Ю. М. ДЕМЧЕНКО

МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник з підготовки теоретичного, практичного та самостійного курсу з дисципліни «Математика» для студентів факультету педагогіки та психології

Кропивницький – 2018

УДК 51(072)
Д 31

Демченко Ю. М. «Математика» : навчально-методичний посібник для студентів факультету педагогіки та психології / Ю. М. Демченко. – Кропивницький : РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2018. – 228 с.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

В. В. Нічишина – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики**,**
О. О. Нікітіна – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри методик дошкільної та початкової освіти**.**

Посібник підготовлено відповідно до програми з курсу «Математика». У навчально-методичному посібнику висвітлено теоретичний матеріал та плани практичних і самостійних занять. Посібник містить необхідний теоретичний матеріал з курсу математика та рекомендаційні відомості щодо виконання практичних і самостійних робіт з кожної теми дисципліни, достатню кількість системи вправ, що допоможе майбутнім учителям оволодіти професійними навичками. Частина вправ має творчий характер, що сприятиме розвитку логічного мислення і математичних здібностей студентів.

Структура і зміст посібника розраховані на те, щоб практичні роботи виконувались не тільки під керівництвом викладача, а й студентами самостійно.

Посібник призначений для студентів педагогічних навчальних закладів факультету педагогіки та психології.

Рекомендовано до друку методичною радою Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (протокол № 3 від 07.12.2017)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У демократичному суспільстві XXI століття запитам часу відповідає сучасна школа яка покликана забезпечити досягнення таких освітніх результатів, які б відповідали цілям розвитку особистості й сучасним вимогам суспільства. Щоб гідно жити в сучасному суспільстві, особистість повинна бути компетентною в різних сферах діяльності. Початкова школа – посідає одне із основних місць у системі загальної середньої освіти, де закладається фундамент для розкриття потенціалу самопізнання, самооцінки, саморегуляції та самореалізації, інтеграції в соціокультурний простір.

Головна мета викладання математики на факультеті педагогіки та психології – формування у майбутніх учителів теоретичних основ курсу математики, розуміння його співвідношення зі шкільною математикою наступних концентрів і математичною наукою в цілому.

Курс математики на факультеті підготовки вчителів початкових класів повинен дати студентам майбутнім учителям початкових класів – математичну підготовку, необхідну для навчання учнів початкових класів математиці відповідно до введених в даний час шкільних програм і в разі впровадження в початкову школу нових питань математики; для розв'язання нестандартних завдань, які орієнтовані на учасників шкільних та всеукраїнських олімпіад; орієнтації у змісті викладання математики в середній школі; подальшої самостійної роботи з поглиблення і розширення фахової підготовки.

У даному посібнику розкривається теоретичний і практичний зміст питань, наведено завдання для самостійного опрацювання, що є основою курсу математики. У посібнику розглянуто теми: множини, відповідності, відношення; математичні твердження, їх структура, алгоритми; цілі невід'ємні числа; розширення поняття числа; рівняння, нерівності, функції; елементи геометрії; величини та їх вимірювання. До кожної теми розроблено плани практичних занять, що містять питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей), розв'язування системи тренувальних вправ, постановку завдань для самостійного опрацювання, тощо.

Розділ 1. Множини, відповідності, відношення

Множини й відношення між ними. Операції над множинами

Теорія множин є теоретичною основою не лише дискретної, а й усієї сучасної математики.

Дискретна математика (скінчена математика) *– розділ математики, що вивчає властивості об'єктів дискретного характеру.* Під дискретними об'єктами в математиці розуміють ті, які в сукупності утворюють скінченну або зчисленну множину. Дискретні об'єкти принципово відрізняються від неперервних (таких, наприклад, як усі дійсні числа з відрізку $[0,1]$).

Офіційно теорія множин була визнана наприкінці XIX ст., коли вона широко застосовувалася в математичному аналізі. Теорія множин з'явилася основою створення алгебраїчних систем, що мають велике практичне застосування при розробці математичного забезпечення ЕОМ.

Більшу частину понять дискретної математики можна визначити за допомогою поняття множини. У понятті множини виявляється високий рівень абстракції, який притаманний математиці. Поняття множини і її елемента відносять до основних, первинних понять математики. Вважають, що ці поняття, які і будь-які інші вихідні поняття деякої математичної теорії, не визначаються.

Означення. *Під* ***множиною*** *розуміють сукупність певних об'єктів, які об'єднані спільними властивостями.* При цьому природа самих об'єктів, що становлять ту або іншу множину, нас не буде цікавити. Творець теорії множин Георг Кантор давав наступне означення множини – «множина є багато чого, мислиме нами як ціле».

У повсякденному житті та практичній діяльності для позначення поняття множини використовують також слова: набір, клас, система, комплекс і т. ін. Але й у математиці термін множина має низку синонімів. Так, замість «множина значень змінної» можна сказати «область значень змінної», замість «множина кривих» – «сім'я кривих», замість «множина двох рівнянь» – «система двох рівнянь» і т. ін.

Означення. *Об'єкти будь-якої природи, що утворюють множину, називаються її* ***елементами.*** Наприклад, в множині студентів університету елементом буде студент, в множині днів тижня елемент – «четвер». Елементами множин можуть бути самі множини. Наприклад, множина академгруп університету, кожна академгрупа – множина студентів.

Для позначення конкретних множин використовують великі букви латинського алфавіту*:* $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$ або великі букви з індексами $A_1, A_2, \ldots$.

Для деяких особливо важливих числових множин прийняті стандартні позначення, яких слід дотримуватися. Так, буквами N, Z, Q, R позначають відповідно множину натуральних чисел, множину цілих чисел, множину раціональних чисел і множину дійсних чисел.

Для позначення елементів множин використовують малі букви латинського алфавіту: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ або малі букви з індексами $a_1, a_2, \ldots$.

Належність елемента множині позначається символом $\in$: $a \in A$ – елемент a належить множині A (знак $\in$ є стилізацією першої букви грецького слова $\varepsilon\sigma\tau\iota$ – бути, існувати); неналежність елемента множині позначається символом $\notin$: $a \notin A$.

