ПостМетодика

Журнал засновано в березні 1993 року

ВИДАВЦІ:

Управління освіти і науки Полтавської обласної державної адміністрації

Полтавський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти ім. М.В.Остроградського

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:
36029, Полтава,
вул. Жовтнева, 64
(05322) 7-26-08;
тел./факс: 50-80-85
e-mail: redpm@pei.poltava.ua
http://ipe.poltava.ua

Реєстраційне свідоцтво:
ПЛ № 51 від 17 лютого 1994 р.

Підписано до друку 9.06.2008
Формат 61х80 $^1/_8$.
Ум. друк. арк. 9,6.
Тираж 400.

ТОВ "АСМІ"
вул.Міщенка, 2,
м.Полтава, 36011
тел. (0532) 56-55-29, 61-50-69

....

Постановою Президії ВАК України від 09.06.1999, №1-05/7 "ПМ" включено у перелік наукових видань, у яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт.

Журнал "ПМ" № 4 (81), 2008 р. підписано до друку за рішенням вченої ради ПОІППО (протокол № 3 від 23.06.2008 р.).

ISSN 1815-3194

№4(81), 2008
ОСВІТНЯ МОЗАЇКА

ФІЛОСОФІЯ ОСВІТИ

ПЕДАГОГІЧНІ ТЕХНОЛОГІЇ

РЕТРОМЕТОДИКА

ЧИТАЛЬНИЙ ЗАЛ

СКАРГА ДИДАСКАЛА

ХРОНІКА

ДОВІДКИ

Розглядається використання математичного моделювання при розв'язуванні рівнянь та нерівностей із параметром у контексті структуризації створення та реалізації алгоритму розв'язування.

Рассматривается использование математического моделирования при решении уравнений и неравенств с параметром в контексте структуризации создания и реализации алгоритма решения.

The using of mathematical modeling in equations and inequalities with a parameter solving in the movement of structurization of creating and realization of the algorithm of solving is considered in the article.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ ІЗ ПАРАМЕТРОМ

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір, Р.Я.Ріжняк

Багато математичних задач шкільного курсу математики є задачами творчого характеру, коли алгоритми їх розв'язання не відомі. По суті, для кожної задачі потрібно створювати "власний" алгоритм розв'язання. Поле можливостей для створення такого алгоритму може бути надзвичайно широким, що і є однією з причин виникнення труднощів при розв'язуванні творчих задач. Невизначеність пошуку алгоритму розв'язування задачі досить значна. Тоді виникає проблема "структуризації" такого поля можливостей, щоб зменшити невизначеність пошуку створення алгоритму та збільшити визначеність такого пошуку.

У загальному вигляді можливість структуризації поля можливостей створення алгоритму розв'язування конкретної задачі зводиться до вирішення таких проблем:

- формулювання вихідної задачі на певній мові (наприклад, у вигляді тексту) (етап 1);
- створення математичної моделі вихідної задачі (етап 2);
- вибір методів та засобів дослідження математичної моделі (етап 3);
- застосування вибраних методів і засобів до дослідження та перетворення моделі (етап 4);
- трансляція отриманих при дослідженні та перетворенні моделі результатів на мову вихідної задачі (етап 5).

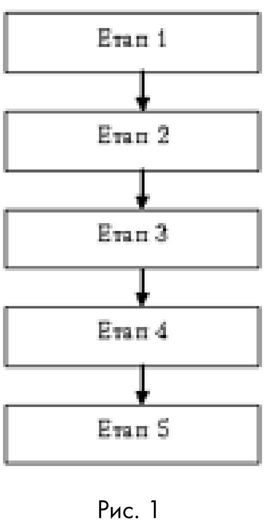

Рис. 1

Послідовність розв'язання вказаних проблем є незмінною і вказана на рис. 1.

Наприклад, вихідною задачею може бути текстова задача (такі задачі вивчаються в школі); її математичною моделлю – рівняння певного типу; дослідження та перетворення моделі може здійснюватися за допомогою еквівалентних перетворень; процес розв'язування моделі полягає у послідовному її перетворенні за допомогою еквівалентних перетворень; нарешті, транслюємо отримані розв'язки на вихідну задачу (наприклад, вибираємо тільки ті корені рівняння, які можуть задовольнити умову задачі).

