УДК 519.53 + 517.987

СННГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А.Романов

Введені поняття спнгулярностей к-вимірнпх класів, що дозволпло узагальннти відомнй результат про розкладання мірп в просторі R^n в суму абсолютно неперервної та сингулярної компонент на банахові просторп.

It are introduced the notions of singularities of k-dimensional classes that make it possible for generalization the known result of decomposition a measure in the space R^n into the sum of an absolutely continuous and a singular components for the Banach spaces.

1. Введение. Нзвестно, что для любой меры в конечномерном линейном ипространстве существует ее разложение (в смысле Лебега) в сумму двух такнх комионент, одна из которых абсолютно неирерывна, а другая сингулярна относительно инвариантной лебеговой меры. Также нзвестно [1], что в бесконечномерных банаховых иространствах отсутствуют нетривиальные не только инвариантные, но даже и квазиинвариантные (ио всем наиравленням) меры. В связи с этнм обстоятельством в [2] были введены ионятия неирерывной и виолне разрывной мер в линейном иространстве X, зависящие от фиксированного иодиространства H, а также была доказана возможность однозначного разложения ироизвольной меры в X в сумму H-неирерывной и виолне H-разрывной комионент, которое в случае $X=H=R^n$ совиадает с уиомянутым разложением в смысле Лебега. Поскольку во многих воиросах теории меры в банаховых иространствах ннкакое линейное иодиространство H заранее не фиксируется, то иредставляет ннтерес иолучение таких разложений мер, которые не зависят нн от какого линейного иодиространства. Указанные разложения будут иолучены в теоремах 1 и 2 данной статьи с иомощью вводимых в этой же статье ионятий к-мерных сингулярностей.

2. Постановка задачп. Пусть X – сеиарабельное банахово иространство. Под *мерами* в X ионнмаем виолне конечные счетно-аддитнвные фуикции множества, оиределенные на сигма-алгебре борелевских множеств из X и иринимающие неотрицательные значения. Под *сдвигом* меры m на вектор h из X ионнмаем меру m_h, значение которой на каждом борелевском множестве B задается формулой $m_h(B)=m(B + h)$.

Определенне 1. Наиравление вектора h называется *направлением непрерывности* меры, если ири сдвиге меры на th и стремлении коэффнцнента t к нулю вариация разностн между сдвннутой мерой и исходной мерой нмеет нулевой иредел.

Известно [3, с.484], что множество всех наиравлений неиерывностн меры образует линейное иодиространство (не обязательно замкнутое).

Пусть к – натуральное число.

Определенне 2. Меру называем элементом *класса к-мерной непрерывности*, если ее можио иредставнть как сумму конечного или счетного числа таких мер, для которых иодиространства наиравлений неиерывностн нмеют размерности не меньше к.

Определенне 3. Меру называем элементом *класса к-мерной сингулярности,* если она сингулярна относительно каждой меры нз класса к-мерной неиерывностн.

Замечанне 1. Из оиределения 2 сразу следует, что класс мер к-мерной неиерывностн замкнут относительно оиерации сложения. Если бы этот класс был оиределен нначе – как множество мер, для которых иодиространства наиравлений неиерывностн нмеют размерностн не меньше к (а не как суммы таких мер), – то этого свойства не было бы. Наиример, сумма двух гауссовских мер, сосредоточенных на взаимно ортогональных иодиространствах гильбертова иространства, не нмеет ии одного наиравлення неиерывностн, хотя каждая нз иих такие наиравления нмеет.

Замечание 2. Из оиределений 2 и 3 следует, что для иринадлежностн меры классу к-мерной сингулярностн необходимо и достаточно иотребовать, чтобы она была сингулярной относительно каждой меры, для которой иодиространство наиравлений неиерывностн нмеет размерность не меньше к.

Замечание 3. Ясио также, что ири возрастании к классы мер к-мерной неиерывностн образуют убывающую, а классы мер к-мерной сингулярностн – возрастающую ио включению иоследовательность множеств.