Означення. *Множина називається* ***скінченою****, якщо вона складається з скінченого числа елементів. Кількість елементів у скінченій множині* A *називається* ***потужністю*** *множини* A *і позначається* $|A|$. *Множина, що не містить жодного елемента, називається* ***порожньою*** *і позначається символом* $\varnothing$.

Множина вважається заданою, якщо про будь-який її елемент можна сказати, належить він цій множині чи не належить.

Способи задання множин

1. Найбільш природним є спосіб задання множини ***переліком*** *(або списком)* ***елементів***.

Наприклад: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Порядок елементів у записі множини значення не має: $A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,5,2,1,4\}$.

Вважається, що всі елементи множини різні. Цей спосіб завдання застосовується тільки для скінчених множин з невеликим числом елементів. Тому множини часто задають переліком частини множини, з якого можна зрозуміти, що являє собою вся множина.

Приклади стислого представлення множин:

1. $A = \{0,1,\ldots,9\}$;
2. $A = \{1,3,5,\ldots, n+1,\ldots\}$;
3. $A = \{2,4,8,\ldots,2^n,\ldots\}$.

2. Універсальним є спосіб задання множини ***за допомогою характеристичних властивостей її елементів*** (тобто властивостей, які мають всі елементи даної множини і тільки вони).

Наприклад:

1. $A = \{x : x \in N, x < 6\}$,
2. $A = \{x : x \in Z,\ 0 \le x \le 9\}$;
3. $A = \{x : x - \textit{парне число}\}$.

3. Аналітичний, за допомогою символів операцій над множинами та дужок.

4. Вербальний (мовний) за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множини.

Означення. *Множина* B *називається* ***підмножиною*** множини A*, якщо кожен елемент множини* B *належить множині* A.

Це позначається як $B \subseteq A$ ($A \supseteq B$) – «B включається в A» (A включає B), де $\subseteq$ – знак нестрогого включення. Кажуть, що множини A і B знаходяться у відношенні включення, а елементи множини до самої множини – у відношенні належності.

Наприклад: $A = \{a, b, c, d, e, h\}$, $B = \{e, h, d, c\}$, B – підмножина A. Позначення: $B \subseteq A$ – «B включається в A», $\subseteq$ – знак нестрогого включення.

Якщо $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то B називається ***власною, строгою*** чи ***істинною підмножиною*** A. Позначення: $B \subset A$, де $\subset$ – знак строгого включення.

Очевидно, що для будь-якої множини A $\varnothing \subseteq A$ і $A \subseteq A$.

$\varnothing$ і A називаються ***невласними*** підмножинами множини A.

Зауваження. Слід підкреслити відмінність між відношенням належності $\in$ і відношенням включення $\subset$. Як уже зазначалося, множина A може бути своєю підмножиною $(A \subseteq A)$, але не може входити до складу своїх елементів ($A \notin A$). Навіть у разі одноелементної множини розрізняють саму множину $A = \{a\}$ та її єдиний елемент a.

Означення. *Множини* A *і* B *називаються* ***рівними****, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.*

Наприклад: $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$, $\{1,2,4\} = \{2^0, 2^1, 2^2\}$.

Множини A і B рівні ($A = B$), якщо $(A \subseteq B)$ і $B \subseteq A$:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A$$

Для кожної множини A існує множина, елементами якої є всі її підмножини.

Означення. *Множина, елементами якої є всі підмножини множини* A *і тільки вони, називається* ***булеаном, або множиною підмножин*** *множини* A *і позначається* $B(A)$. Відносно елементів булеана множина A називається ***універсумом,*** або ***універсальною множиною*** і часто позначається U (тобто, універсальна множина – це множина, підмножинами якої є всі множини, що розглядаються).

У разі скінченної підмножини A, що складається з n елементів, булеан $B(A)$ містить 2^n елементів:

$$|A| = n \Leftrightarrow |B(A)| = 2^n.$$

Легко побачити, що число елементів булеана $B(A)$ залежить від числа елементів универсуму $A = U$. Наприклад, якщо $|A| = 3$, то маємо $|B(A)| = 2^3 = 8$.

Наприклад: Розглянемо утворення булеана множини:

$A = \{a, b\}$: $B(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;

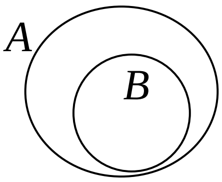
$$A=\{y,x,a\}:\ B(A)=\{\varnothing,\{y\},\{x\},\{a\},\{y,x\},\{y,a\},\{x,a\},\{y,x,a\}\}.$$

Перша й остання підмножини невласні, інші – власні.

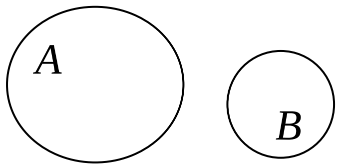
Порожня множина $\varnothing$ має властивість: $x\notin\varnothing$ при будь-якому x. Універсальна множина U має властивість: $x\in U$ при будь-якому x.

Множини і відношення між ними зручно задавати графічно за допомогою так званих ***діаграм Ейлера-Венна***. Діаграми Ейлера-Венна (Джон Венн (1834–1923) англійський логік і математик, професор Кембриджського університету) є геометричним зображенням множин. Множина зображується замкненою кривою довільної форми (найчастіше – кругом). Точки, які лежать всередині замкненої кривої, можна розглядати як елементи відповідної множини.

Наприклад:

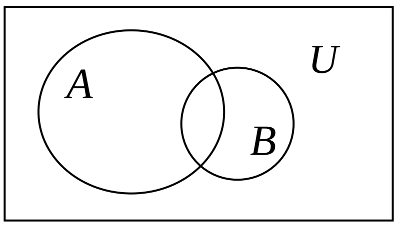


$B\subset A$



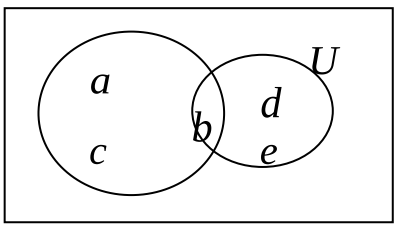
$B\not\subset A$

Універсум U на діаграмах Ейлера-Венна зображується у вигляді прямокутника.