Метою нашого дослідження є спроба поширити наведений підхід до розв'язування математичних задач типу рівнянь і нерівностей з параметрами. Наведені вище правила є основними "творчими етапами" розв'язування рівнянь і нерівностей із параметрами.

У багатьох збірниках та посібниках із математики, що призначені для школярів, абітурієнтів, студентів педагогічних спеціальностей університетів (відомі збірники задач за авторства та редакцією М.І.Сканаві, В.В.Ясінського, В.Н.Литвиненка, А.Г.Мордковича), є чимала частина задач творчого характеру, які не розв'язуються за допомогою відомих алгоритмів.

У цій статті ми висвітлимо аспект застосування уже сформованих в учнів умінь дослідження властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. Очевидно, що дослідження властивостей заданої функції може здійснюватися різними засобами залежно від змісту та вибраного способу розв'язання вихідної математичної задачі. Тобто, використовуватиметься один із засобів або їх комбінація:

- повне дослідження заданої функції;
- визначення властивостей функції за побудованим графіком (графік побудований, наприклад, методом перетворень, або з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, або схематично);
- визначення властивостей функції з використанням таких пакетів математичних програм, як "Advanced Grafer", "GRAN" та інші;
- дослідження окремих властивостей заданої функції – монотонності, екстремумів тощо.

Розглянемо детальніше висловлені ідеї на прикладах.

Приклад 1. *Розв'язати нерівність:*

$$y = x^2 - (3m+1)x - 3m - 2, \qquad (1)$$

Нерівність (1) є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб встановити залежність між розв'язками нерівності (1) та параметром m. Задачу можна розв'язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

Спосіб 1. Створимо *математичну модель задачі.* Ліва частина нашої нерівності – це квадратний тричлен, у якому x – змінна, а m – параметр. Тому ліву частину можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв'язання якої приведе до знаходження розв'язків нерівності (1). Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданої квадратичної функції*:

$$y = x^2 - (3m+1)x - 3m - 2,$$

які впливають на визначення знаку значень функції.

Засобом дослідження математичної моделі буде відомий алгоритм дослідження властивостей квадратичної функції, за допомогою якого і будемо розв'язувати нерівність (1). Нехай D – дискримінант квадратного тричлена, x_1 та x_2 – його корені (покладемо: $x_1 < x_2$). Враховуючи, що коефіцієнт при старшому члені $1 > 0$, то маємо, що $y > 0$, у випадку $D \ge 0$ на проміжку $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, у випадку $D < 0$ для всіх $x \in R$.

Реалізуємо це в нашій вправі:

$$D = (3m+1)^2 + 4(3m+2) = 9(m+1)^2.$$

Бачимо, що умова $D > 0$ виконуватиметься для всіх $m \neq -1$.

Знайдемо корені квадратного тричлена:

$$x_{1,2} = \frac{3m+1 \pm 3(m+1)}{2}$$

Тому $x_1 = -1,\ x_2 = 3m+2.$

Врахувавши, що при $m > -1$ $x_2 > x_1$, а при $m < -1$ $x_2 < x_1$, сформулюємо відповідь:

$$\begin{cases} \text{при} \quad m \in (-\infty; -1) \quad x \in (-\infty; 3m+2) \cup (-1; +\infty) \\ \text{при} \quad m \in (-1; +\infty) \quad x \in (-\infty; -1) \cup (3m+2; +\infty) \\ \text{при} \quad m = -1 \quad x \in \emptyset \end{cases} \qquad (2)$$

