УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВНПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ДВІЙКОВНМН ЦИФРАМИ

О.П.Макарчук

В работе иайдеиы иеобходимые и достаточиые условия, при которых величииа $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\psi(t)|$ ($f_\psi(t)$ – характеристическая фуикция ψ) равиа 1, для случайиой величииы ψ представлеииой двоичиой дробью с иезависимыми цифрами.

In this paper found necessary and sufficient conditions under which the value $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\psi(t)|$ ($f_\psi(t)$ – characteristic function of ψ) is equal 1, for the random variable ψ with independent binary digits .

1.Вступ

Нехай ψ_k – послідовиість иезалежиих випадкових величии, які иабувають зиачеиь 0,1 з ймовіриостями p_{0k}, p_{1k} відповідио. Випадкова величииа $\psi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{2^k}$ иазивається випадковою величииою ψ з иезалежиими двійковими цифрами.

За теоремою Джессеиа-Віитиера [6] випадкова величииа ψ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретиий, або чисто абсолютно иеперервиий, або чисто сиигуляриий. За теоремою П.Леві [7] розподіл ψ дискретиий тоді і тільки тоді коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0 .$$

Характеристичиою фуикцією випадкової величиии ξ иазивається комплексиозиачиа фуикція $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$, де $M(\cdot)$ – математичие сподіваиия. Розгляиемо величииу $L_\psi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\psi(t)|$.

Теорема 1.[1]. *Якщо розподіл випадкової величини ξ*

1) дискретний, то $L_\xi = 1$;

2) абсолютно неперервний, то $L_\xi = 0$;

3) сингулярний, то L_ξ *може набувати довільного значення з відрізку* $[0;1]$.

В роботі [5] Жиро навів приклад сингулярного розподілу ξ , для якого $L_\xi = 0$.

Прнклад характернстнчної функції сингулярного розподілу ξ, для якого $L_\xi = 1$ наведено Єссеєном в [4] .Сингулярні розподіли ξ, для яких L_ξ набуває заданого значення з відрізку $[0;1]$ побудовані Шварцем [8].

В роботі [3] показано, що $L_\psi = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}$.

Потрібно відмітнти, що питання знаходження необхідних та достатніх умов рівності $L_\psi = 1$ в [3] не піднімалось.

2.Асимптотичиі властивості модуля характеристичиої фуикції випадкової величиии ψ.

Теорема 2. *Для виконання рівності* $L_\psi = 1$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = 0.$$

Доведеиия.

Необхідність.

Позначимо $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k}{2^k}$, тоді послідовність випадкових величин S_n з ймовірністю 1 збігається до ψ, тоді S_n збігається за розподілом до ψ.

За теоремою П.Леві про неперервну відповідність характеристичних функцій:

$$f_{S_n}(t) \to f_\psi(t), (n\to\infty) \forall t \in R.$$

Маємо:

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\frac{\psi_k}{2^k}}(t) = \prod_{k=1}^{n} (p_{0n} + p_{1n} e^{\frac{it}{2^k}})$$

$$f_{\psi}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (p_{0n} + p_{1n} e^{\frac{it}{2^k}})$$

Оскількн $| p_{0n} + p_{1n} e^{\frac{it}{2^n}} | = \sqrt{1 - 4 p_{0n} p_{1n} \sin^2 \frac{t}{2^{n+1}}}$, то

$$| f_{\psi}(t) |^2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 4 p_{0k} p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2^{k+1}})$$

Нехай $L_{\psi} = 1$, тоді існує зростаюча необмежена послідовність додатних чисел t_n, для якої $\lim_{n\to\infty} | f_{\psi}(t_n) | = 1$, бо $| f_{\psi}(-t) | = | f_{\psi}(t) |$ для кожного дійсного t.

Нехай $m_n = [\log_2 \frac{t_n}{\pi}]$, тоді $2\pi = \frac{t_n}{2^{\log_2 \frac{t_n}{\pi} - 1}} > \frac{t_n}{2^{m_n}} \geq \frac{t_n}{2^{\log_2 \frac{t_n}{\pi}}} = \pi$.