Діаграму Ейлера-Венна можна розглядати як окремий випадок задання множини переліком його елементів. У цьому випадку всередині діаграми Ейлера-Венна можуть бути зображені символічні позначення елементів.

Наприклад: На наступній діаграмі Ейлера-Венна задані множини $\{a,b,c\}$, $\{b,d,e\}$ в універсумі $U=\{a,b,c,d,e\}$:



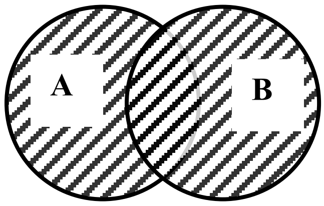
Основні операції над множинами

Означення. Об'єднанням *двох множин A і B називається множина $A\bigcup B$, яка складається з усіх їхніх елементів, що належать хоча б одній з множин A або B:*

$$A\bigcup B := \{x : x \in A \text{ або } x \in B\},$$

де $\bigcup$ – знак об'єднання.

На діаграмі Ейлера-Венна об'єднання показується штриховкою:



$A\bigcup B$

Об'єднання складається з усіх елементів множини A, усіх елементів множини B і не містить ніяких інших елементів.

Об'єднання називається також ***теоретико-множинною сумою***.

Операція об'єднання узагальнюється на довільну сукупність множин.

У загальному випадку використовується позначення:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

Наприклад:

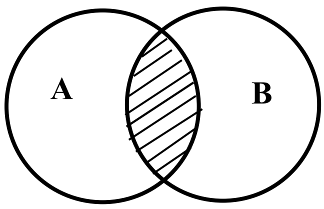
1. $A = \{a, b, d\},\ B = \{b, d, e, h\},\ A\bigcup B = \{a, b, d, e, h\};$
2. $A = \{k, p\},\ B = \{a, b\}, A\bigcup B = \{a, b, k, p\}$;
3. $A = \{$парні числа$\},\ B = \{$непарні числа $\},\ A \cup B = N$.

Означення. Перерізом *двох множин A і B називається множина $A\bigcap B$, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, що належать одночасно і A, і B:*

$$A\bigcap B := \{x : x \in A \text{ і } x \in B\},$$

де $\bigcap$ – знак перерізу.

На діаграмі Ейлера-Венна переріз показується штриховкою:



$A \cap B$

Переріз називається також ***теоретико-множинним добутком***.

Операція перерізу узагальнюється на довільну сукупність множин.
У загальному випадку використовується позначення:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

Наприклад:

1. $A=\{a,b,d\},\ B=\{b,d,e,h\},\ A\cap B=\{b,d\}$;
2. $A=\{k,p\},\ B=\{a,b\},\ A\cap B=\varnothing$;
3. $A=Z,\ B=\{x: x\in Z, x>0\},\ A\cap B=N$
4. $A=\{\text{прямокутники}\},\ B=\{\text{ромби}\},\ A\cap B=\{\text{квадрати}\}$.

Означення. Різницею *множин A і B називається множина $A\setminus B$, яка складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B:*

$$A\setminus B := \{x: x\in A\ i\ x\notin B\},$$

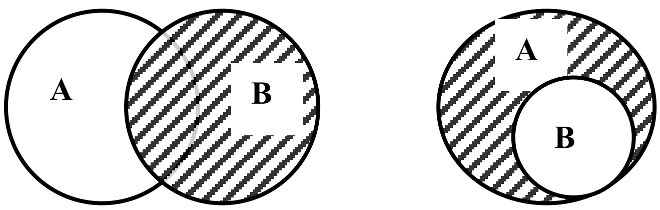
де $\setminus$ – знак різниці.

Наприклад:

1. $A=\{a,b,d\},\ B=\{b,d,e,h\},\ A\setminus B=\{a\},\ B\setminus A=\{e,h\}$;
2. $A=\{k,p\},\ B=\{a,b\},\ A\setminus B=\varnothing$;
3. $A=N,\ B=\{\text{непарні числа}\},\ A\setminus B=\{\text{парні числа}\}$.

В означенні різниці, взагалі кажучи, не припускається, що $B\subset A$. Якщо $B\subset A$, то різниця $A\setminus B$ називається ***доповненням множини B до множини*** A і позначається B_A.

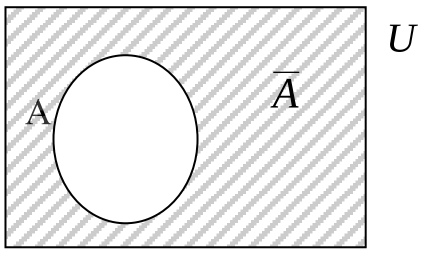
Проілюструємо поняття різниці множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна:



$A\setminus B$

Означення. *Різниця універсальної множини U і будь-якої її підмножини A називається* ***доповненням*** *множини A до універсальної U.* Позначається $\overline{A}=U\setminus A$.

Геометрична ілюстрація:



Означення. Симетричною різницею *множин* A *і* B *називається різниця об'єднання і перерізу множин* A *і* B (виключне «АБО»), *яка позначається* $A\Delta B$.

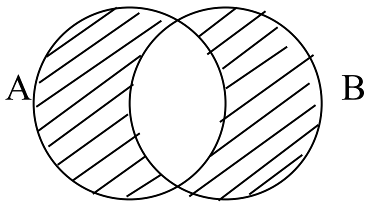
$$A\Delta B = \{x : x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}.$$

Наприклад:

1. $A = \{a, b, d\},\ B = \{b, d, e, h\},$

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{a, b, d, e, h\} \setminus \{b, d\} = \{a, e, h\}.$$

Геометрична ілюстрація:



Використовуючи операції $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $^{-}$ можна виражати одні множини через інші. За умовчанням приймається пріоритет операцій: $\overline{\ }, \cap, \cup, \setminus, \Delta$. Для зміни цього порядку у виразі використовують дужки.