Спосіб 2. Змінимо *вигляд математичної моделі задачі. Побудуємо графік рівняння,* ліва частина якого збігається з лівою частиною нерівності (1):

$$x^2 - (3m+1)x - 3m - 2 = 0.$$

Дане рівняння – це *модель вихідної задачі* (1). Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо:

$$(x^2 - x - 2) - (3mx + 3m) = 0$$

$$(x+1)(x-2-3m) = 0 \qquad (3)$$

$$x = -1; \quad m = \frac{1}{3}(x-2) \qquad \text{(рис. 2)},$$

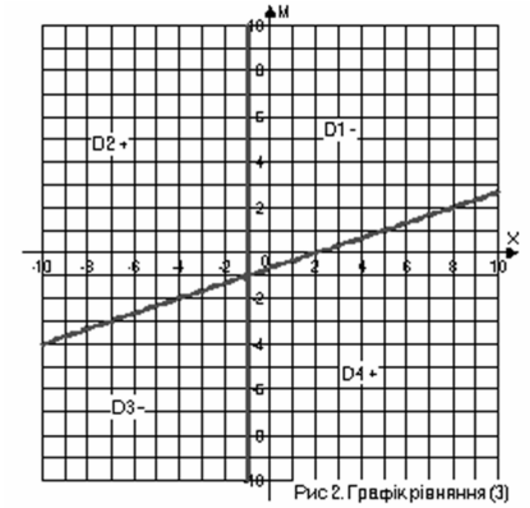

Рис 2. Графік рівняння (3)

Будуємо графік останнього рівняння у системі координат $x0m$. В результаті побудови ми отримаємо пару прямих: які розбили всю числову площину на 4 області: D_1, D_2, D_3, D_4.

Визначимо знаки лівої частини нерівності (1) в кожній з областей. Дійдемо висновку, що умовам нерівності задовольняють лише області D_2 і D_4 без їх границі (оскільки нерівність строга). На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично області D_2 і D_4 так само, як ми показували це в [2], Очевидно, що ми прийдемо до тієї ж відповіді (2).

Приклад 2. *Розв'язати рівняння:*

$$\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0 \qquad (4)$$

Рівняння (4) є вихідною задачею. Зазначимо, що ця задача є вправою з більш розширеною вимогою, ніж вправа № 7.306 із збірника задач [1]. Там вимога така: при яких значеннях а дане рівняння має єдиний корінь. Ми ж поставимо за мету знайти всі розв'язки рівняння (4).

Побудуємо модель задачі. Для розв'язування даного рівняння використаємо графічний спосіб, зобразивши для цього в координатній площині *x*0*a* всі умови, які входять до системи, рівносильної рівнянню (4). Ця *рівносильна система умов буде моделлю вихідної задачі*:

$$\begin{cases} x^2+2ax>0 \\ 8x-6a-3>0 \\ \dfrac{x^2+2ax}{8x-6a-3}=1 \end{cases} \qquad (5)$$

Засобом дослідження моделі буде графічна інтерпретація системи (5), яка буде виконуватися в міру проведення аналізу та дослідження кожного з компонентів моделі. Перші дві умови системи реалізуються шляхом побудови таких графіків рівнянь та функцій:

$$x=0,\ a=-\frac{x}{2} \quad \text{та} \quad a=\frac{8x-3}{6}.$$

На мал.3 це відповідно вісь *0a*, прямі *MN* та *PQ*. Враховуючи перші дві вимоги системи (4.1), очевидним буде висновок, що розв'язки рівняння (4) слід шукати в областях, які визначаються кутом *PDR* (т.*D* $\left(0;-\frac{1}{3}\right)$ – точка перетину прямої *PQ* та осі *0a*, т. *R* – довільна точка числової осі 0a, розміщена на її від'ємній частині) та кутом *QAN* (т. *A* $\left(\frac{3}{11};-\frac{3}{22}\right)$ – точка перетину прямих *PQ* та *MN*). Надалі у тексті об'єднання цих областей позначимо "область D_1" . Для одержання розв'язків рівняння (4) проведемо дослідження та побудуємо графік функції *a=a(x)*, формула якої вказана у третій умові системи (5):

$$a=\frac{x^2-8x+3}{-2x-6} \qquad (6)$$

Зауважимо, що тут можна було б обмежитися і побудовою графіка рівняння, заданого в третій умові системи (5). Результати будуть ідентичні. Врахуємо той факт, що термін "графік рівняння" не є поширеним у шкільному курсі математики і використовується лише під час вивчення лінійних рівнянь з двома змінними та при проведенні узагальнення і систематизації знань та умінь випускників. Однак ми вважаємо доцільним використовувати це поняття і до нелінійних рівнянь.