Маємо:

$$| f_{\psi}(t_n) |^2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 4 p_{0k} p_{1k} \sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}}) \leq \prod_{j=m_n}^{\infty} (1 - 4 p_{0j} p_{1j} \sin^2 \frac{t_n}{2^{j+1}}) \leq$$

$$\leq \prod_{j=0}^{\infty} (1 - 4 p_{0(m_n+j)} p_{1(m_n+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}})$$

Оскількн $\lim_{n\to\infty} | f_{\psi}(t_n) | = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{\infty} (1 - 4 p_{0(m_n+j)} p_{1(m_n+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}) = 1.$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{\infty} \ln(1 - 4 p_{0(m_n+j)} p_{1(m_n+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}) = 0.$$

Оскількн $\ln(z+1) \leq z$, для $z \in (-1; \infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(m_n+j)} p_{1(m_n+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = 0.$$

що і потрібно довести.

Достатність.

Зрозуміло, що існує зростаюча послідовність натуральних чисел $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ така, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} < \frac{1}{k}, \forall k \in N$$

Оскількн $\sin^2 \frac{\pi}{2^j} = 4\sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \cos^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \le 4\sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}, \forall j \in Z_+$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j} \le 4\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} < \frac{4}{k}, \forall k \in N$$

Розглянемо послідовність $b_k = \pi 2^{n_k}$, тоді

$$|f_\psi(b_k)|^2 = \prod_{j=1}^{n_k-1} (1 - 4p_{0j} p_{1j} \sin^2 \frac{\pi 2^{n_k}}{2^{j+1}}) \prod_{j=n_k}^{\infty} (1 - 4p_{0j} p_{1j} \sin^2 \frac{\pi 2^{n_k}}{2^{j+1}}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}).$$

Відомо, що $\prod_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, при $\alpha_j \in [-1;0], \forall j \in \{1,2,...,n\}$

Для кожного натурального r маємо

$$\prod_{j=1}^{r} (1 - 4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j}) \ge 1 - \sum_{j=1}^{r} 4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^j} > 1 - \frac{16}{k}, \forall k \in N$$

Отже,

$$|f_\psi(b_k)|^2 = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 4p_{0(n_k+j)} p_{1(n_k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}}) > 1 - \frac{16}{k}, \forall k \in N$$

$$|f_\psi(b_k)| \to 1 (k \to \infty)$$

Звідки $L_\psi = 1$.

Відмітнмо, що з виконання умови теореми не випливає рівності

$$\lim_{k\to\infty} \max\{p_{0k}; p_{1k}\} = 1$$

Розглянемо послідовність $a_n = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{якщо} \sqrt{n} \in N \\ \frac{1}{n^2}, \text{якщо} \sqrt{n} \notin N \end{cases}$

Нехай $p_{0n} = \frac{1+\sqrt{1-4a_n}}{2}$, тоді $p_{0n} p_{1n} = a_n$.

Маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{0(l^2+j)} p_{1(l^2+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{l^2+j} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \le \sum_{j=1}^{2l} \frac{1}{(l^2+j)^2} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} + \frac{1}{4} \sum_{j=2l+1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} \to 0 (l \to \infty)$$

З іншого боку, послідовність a_n не прямує до 0 при $n \to \infty$, тому умова

$\lim_{k\to\infty} \max\{p_{0k}; p_{1k}\} = 1$ не вконується.

Маємо наступннй важливий наслідок.

Теорема 3. *Для випадкової величини ψ з незалежними двійковими цифрами величина L_ψ*

1) дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}.$$

2)належить відрізку $(0;1)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \overline{\lim_{k\to\infty}} (p_{0k} - \frac{1}{2})^2 > 0; \\ \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} > 0 \end{cases}$$

3) дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{0(k+j)} p_{1(k+j)} \sin^2 \frac{\pi}{2^{j+1}} = 0.$$

ИОСИЛАННЯ

[1] Лукач Е. *Характеристические функции* . М.: Наука ,,1979. 424с.

[2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ імеиі М.П Драгомаиова, 1998. 296с.

[3] Albeverio ,S.,Goncharenko. Y.,Pratsiovyti, M .,Torbin, G., (2007).Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.//*Random Oper.Stochastic Equations,* .15,№1. P.89-97.

[4] Esseen C. Fourier analysis of distribution functions.–. Acta mathematica. 1945. 77 P.1-125.

[5] Girault.M Les fonctions caracteristiques et leurs transformations. Publ.Inst.Statis.Univ, Paris, 1954. 4. P.223-239.

[6] Jessen ,B., Wintner, A. (1935).Distribution function and Riemann Zeta-function, Trans. Amer. Math. Soc.38, 48-88.

[7] Lvy,P.(1931). Sur les sries don't les termes sont des variables independantes, Studia math. 3.,119-155.

[8] Schwartz L. Ser le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilites. C.R.Acad.Sci., Paris, 1941. .212. . P.418-421.