Таким чином, множину можна задати виразом, в який входять множини, операції і, може бути, дужки. Такий спосіб завдання множини називається аналітичним.

Наприклад: Нехай $U = \{1,2,3,4\};\ A = \{1,3,4\};\ B = \{2,3\};\ C = \{1,4\}.$

$A \cap \overline{B} = A \cap \{1,4\} = \{1,4\};$

$\overline{(A \cap B)} = \overline{\{3\}} = \{1,2,4\};$

$(B \setminus A) \cup C = \{2\} \cup C = \{1,2,4\}.$

Властивості операцій над множинами

Операції над множинами, як і операції над числами, мають певні властивості. Ці властивості виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного змісту множин, що входять у них, і є підмножинами деякого універсуму U .

Для будь-яких підмножин деякого універсуму U справедливі наступні тотожності:

1. $A \cap B = B \cap A$ – комутативність $\cap$	1*. $A \cup B = B \cup A$ – комутативність $\cup$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – асоціативність $\cap$	2*. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – асоціативність $\cup$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивність $\cap$ відносно $\cup$	3*. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивність $\cup$ відносно $\cap$
закони поглинання	
4. $A \cap (A \cup B) = A$	4*. $A \cup (A \cap B) = A$
закони де Моргана	
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	5*. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. $\overline{\overline{A}} = A$	
закони ідемпотентності	
7. $A \cap A = A$	7*. $A \cup A = A$
властивості $\varnothing$ і U	
8. $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap U = A$	8*. $A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$
9. $A \cap \overline{A} = \varnothing$	9*. $A \cup \overline{A} = U$
10. $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$	
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$	
12. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	

Кортеж. Прямий (декартів) добуток множин

Нехай A *і* B – довільні множини.

Означення. Впорядкованою парою *називається пара* (a,b) *елементів* $a \in A$, $b \in B$, *узятих в певному порядку.*

Дві впорядковані пари вважаються рівними, якщо рівні їх відповідні компоненти:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \; i \; b_1 = b_2 .$$

У математиці розглядають впорядковані набори з 3,4,5…елементів, які *називають* ***кортежами***. Наприклад, (1,5,6) – кортеж довжини 3, (2,0,7,8,9,4) – кортеж довжиною 6.

Означення. Декартовим добутком *двох множин* A *і* B *називається множина всіх впорядкованих пар* (a,b)*:*

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}.$$

Якщо $A=B$, то кажуть про декартовий квадрат множини A:

$$A^2=A\times A=\{(a,b):a\in A,b\in A\}.$$

Аналогічно можна ввести декартовий добуток трьох $A_1\times A_2\times A_3$, чотирьох $A_1\times A_2\times A_3\times A_4$ і т.д. множин.

Означення. Декартовим добутком *множин* $A_1, A_2, \dots A_n$ *називається множина кортежем довжини* n, *які утворені так, що перша координата належить множині* A_1, *друга –* $A_2, \dots$, *остання –* A_n. *Позначають* $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$.

Наприклад:

1. Нехай $A=\{0,1\}$, $B=\{x,y\}$, $C=\{0,1,2\}$. Тоді

$A\times B=\{(0,x),(0,y),(1,x),(1,y)\}$;

$B\times A=\{(x,0),(y,0),(x,1),(y,1)\}$;

$A\times C=\{(0,0),(0,2),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2)\}$.

2. $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ – множини символів, які позначають горизонтальні і вертикальні поля шахівниці. Тоді $A\times B=\{a1,a2,\dots,h7,h8\}$ – множина всіх кодів кліток шахівниці.

3. Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Тоді декартовий квадрат $R\times R=R^2$ є просто множина всіх декартових координат на площині відносно заданих координатних осей (множина точок площини). Якщо $A=\{x:x\in[0,1]\}$, то A^2 – одиничний квадрат на площині.

4. $R\times R\times R=R^3$ – множина точок простору. Якщо $A=\{x:x\in[0,1]\}$, то A^3 – одиничний куб на площині.

5. $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{3,4,5\}$, $A_3=\{7,8\}$, тоді

$$A_1\times A_2\times A_3=\left\{\begin{matrix}(2,3,7),(2,3,8),(2,4,7),(2,4,8),(2,5,7),(2,5,8),(3,3,7),(3,3,8),\\(3,4,7),(3,4,8),(3,5,7),(3,5,8)\end{matrix}\right\}.$$

Практичне заняття №1

Елементи теорії множин. Операції над множинами

План заняття

1. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
2. Розв'язування системи тренувальних вправ.
3. Підведення підсумків заняття, постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) Що розуміють у математиці під поняттям множини?
2) У чому полягає універсальність поняття множини?
3) Чим визначається конкретна множина?
4) Що є елементами множини? Чи можуть елементи однієї і тієї самої множини мати різну природу?
5) Назвіть та охарактеризуйте види множин. Наведіть приклади множин.
6) Які існують способи завдання множин? Наведіть приклади.
7) Дайте означення плоскої геометричної фігури з використанням поняття «множина». Як формулюється означення просторової геометричної фігури?
8) Для чого використовуються «діаграми Ейлера»?
9) Які множини вважаються рівними? Які властивості має відношення рівності?
10) В яких відношеннях можуть знаходитись дві непорожні множини, що перетинаються? Як розтлумачити перетин множин?
11) Як, розглядаючи обсяг поняття як множину, охарактеризувати можливі відношення між поняттями?
12) Що розуміється під універсальною множиною?
13) Як символічно записуються і зображуються графічно числові проміжки (множини)?
14) Сформулюйте означення основних операцій над множинами. Наведіть приклади.
15) Охарактеризуйте зв'язки між множинами і поняттями.
16) Сформулюйте і запишіть основні властивості операцій над множинами.

2. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Знайти об'єднання множин і зобразити їх на числовій прямій:
   a) $A = \{x | x \in R,\ x > -5\},\ B = \{x | x \in R,\ x \le 4\}$;
   b) $A = \{x | x \in Z,\ -8 \le x \le -1\},\ B = \{x | x \in N,\ x < 10\}$;
   c) $A = \{x | x \in R,\ x \le -3\},\ B = \{x | x \in R,\ x < -1\}$.

2. Знайти переріз множин:
   a) $A = \{1,2,13,26,27,29\}$, $B = \{2,9,12,14,25,28\}$;
   b) $A = \{x|x \in N,\ x \leq 50\}$, $B = \{x|x \in N,\ x \vdots 2\}$;
   c) $A = \{x|x \in Q,\ -8 < x < 6\}$, $B = \{x|x \in Q,\ -6 \leq x \leq 3{,}5\}$.
3. Виписати всі елементи множини $\{a \mid a \in Z$ і $-6 \leq a \leq 2\}$, де Z – множина цілих чисел.
4. Виписати всі елементи множини $\{a \mid a \in Z$ і $a^2 \leq 49\}$, де Z – множина цілих чисел.
5. Дано множини: A = $\{x|\ x \in N,\ x \leq 27,\ x$ – *непарне число*$\}$ і B = $\{x|\ x \in N,\ x \leq 57,\ x$ – *парне число*$\}$. Знайти A∩B, A∪B.
6. Дано множини: A = $\{x|\ x \in N,\ x \leq 27,\ x$ – *парне число*$\}$ і B = $\{x|\ x \in N,\ x \leq 57,$ x – *просте число*$\}$. Знайти A∩B.
7. На другому курсі університету навчається 50 студентів, які вивчають англійську та німецьку мови. Скільки студентів вивчають тільки англійську мову, якщо відомо, що дві мови одночасно вивчають 20 студентів, а тільки німецьку – 5? Проілюструйте розв'язок за допомогою діаграм Ейлера-Венна.
8. Знайти множину розв'язків рівняння $(x - 2)(x + 3)(x^2 - 9) = 0$, які належать: 1) N; 2) Z; 3) Q.
9. За якою характеристичною ознакою утворено такі множини:
   А) A = {5, 10, 15, 20, …, 5к, …};
   Б) B = {…, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...};
   В) M = $\{a, 2a, 4a, 8a, \ldots\}$;
   Г) K = { O, Δ, ▱, ▽, □}.
10. Записати різними способами такі множини:
    А) множину дійсних чисел, квадрати яких більше за 2;
    Б) множину дійсних чисел, менших за 5;
    В) множину парних чисел, більших за 100;
    Г) множину цілих степенів числа 10.
11. Дано: A = {2, 3, 4, 5}, B = {5, 10, 15, 20}, C = {20, 30, 40}. Знайти A ∪ B, A ∪ C, B ∪ C, A∩B, A∩ C, B∩ C, A ∩B∩ C, A ∪ B ∪ C, A\ B, A\ C, B \ C, B \ A, C \ A, C\ B.
12. Зобразити множину за допомогою кругів Ейлера: $A \setminus (B \cup \bar{C})$.
13. Зобразити множину за допомогою кругів Ейлера-Венна: а)$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$; б) $A \cap B \cup C$.
14. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти:$(A \cup C) \setminus (B \cap F)$, якщо A=[-3,2), B=[3, ∞), C=(0,5), F= (-∞, 6).
15. Довести тотожності і зобразити їх кругами Ейлера: A\ (A \B) = A ∩B.
16. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти: $(A \cup C) \setminus (B \cap F)$: якщо A = [2; 6 [, B = [4; + ∞ [,
    C =] – 3; 5], F =]– ∞;– 1[.
17. Записати множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in A, b \in B$ і $A = \{2,3,4,6\}$, $B = \{1,3,5,8\}$.

3. Підведення підсумків заняття, постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Скласти самостійно добірку задач (не менше п'яти) на практичне застосування вивченого теоретичного матеріалу.

2. Законспектувати теоретичний матеріал з теми *«Відповідності і відношення»* за планом:

1) Які відповідності називаються бінарними?
2) Як позначають та записують символічно відповідність α?
3) Розтлумачте поняття базових множин.
4) Наведіть приклади матричного подання відповідностей.
5) Наведіть приклад подання відповідностей за допомогою графів.
6) Поняття образу та прообразу елемента при відповідності α.
7) Поняття образу і прообразу множин.
8) Типи відповідностей (з прикладами).
9) Розбиття множин.

3. Розв'язати вправи:

№1 Дано множини:

$A = \{x | x \epsilon N,\ \ x \leq 45,\ \ x - \text{непарне число}\}$,

$\mathrm{B} = \{x | x \epsilon N,\ \ x \leq 45,\ \ x - \text{парне число}\}$,

$\mathrm{C} = \{x | x \epsilon N,\ \ x \leq 97,\ \ x - \text{просте число}\}$,

$D = \{x | x \epsilon N,\ \ x \leq 45,\ \ x \ \vdots\ 5\}$,

$E = \{x | x \epsilon N,\ \ x \leq 45,\ \ x \ \vdots\ 4\}$.

Записати множини:

а) $A \cap D$, б) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$, в) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$, г) $\mathrm{B} \cap D$,

д) $\mathrm{C} \cap \mathrm{E}$, е) $\mathrm{A} \cap D \cap \mathrm{C}$, є) $D \cap E$, з) $\mathrm{B} \cap \mathrm{E}$.

№2 Нехай U – множина випускників школи, A – множина випускників, які мають хоча б одну оцінку «3» в атестаті. Що тоді означає $\overline{\mathrm{A}}$.

№3 У круг радіуса 4 вписано правильний шестикутник. Знайти площу доповнення шестикутника до даного круга.

№4 Нехай U – множина всіх студентів інституту, A – множина студентів педагогічного факультету, B – множина студентів, які грають на скрипці, C – множина студентів, які мають спортивний розряд. Що означають множини:

а) $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$, б) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$, в) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$, г) $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}}$, д) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$, е) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$, є) $(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \cap \overline{\mathrm{A}}$, ж) $(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{C}) \cap \mathrm{C}$.