1. Область визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел за винятком числа – 3. Відразу з'ясуємо факти:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-8x+3}{-2x-6}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-8x+3}{-2x-6}=+\infty$$

Отже, x = – 3 – вертикальна асимптота.

2. З'ясуємо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю *0a* – точка *D* $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, з віссю *0x* – точки *B* $(4+\sqrt{13};\,0)$ та *C* $(4-\sqrt{13};\,0)$

3. Дослідимо функцію на зростання/спадання.

$$a'(x)=\frac{-2x^2-12x+54}{(-2x-6)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=3 \end{array}\right.$$

При цьому a(-9)=13, a(3)=1. Визначивши знак похідної на проміжках, маємо:
– функція (6) зростає при $x\in(-9;-3)\cup(-3;3)$
– функція (6) спадає при $x\in(-\infty;-9)\cup(3;+\infty)$

4. Перевіримо функцію (6) на наявність похилих асимптот. Нехай така асимптота має формулу *a=kx+b*, де:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{x}=-\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left|\,a(x)-kx\,\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\,a(x)+\frac{x}{2}\right|=\frac{11}{2}.$$

Отже, похила асимптота є і задана формулою

$$a=-\frac{x}{2}+\frac{11}{2}. \qquad (7)$$

5. За результатами дослідження побудуємо графік функцій (6) (мал. 3). Зробимо декілька зауважень:

а) в контексті розв'язування рівняння (4) можна знехтувати ділянкою графіка, що лежить лівіше асимптоти x = – 3, оскільки ця ділянка не належить області D_1;

б) точка А належить графіку функції;

в) області D_1 будуть належати дві ділянки графіка функцій (6): дуга від точки К до точки *D* (не включаючи останню) та дуга від точки *A* (не включаючи її) через точки *C, B* до асимптоти (7);

г) графік функції (6) не перетне при $x\to\infty$ пряму *MN*, оскільки при

$x \to \infty$ графік функції наближається до асимптоти (7), яка має такий самий коефіцієнт, як і пряма $a = -\frac{x}{2}$ (MN).

Отже, для *формулювання і трансляції розв'язків рівняння* (4) скористаємося алгоритмом, описаним в [2]. Транслюємо отриману графічну відповідь в аналітичний запис:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$

$x_1 = 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}$ $\quad x_2 = 4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}$;

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$

$x = 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}$;

при $a \in (1; +\infty)$ $\qquad x \in \emptyset$.

Зазначимо, що рис.3 може бути використаний як для розв'язування вже згаданої задачі із збірника [1] (відповідь до задачі є очевидною – рівняння (4) має один корінь при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$ так і для подальшої роботи над вправою.

Змінимо умову задачі, вказавши вимогу розв'язувати не рівняння, а нерівність:

$$\lg\left(x^2 + 2ax\right) - \lg(8x - 6a - 3) < 0 \qquad (8)$$

Нагадаємо про зауваження (а) і не будемо розглядати частину графіка функцій *a=a(x)*, що лежить зліва від асимптоти x=-3. Отже, розв'язки нерівності мають лежати в області D_1. Неважко визначити знак лівої частини нерівності (8) в різних частинах області D_1. Для цього підставимо координати довільних точок області D_1 так, щоб одна з них була вище графіка функції *a=a(x)*, а друга – нижче графіка. Нехай це будуть точки *X (3; 2)* та *Y(3; 0)*.