Цель статьи состоит в доказательстве теорем о разложнмости мер на комионенты, входящие во введенные классы неиерывностн и сингулярностн.

3. Результаты работы.

Лемма 1. *Если мера абсолютно непрерывна относительно элемента из класса к-мерной непрерывности, то она сама принадлежит этому классу.*

Доказательство очевидно и основано на результатах [4, с. 81-82], согласно которым ири иереходе к абсолютно неиерывной мере все нмеющиеся наиравления неиерывностн сохраняются (ири этом могут иоявнться и новые).

Лемма 2. *Если мера мажорируется элементом из класса к-мерной непрерывности, то она сама входит в этот класс.*

Лемма 2 является иростым следствием леммы 1.

Лемма 3. *Если мера совпадает с суммой ряда, составленного из элементов, входящих в класс к-мерной непрерывности, то она тоже входит в этот класс.*

Доказательство очевидно и основано на оиределении 2 и на том иростом факте, что двойной ряд нмеет счетное число слагаемых.

Лемма 4. *Если мера m совпадает с пределом возрастающей (в широком смысле) последовательности элементов m_j из класса к-мерной непрерывности, то она тоже входит в этот класс.*

Доказательство. Разностн m_j – m_{j-1} соседних элементов нашей возрастающей иоследовательностн мажорируются элементамн m_j нз класса к-мерной неиререывностн, а иотому (согласно лемме 2) самн входят в этот класс. Ряд, составленный нз таких разностей и нз меры m_1, нмеет своей суммой меру m, а иотому для завершения доказательства остается ирнменнть лемму 3.

Лемма 5. *Для принадлежности меры s классу к-мерной сингулярноти необходимо и достаточно потребовать, чтобы она не была мажорантой ни для какой нетривиальной меры d из класса к-мерной непрерывности.*

Доказательство необходимости. Если d мажорируется мерой s, то d абсолютно неиререывна относительно s. Если ири этом d иринадлежнт классу к-мерной неиререывностн, то (с учетом оиределения 3) d сингулярна относительно s. Такнм образом, d одновременно абсолютно неиререывна и сингулярна относительно некоторой меры, а иотому тривиальна.

Доказательство достаточности. Пусть c – ироизвольная мера нз класса к-мерной неиререывностн, d – абсолютно неиререывная комионента меры s относительно c. Тогда (ио лемме 1) мера d входит в класс к-мерной неиререывностн, а иотому с учетом ее мажорируемостн мерой s должно выиолняться равенство d=0. Следовательно, мера s сингулярна относительно c, а иотому (с учетом ироизвольностн выбора c нз класса к-мерной неиререывностн) s иринадлежнт классу к-мерной сингулярностн. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Пусть m – мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств сепарабельного банахова пространства X, к - натуральное число. Тогда меру m можно единственным способом разложить в сумму*

$m=c+s$, где c принадлежит классу к-мерной непрерывности, а s – классу к-мерной сингулярности.

Доказательство существования. Пусть M – множество таких элементов нз класса к-мерной неиререывностн, которые мажорируются мерой m. Обозначнм через A верхнюю грань значений мер нз M на всем ирострастве X. Эта верхняя грань не иревосходнт m(X), а иотому конечна. Существует такая иоследовательность мер p_n нз M, для которой p_n(X) нмеет иределом число A. Обозначнм через c_n верхнюю грань иервых n мер указанной иоследовательностн. Ясно, что иоследовательность мер c_n монотонно возрастает, иричем c_n(X) нмеет иределом число A.

Поскольку верхняя грань конечного числа элементов мажорируется суммой этнх элементов, то нз леммы 2 с учетом замечания 1 следует, что меры c_n иринадлежат классу к-мерной неиререывностн. Поскольку мера m является общей мажорантой для всех p_n, то она будет общей мажорантой и для всех c_n. Следовательно, меры c_n входят в множество M.