№5 Зобразити множину за допомогою кругів Ейлера-Венна: а) $(A \cup B) \setminus (A \cap C)$; б) $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$.

№6 Довести рівність за допомого кругів Ейлера-Венна: $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

№7 Побудувати декартів добуток поданих нижче множин:

а) $\mathrm{A} = \{3,4,7\}$, $\mathrm{B} = \{\Delta, *, k\}$;

б) $\mathrm{A} = \{0,1\}$, $\mathrm{B} = \{s, l, k, \Delta\}$;

в) $\mathrm{A} = \{2,7\}$, $\mathrm{B} = \{3,1\}$; $\mathrm{C} = \{7,4\}$.

Відношення та відповідність

Поняття відношення. Граф відношення

У математиці вивчають не тільки об'єкти, але і зв'язки, відношення між ними.

Наприклад: Відношення у множині чисел: «більше», «більше на», «більше в», «менше»; у множині прямих: «паралельність», «перпендикулярність»; у множині фігур: «рівність», «подібність».

Означення. *Відношення між двома об'єктами називається* ***бінарним.***

Візьмемо множину X = {2,3,4} і розглянемо деякі відношення між її елементами:

«більше»: «3>2», «4>2», «4>3», маємо пари (3;2), (4;2), (4;3);

«більше на 1»: «3>2 на 1», «4>3 на 1», маємо пари (3;2), (4;3).

Бачимо, що для кожного відношення маємо множину впорядкованих пар. Для відношення «більше» це множина {(3;2), (4;2), (4;3)}, для відношення «більше на 1» – {(3;2), (4;3)}. Ці множини є підмножинами декартового добутку X×X = {(2;3), (2;4), (2;2), (3;2), (3;3), (3;4), (4;2), (4;3), (4;4)}.

Означення. Відношенням *між елементами множини X, або відношенням, визначеним у множині X, називають будь-яку підмножину декартового добутку X×X, або декартового квадрата X^2.*

Відношення позначають великими буквами латинського алфавіту: *P, Q, R, S* і т.д. Якщо елемент *x* знаходиться у відношенні *R* з елементом *y*, то пишуть так: *xRy*.

Якщо відношення *ρ* визначене між елементами двох рівних множин *A* і *B*, тобто коли *A* = *B*, або, що те саме, області відправлення і прибуття відношення *ρ* збігаються, то говорять про *відношення між елементами множини A*, яке також називають ***відношенням на множині А.*** Для нього зберігаються ті ж характеристики, що й для відношення між елементами двох множин.

Означення. *Якщо* $(a,b)\in R$*, то кажуть, що* $b\in B$ *є* ***образом елемента*** $a\in A$*. Сукупність всіх тих* $a\in A$*, які переходять в даний елемент* $b\in B$*, називається* ***прообразом елемента*** $b\in B$ *і позначається* $R^{-1}(b)=\{a\in A\ :\ (a,b)\in R\}$*. Аналогічно визначаються* ***образ*** $R(A')$ ***множини*** $A'\subset A$ *і* ***прообраз*** $R^{-1}(B)$ ***множини*** $B'\subset B$*:*

Оскільки відношення – це множина, над ним можна виконувати всі теоретико-множинні операції: переріз, об'єднання, віднімання, доповнення. Крім того, для відношень має зміст операція обернення. Перехід від A до A^{-1} здійснюється взаємною перестановкою компонент кожної пари, яка входить до відношення.

Означення. *Нехай* R *– бінарне відношення на множинах* A *і* B*.* ***Відношенням, оберненим до відношення*** R*, називається таке відношення* R^{-1}*, що* $(b,a)\in R^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли* $(a,b)\in R$*:*

$$R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}.$$

Таким чином, обернене відношення зв'язує ті ж самі пари елементів, що й R, але в зворотному порядку. Отже, якщо $R \subseteq A \times B$, то $R^{-1} \subseteq B \times A$ і $D\left(R^{-1}\right) = E(R)$, $E\left(R^{-1}\right) = D(R)$.

Наприклад: Нехай $A = \{a, b, c\}$ і $R \subseteq A^2$: $R = \big((a,b),(b,c),(c,a)\big)$. Тоді $R^{-1} = \{(b,a),(c,b),(a,c)\}$.

Відношення можна позначати графічно. Для цього в математиці існує поняття графа.

Означення. Графом *(від грец. «графо» – пишу) називається креслення, яке складається з точок, що позначають елементи множини, та стрілок, які з'єднують відповідні точки, вказуючи на певне відношення між елементами даної множини.*

Граф відношення на множині має особливості:

1) оскільки області прибуття і відправлення збігаються, то вершинами графа відношення є елементи однієї і тієї ж множини;

2) дуги графа можуть починатися і закінчуватися в одній і тій же вершині, такі дуги називаються *петлями* і на них напрям можна не вказувати;

3) якщо дві різні вершини графа з'єднуються двома дугами, напрями яких протилежні, то для спрощення дві дуги замінюють однією і називають її *подвійною*;

4) граф, у якому проведено всі можливі дуги, називається *повним*.

Наприклад: У множині Х = {2,4,6,8} задано відношення *P*: «*x* < *y*». Тоді його можна записати Р = {(2;4), (2;6), (2;8), (4;6), (4;8), (6;8)}, або подати за допомогою графа (рис.1):

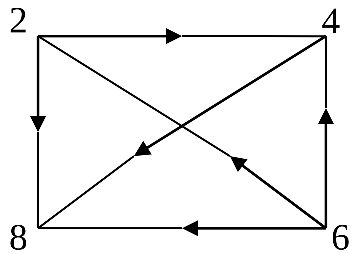


Рис. 1

Наприклад: У множині Х = {2,4,68,12} задано відношення *R*: «кратне». Тоді його можна записати R = {(2;2), (4;2), (4;4), (6;2), (6;6), (8;2), (8;4), (8;8), (12;2), (12;4), (12;6), (12;12)}, або подати за допомогою графа (рис.2):

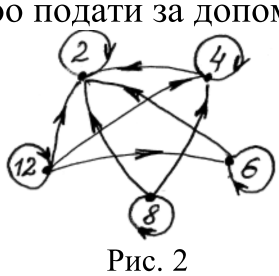


Рис. 2

Способи задання відношень

За означенням відношенням між елементами множини *X* є будь-яка підмножина декартового добутку *X*×*X*, тобто множина, елементами якої є упорядковані пари. Тому способи задання відношень такі ж, як і способи задання множин.

