi = 0$.

Теорема 2. *Якщо* $\sum_{k=1}^{\infty}(1-2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) < \infty$, *то* $P_\xi(\cdot)$ *− ймовірнісна міра Райхмана.*

Доведення. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty}(1-2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) < \infty$, то $\lim_{k\to\infty}(1-2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) = 0$,

$1 \ge p_{0k} + p_{3k} \ge 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}} \to 1$, при $k \to \infty$, тому $\lim_{k\to\infty}(p_{0k} + p_{3k}) = 1$

$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{3k}})^2 = \lim_{k\to\infty}(p_{0k} + p_{3k} - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}}) = (1-1) = 0$, звідки

$\lim_{k\to\infty}(p_{0k} - p_{3k}) = \lim_{k\to\infty}(\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{3k}})(\sqrt{p_{0k}} + \sqrt{p_{3k}}) = 0$.

Отже, $\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}(\lim_{k\to\infty}(p_{0k} + p_{3k}) + \lim_{k\to\infty}(p_{0k} - p_{3k})) = \frac{1}{2}$,

$\lim_{k\to\infty} p_{3k} = \frac{1}{2}(\lim_{k\to\infty}(p_{0k} + p_{3k}) - \lim_{k\to\infty}(p_{0k} - p_{3k})) = \frac{1}{2}$.

Такнм чииом, існує натуральне число $k_0 : p^2{}_{0k} + p^2{}_{3k} \ne 0, \forall k \ge k_0, k \in N$.

Згортка абсолютно неперервної та дпскретної функцій розподілу є абсолютно неперервною, тому не обмежуючп загальності вважатнмемо $k_0 = 1$.

Розглянемо вппадкову велнчнну

$\psi = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k 2^{-k}$,де ψ_k - незалежні вппадкові велнчннн, які мають наступні розподілп

ψ_k:	0	1	2	3
	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

$\forall k \in N$

Легко бачптн, вппадкова велнчнна ψ, має рівномірнпй на $[0;3]$ розподіл.

Отже, ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега на $[0;3]$.

Впзначнмо дві послідовності ймовірнісннх просторів $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$ наступннм чииом:

$\Omega_k = \{0;1;2;3\}$, σ-алгебра A_k внзначена на всіх підмножннах Ω_k.

$\mu_k(0) = p_{0k}, \mu_k(1) = p_{1k}, \mu_k(2) = p_{2k}, \mu_k(3) = p_{3k}$;

$\nu_k(0) = q_{0k} = \frac{1}{2}, \nu_k(1) = q_{1k} = 0, \nu_k(2) = q_{2k} = 0, \nu_k(3) = q_{3k} = \frac{1}{2}$;

Очевндно, що $\mu_k \sim \nu_k$ для будь-яких $k \in N$. Розглянемо нескінченні добуткн ймовірісннх просторів $(\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, A_k, \mu_k), (\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, A_k, \nu_k)$

Внкорпстовуючн, теорему Какутані [5], можемо зробптн висиовок, що

$\mu \sim \nu$ тоді і тількн тоді , коли $\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3} \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0$,

враховуючп умову маємо:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3} \sqrt{p_{ik} q_{ik}} > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\frac{1}{2} p_{0k}} + \sqrt{\frac{1}{2} p_{3k}}) > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\frac{1}{2} p_{0k}} + \sqrt{\frac{1}{2} p_{3k}})^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{p_{0k} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + p_{3k}}{2}) < \infty$$

що внконується, адже

$$0 \le 1 - \frac{p_{0k} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + p_{3k}}{2} \le 1 - \frac{2\sqrt{p_{0k} p_{3k}} + 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}}}{2} = (1 - 2\sqrt{p_{0k} p_{3k}})$$

Розглянемо внмірне відображення $\Omega \xrightarrow{\varphi} [0;3]$ внзначене рівністю:

$$\forall \omega \in \Omega : \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^k}$$

Впзначнмо образп μ^* і ν^* мір μ і ν під дією φ наступннм чииом

$$\mu^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$$

$$\nu^*(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножннн E.

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_ξ, а міра ν^* — з ймовірнісною мірою P_ψ еквівалентною мірі Лебега . З абсолютної неперервності мірп μ відносно мірп ν внплнває абсолютна неперервність мірп μ^* відносно мірп ν^*. Оскількн $\nu^* \sim \lambda$ то з умовн внплнває абсолютна неперервність розподілу ξ , а тому $L_\xi = 0$.

ПОСИЛАННЯ

[1]. Лукач Е. *Характеристические функции* . М.: Наука главная редакция физ.- мат. лит.,1979. – 424с.

[2]. Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. – 296с.

[3]. Albeverio ,S.,Goncharenko. Y.,Pratsiovyti, M .,Torbin, G., (2007).Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits. *Random Oper. Stochastic Equations,* .**15**,№1. P.89-97.

[4]. Jessen ,B., Wintner, A. (1935).Distribution function and Riemann Zeta-function, *Trans. Amer. Math. Soc.*38, 48-88.

[5] .Kakutani,S.(1948). Equivalence of inonite product measures, *Ann. of Math.,* 49,214-224.

[6]. Lvy,P.(1931). Sur les sries don’t les termes sont des variables independantes, *Studia math.* 3 .,119-155.