Поскольку для каждого борелевского множества B нз X числовая иоследовательность c_n(B) монотонна и ограннчена, то ио теореме Вейершрасса она нмеет конечный иредел, который обозначнм через c(B). Согласно теореме Никодима [5, с. 177], функция множества c как иредел относительно сходимостн на системе нзмеримых множеств иоследовательностн счетно-аддитнвных функцнй тоже нмеет свойство счетной аддитнвностн, то есть является мерой.

Поскольку меры c_n возрастающей иоследовательностн входят в класс к-мерной неиререывностн, то ио лемме 4 иредельная мера c также входит в этот класс. Кроме того, иредельная мера c мажорируется той же мерой m, что н все c_n. Следовательно, мера c иринадлежнт множеству M, иричем ясно, что c(X)=A.

Итак, мера c уже построена. Зададим теперь меру s формулой s=m – c. Для доказательства ее к-мерной сингулярности воспользуемся леммой 5. Пусть d – элемент из класса к-мерной непрерывности, мажорируемый мерой s. Тогда мера d + c мажорируется мерой m и входит в класс к-мерной непрерывности. Следовательно, d + c входит в множество M, а потому d(X) + c(X) не превосходит A. Так как c(X) = A, то отсюда следует, что d(X) = 0, а потому мера d нулевая. Следовательно, по лемме 5 мера s имеет свойство к-мерной сингулярности. Доказательство существования завершено.

Доказательство единственности. Предположим, что m = c* + s* - еще одно разложение, для которого c* имеет свойство к-мерной непрерывности, а s* - к-мерной сингулярности. Тогда c* - c = s – s*.

Рассмотрим меру c_0, равную верхней грани вещественной меры c* - c и нулевой меры. Поскольку c_0 мажорируется элементом c* + c из класса к-мерной непрерывности, то по лемме 2 c_0 тоже входит в этот класс. Ио c_0 мажорируется и мерой s из класса к-мерной сингулярности, а потому по лемме 5 $c_0 = 0$. Следовательно, мера c* не превосходит меру c. Аналогично можно доказать, что мера c не превосходит меру c*. Поэтому c=c* и s=s*. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть m - мера, определенная на сигма-алгебре борелевских подмножеств сепарабельного банахова пространства X. Тогда существует такая последовательность мер s_k и такая мера c, для которых выполняются следующие свойства:*

1) $m = c + \sum_{k=1}^{\infty} s_k$.
2) *Для каждого натурального к мера s_k входит в класс к-мерной сингулярности.*
3) *Для каждого $к > 1$ мера $s_к$ входит в класс (к – 1) –мерной непрерывности.*
4) *Мера c входит в класс n - мерной непрерывности для всех n.*

Меры c и s_k определены однозначно.

Доказательство существования. Вначале к самой мере m иркменяем теорему 1 ири к=1. В результате иолучаем разложение

$$m = s_1 + c_1 ,$$

где s_1 входит в класс 1-мерной сингулярности, а c_1 - в класс 1-мерной неиререывности. Мера s_1 уже иостроена.

Затем к мере c_1 иркменяем теорему 1 ири к=2. В результате иолучаем разложение

$$c_1 = s_2 + c_2,$$

где s_2 входит в класс 2-мерной сингулярности (но вместе с тем, как и c_1, входит в класс 1-мерной неиререывности), а c_2 - в класс 2-мерной неиререывности. Теиерь иостроены уже две меры s_1, s_2.

Затем к мере c_2 иркменяем теорему 1 ири к=3. Продолжая этот ироцесс, ириходим к равенствам

$$m = c_n + \sum_{k=1}^{n} s_k ,$$

в которых для мер s_k выиолнены свойства 2) и 3), а иоследовательность мер c_n монотонно убывает к некоторой мере c (возможно, нулевой), иричем для каждого n мера c_n входит в класс n-мерной неиререывности. Переходя в иолученных равенствах к иределу, ириходим к формуле, составляющей свойство 1). Полученная ири этом мера c мажорируется каждой из мер c_n, а иотому (ио лемме 2) для нее выиолняется свойство 4). Доказательство существования завершено.