1. *Відношення у множині можна задати шляхом перелічування всіх пар елементів множини, що знаходяться у цьому відношенні.*

Форми запису при цьому можуть бути різними.

Наприклад: Деяке відношення R на множині $X = \{3,4,5,6,8\}$ можна задати, записавши множину пар: $\{(4;3), (5;3), (5;4), (6;3), (6;4), (6;5), (8;3), (8;4), (8;5), (8;6)\}$.

Те ж відношення можна задати за допомогою графа (рис.3).

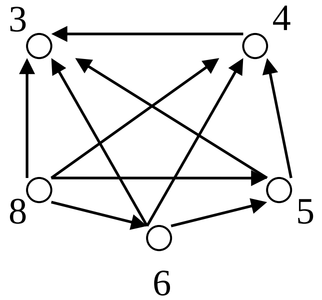


Рис. 3

2. *Відношення у множині можна задати, вказавши характеристичну властивість всіх пар елементів, що знаходяться у цьому відношенні.*

Форми запису також можуть бути різними.

Для попереднього прикладу: відношення R: «число x більше, ніж число y», або коротко R: «більше», або у вигляді нерівності R: «$x > y$».

Властивості відношень

У математиці вивчають різноманітні відношення між двома об’єктами. Кожне з них розглядається у деякій множині X і є множиною пар. Таких відношень дуже багато. Чи можна їх класифікувати? Так. Для цього потрібно виділити у відношеннях найбільш характерні їх властивості. Розглянемо деякі з них.

Означення. *Відношення R у множині X називається **рефлексивним**, якщо кожен елемент множини X є у відношенні R сам до себе.*

R рефлексивне у $X \Leftrightarrow x\mathrm{R}x$ для будь-якого $x \in X$.

Приклади рефлексивних відношень: «паралельність прямих», «рівність», «кратність». Якщо відношення рефлексивне, то в кожній вершині графа є петля.

Відношення «більше», «менше», «перпендикулярності» не є рефлексивними.

Означення. *Відношення R у множині X називається **антирефлексивним**, якщо кожен елемент множини X не є у відношенні R сам до себе.*

R антирефлексивне у $X \Leftrightarrow \overline{xRx}$ для будь-якого $x \in X$.

Приклади антирефлексивних відношень: «більше», «менше» у числових множинах, «перпендикулярність» – у множині прямих на площині. Якщо відношення антирефлексивне, то в кожній вершині графа відсутня петля.

Означення. *Відношення R у множині X називається **симетричним**, якщо з того, що елемент x є у відношенні R до елемента y, випливає, що елемент y є у відношенні R до елемента x.*

R симетричне у $X \Leftrightarrow xRy \Rightarrow yRx$.

Приклади симетричних відношень: «паралельність», «перпендикулярність», «рівність». Якщо відношення симетричне, то на графі подвійна стрілка.

Відношення «більше». «менше». «довше» не є симетричними.

Означення. *Відношення R у множині X називається **антисиметричним**, якщо з того, що елемент x не є у відношенні R до елемента y і x≠y, не випливає, що елемент y є у відношенні R до елемента x:*

$$R \text{ антисиметричне у X} \Leftrightarrow x\mathrm{R}y \text{ і } x \neq y \Rightarrow \overline{yRx}\,.$$

Приклади антисиметричних відношень: «більше», «менше», «подільність». Якщо відношення антисиметричне, то на графі стрілка в один бік.

Означення. *Відношення R у множині X називається **транзитивним**, якщо з того, що елемент x є у відношенні R до елемента y, а елемент y є у відношенні R до елемента z, то елемент x також перебуває у відношенні R до елемента z:*

$$R \text{ транзитивне у } X \Leftrightarrow xRy \text{ і } yRx \Rightarrow xRz.$$

Приклади транзитивних відношень: «паралельність», «рівність», «подібність», «кратність».

На основі означень властивостей відношення на множині можна вказати певні **властивості** його графа, і, навпаки, за наявності певних властивостей графа відношення встановлюються властивості самого відношення. На графі:

1) рефлексивного відношення у кожній вершині є петля;

2) антирефлексивного відношення відсутні петлі;

3) симетричного відношення всі дуги подвійні;

4) антисиметричного відношення не має подвійних дуг, за винятком петель;

5) транзитивного відношення, якщо три вершини з'єднані дугами, то аналогічно додаванню векторів;

6) зв'язного відношення між двома різними вершинами проведена принаймні одна дуга.

Як бачимо, різні за змістом відношення можуть мати спільні властивості. Це дає можливість виділяти відношення з певними наборами властивостей. Найважливішими з них є відношення еквівалентності і порядку.

Відношення еквівалентності

Означення. *Відношення у множині називається **відношенням еквівалентності**, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.*

Прикладами відношення еквівалентності є: відношення паралельності прямих на площині чи у просторі; відношення рівності чи подібності геометричних фігур; відношення «бути жителем однієї країни» на множині людей Землі, що проживають на даний час.

Задача 1. Відношення ρ – «число x має ту ж саму остачу при діленні на 3, що й число y», задане на множині. $A = \{x \in N \mid x \leq 7\}$. Побудувати граф відношення ρ. Довести, що ρ – відношення еквівалентності і записати всі класи еквівалентності.

Побудуємо граф відношення ρ (рис.4).