Позначивши ліву частину нерівності (8) через *F(x; a)*, маємо:

$$F(3;2) = \lg\frac{21}{8} > 0$$

$$F(3;0) = \lg\frac{9}{21} < 0$$

Отже, для розв'язування нерівності (8) нам слід описати такі частини області D_1 (див. мал.3): від дуги *KD* до півпрямої *DR* та від півпрямої *AN* до дуги, що проходить через точки *A,C* та *B*. Аналітично це буде виглядати так:

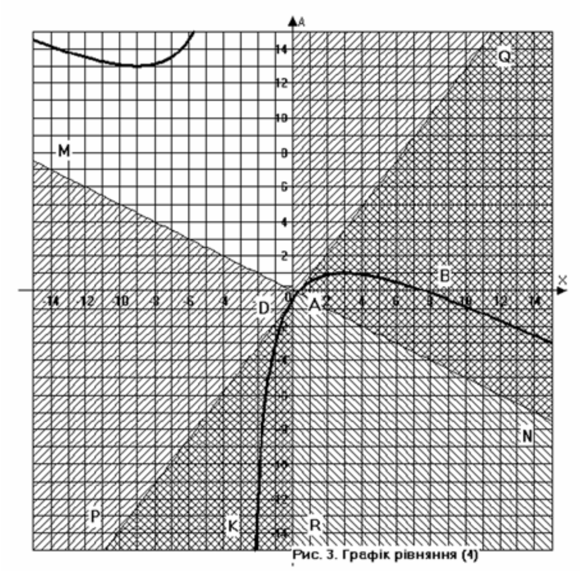

Рис. 3. Графік рівняння (4)

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

$x \in \left(4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}; 0\right) \cup \left(-2a; 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right)$

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$

$x \in \left(-2a; 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right)$

при $a \in \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$

$x \in \left(4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}; 4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right)$

при $a \in [1; +\infty)$ $\qquad x \in \emptyset$

Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, використовуючи рис.3, правильність відповіді для нерівності:

$$\lg\left(x^2 + 2ax\right) - \lg(8x - 6a - 3) > 0, \qquad (9)$$

яка виглядає так:

при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

$x \in \left(\frac{6a+3}{8}; 4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right) \cup \left(4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}; +\infty\right)$

при $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right]$

$x \in \left(4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}; +\infty\right)$

при $a \in \left(-\frac{3}{22}; 1\right)$

$x \in \left(\frac{6a+3}{8}; 4 - a - \sqrt{a^2 - 14a + 13}\right) \cup \left(4 - a + \sqrt{a^2 - 14a + 13}; +\infty\right)$