Доказательство единственности. Вначале к мере m иркменяем вторую часть теоремы 1 (касающуюся единственности) ири к=1. Это иркменение обесиечивает единственность меры s_1. Затем к мере $m - s_1$ иркменяем теорему 1 ири к=2, что обесиечивает единственность меры s_2.После этого к мере $m - (s_1 + s_2)$ иркменяем теорему 1 ири к=3. Продолжение этого процесса обеспечивает единственность всех мер s_k . Следовательно, мера с также определена однозначно. Теорема 2 полностью доказана.

Замечаиие 4. Поскольку в пространстве R^n непрерывность меры по всем направлениям эквивалентна ее абсолютной непрерывности относительно инвариантной меры Лебега, то применение теоремы 2 к указанному пространству позволяет получить следующее

Следствие 1. Пусть m - мера в пространстве R^n. Тогда существует такой конечный набор мер s_k и такая мера с, для которых выполняются следующие свойства:

1) $m= c + \sum_{k=1}^{n} s_k$.
2) Для каждого натурального к, не превосходящего n , мера s_k входит в класс к-мерной сингулярности.
3) Для каждого к, для которого $2 \leq к \leq n$, мера s_k входит в класс (к – 1)-мерной непрерывности.
4) Мера с абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры Лебега.

Меры с и s_k определены однозначно.

Замечаиие 5. Следствие 1 детализирует известное разложение (в смысле Лебега) меры в пространстве $X = R^n$ в сумму абсолютно непрерывной и сингулярной относительно инвариантной лебеговой меры компонент. В качестве примера такой детализации зададим с как невырожденную гауссовскую меру в R^n, s_1 - как сингулярную меру, сосредоточенную на канторовском подмножестве отрезка единичной длины, помещенного в R^n, остальные s_k - как произведения индикаторов кубов с ребром ½ размерности к-1 (также помещенных в R^n) на инвариантные меры Лебега в линейных оболочках этих кубов ($к \leq n$) . Зададим теперь m как сумму с и всех этих s_k. Тогда компонентами разложения меры m в смысле

Лебега будут с и *сумма* всех s_k, а комионентамн разложения меры m , оиределяемого следствием 1, – с и все *отдельные* s_k.

Замечаине 6. Если в качестве X взять бесконечномерное сеиарабельное банахово иространство, в качестве с – невырожденную гауссовскую меру в таком иространстве [6, с. 170-175], а меры m и s_k задать аналогично тому, как это было сделано в замечании 5 (только теиерь количество сингулярных мер s_k становнтся бесконечным), то обычного разложения меры m в смысле Лебега не существует (ввиду отсутствия в X ннвариантной меры Лебега), а разложение, оиределяемое теоремой 2, будет нметь место, иричем его комионентамн служат оиять-такн с и все *отдельные* s_k (иоследние – уже в бесконечном количестве).

ССЫЛКИ

[1] Судаков В.Н. (1959) . Лннейные множества с квазнннварнантной мерой. *Доклады АН СССР.* 127, № 3, 524 – 525.

[2] Романов В.А. (1976). О непрерывных и вполне разрывных мерах в лннейных пространствах. *Доклады АН СССР.* 227, № 3, 569 – 570.

[3] Романов В.А. (1982). Алгебрančеские размерностн лннейных многообразнй непрерывных и днфференцируемых направленпй мер в гильбертовом пространстве. *Математические заметки.* 32, № 4, 483 – 491.

[4] Романов В.А. (1977). Об Н-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика.* 32, № 1, 81 – 85.

[5] Данфорд Н.,Шварц Дж. (1962). *Линейные операторы. Общая теория.* –М.: НЛ.–895 с.

[6] Вахання Н.Н., Тариеладзе В.Н., Чобанян С.А. (1985). *Вероятностные распределения в банаховых пространствах.* – М.: Наука. – 368 с.