при $a \in [1; +\infty)$ $\qquad x \in \left(\frac{6a+3}{8}; +\infty\right)$

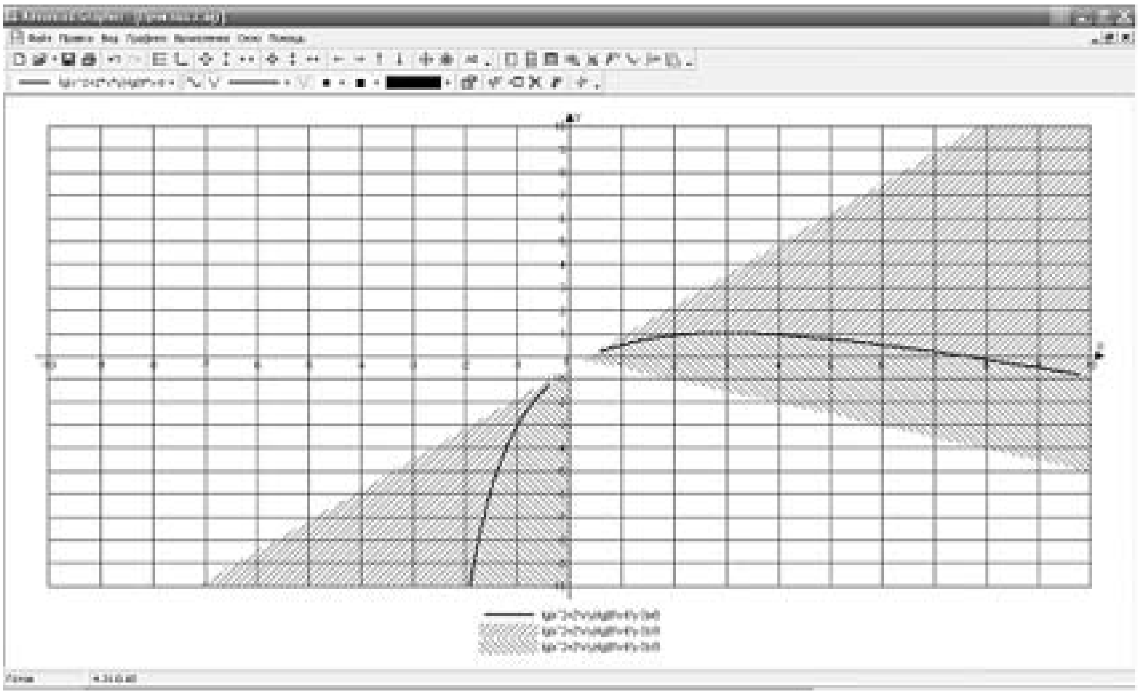

Рис. 4. Розв'язки рівняння (4) та нерівностей (8) та (9)

Важливим моментом використання геометричної картини розв'язку задачі (рис. 3) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв'язування з новими умовами:

- розв'язати нестрогі нерівності (8) та (9);
- змінити питання до прикладу 2 на таке: при яких значення параметра розв'язки рівняння (4) (або нерівностей (8) чи (9)) є додатними (від'ємними);
- змінити питання до прикладу 2 на таке: при яких значеннях параметра розв'язки рівняння (4) лежать у заданому проміжку.

Очевидно, що такий спосіб розв'язування дає можливість вдосконалення математичної підготовки учнів. Такий підхід доповнює традиційний. Запропонований нами підхід до розв'язування математичних задач має бути одним із різноманітних підходів, що в системі утворюють для суб'єкта навчання поле можливостей, необхідне для свідомого прийняття рішень у процесі розв'язання математичних проблемних ситуацій. Наявність геометричної картини (рис. 3) дозволяє вчителю видозмінювати та трансформувати умову задачі і формувати в учнів елементи творчого й критичного мислення.

Наведемо ще один спосіб розв'язування прикладу 2. Пропонуємо скористатися прикладним комп'ютерним пакетом "Advanced Grafer", за допомогою якого будуватимемо графік рівняння (4). Зауважимо, що, на нашу думку, це можна робити лише після того, як основні знання і уміння про властивості функцій та основні способи їх використання до розв'язування математичних задач певною мірою в учнів уже сформовані.

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію "Додати графік" та вводимо формулу рівняння у вигляді:

$$\lg(x\text{^}2+2*x*y)-\lg(8*x-6*y-3)=0.$$

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж x та y, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так – змінимо параметр рівняння з a на y.

На робочій області *будується модель рівняння (4)* – графік рівняння (див. рис. 4). Залишається лише оформити пропорції міток на осях *0x* та *0y* як *1:4*, задати для більш точного відображення графіка в меню "Параметри побудови" максимальну кількість кроків по горизонталі та вертикалі – 200 та максимальний розрив, рівний 10.

Очевидно, що побудований графік рівняння ще потребує аналітичної обробки, а саме: визначення "поведінки" рівняння в особливих точках (дивіться викладки, що коментують рисунок 3), вираження змінної x з рівняння для запису розв'язків, підтвердження гіпотези про те, що точка *(3; 1)* є точкою екстремуму функції *a(x)* (див. аналітичні викладки вище), з'ясування поведінки графіка біля осі *0y*. Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для рівняння (4).

Цей пакет також дозволяє з'ясувати і розв'язування нерівностей (8) та (9). Графічний їх розв'язок показаний на рис. 4. Після аналітичної обробки цього розв'язку можна прийти до отриманих вище відповідей.

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про моделі задачі та уміння вести дослідження моделей різними засобами досить часто використовуються у процесі розв'язування математичних навчальних задач творчого типу.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв'язування моделі задачі.

Запропонований підхід до розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами був успішно апробований на уроках з математики у природничо-математичному класі педагогічного ліцею при КДПУ ім.В.Винниченка та на практичних заняттях з елементарної математики та методики викладання математики фізико-математичного факультету названого університету.

ЛІТЕРАТУРА

1. Збірник задач з математики для вступників до вузів / За редакцією М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.

2. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Формування умінь розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром з використанням інтеграції знань з математики // Математика в школі. – 2006. – № 6. – С. 47-50.

Стаття надійшла в редакцію 23.04.08 ■