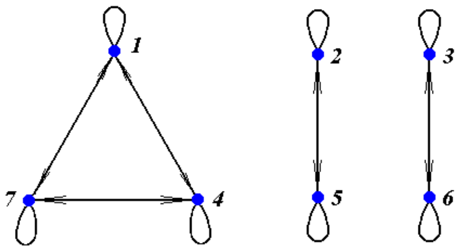


Рис. 4

Відношення ρ є відношенням еквівалентності, бо його граф складається з трьох повних графів.

Кожний з трьох одержаних графів задає клас еквівалентності, а саме**:** $K_1 = \{1, 4, 7\}$, $K_2 = \{2, 5\}$, $R_0 = \{3, 6\}$.

Відношення порядку

Одним із досить важливих понять науки і практики є поняття порядку, яке є узагальненням таких понять, як «старшинство», «підпорядкованість», «наслідування», «наступність», «важливість», «менше», «більше», «не перевищує» тощо.

Як слово «порядок» використовується в повсякденному житті?

Наприклад: викликається 5 студентів різного зросту. Завдання: стати так, щоб на даній множині студентів встановити відношення порядку: «бути вищим».

Означення. *Відношення R на множині X, називається* ***відношенням порядку****, якщо воно транзитивне і антисиметричне.*

Виділяють певні **види відношень порядку**. Відношення порядку на множині називається:

– відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне;
– відношенням строгого порядку, якщо воно антирефлексивне.

Множина із заданим на ній відношенням порядку називається впорядкованою множиною. Залежно від видів відношення порядку розрізняють і види впорядкованих множин.

Одна і та сама множина може бути по різному впорядкована. **Наприклад**, множину натуральних чисел можна впорядкувати за допомогою таких відношень:

– відношення «ділиться на» є відношенням нестрогого порядку;
– відношення «менше» є відношенням строгого порядку;
– відношення «менше або дорівнює» є відношенням нестрогого порядку.

Геометрично відношення порядку між елементами скінченних множин, як і будь-яке відношення, можна зобразити за допомогою графа.

Задача 2. На множині $A = \{x \in N \mid x < 10\}$ задано відношення ρ – «x ділиться на y ($x \vdots y$)». Довести, що це відношення є відношенням часткового порядку і побудувати його діаграму.

Як встановлено в одному з попередніх прикладів, відношення подільності є відношенням нестрогого часткового порядку на множині натуральних чисел N, а тому воно буде відношенням нестрогого порядку і на довільній підмножині натуральних чисел. Відношення ρ незв'язне, бо числа 2 і 3 різні, але жодне з них не ділиться на друге. Значить, відношення ρ є відношенням часткового порядку.

Побудуємо діаграму відношення порядку, вершини якої зручно позначати не точками, а кругами, всередині яких писати назви вершин.

Оскільки число 1 не ділиться на жодне інше число множини *А*, то воно не є попереднім для жодного з них. Попередніми ж числами для числа 1 є числа 2, 3, 5 і 7. Для числа 2 попередніми числами є числа 4 і 6, для 3 – числа 6 і 9. Число 4 має попереднім число 8. Числа 5, 6, 7, 8 і 9 у множині *А* попередніх не мають. Отже, діаграму даного відношення нестрогого часткового порядку можна зобразити так, як на рис. 5:

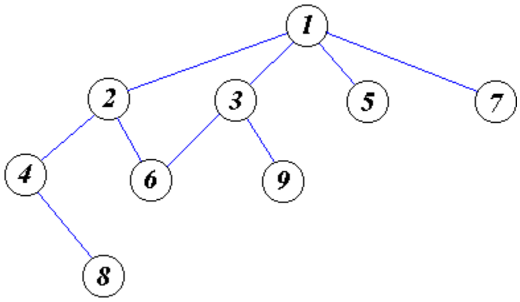


Рис. 5

Поняття відповідності

Крім відношень у множині, доволі часто розглядають відношення між елементами двох множин. Такі відношення називають відповідностями.

Наприклад: нумерація класів в школі: 1а, 1б, 1в, 2а, 2б, 2в і т.п. – це встановлення відповідності між множиною чисел {1,2,3,4} і множиною букв {а,б,в}. При вимірюванні довжини відрізків встановлюється відповідність між множиною відрізків і множиною дійсних чисел.

Досить поширеною є гра: один із гравців називає місто, а другий повинен швидко назвати місто, назва якого починається з останньої букви попереднього міста і т.д. Гра закінчується, якщо один із гравців не може швидко згадати місто з відповідною назвою.

Нехай, наприклад, перший і другий гравці послідовно назвали такі міста: Київ, Яремча, Кременчуг, Ніжин, Вінниця, Алчевськ, Гайворон. Названі міста утворюють дві множини:

А ={Київ, Яремча, Кременчуг, Ніжин};

В = {Вінниця, Алчевськ, Гайворон}.

Зобразимо залежність між даними множинами схематично, або за допомогою графа. Множини А і В позначимо різними кругами (рис. 6):

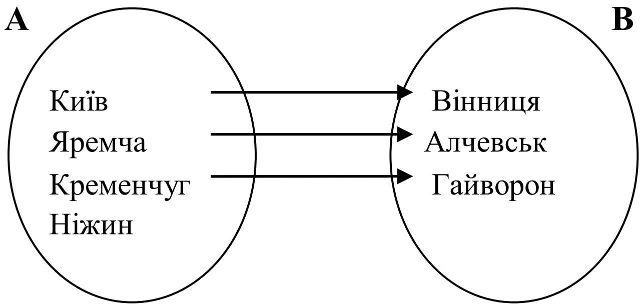


Рис. 6

На даних прикладах видно, що відповідність встановлюється між елементами двох множин. Такі відповідності називаються ***бінарними відповідностями.***

Означення. *Відповідністю між елементами двох множин (бінарною відповідністю) називається* ***підмножина декартового добутку Х×У.***

Множина X називається множиною відправлення, а множина Y – множиною прибуття відповідності. Разом їх називають базовими множинами відповідності.

Способи задання відповідностей

Ми означили, що відповідності – це відношення між елементами двох множин. Тому способи задання відповідностей аналогічні до способів задання відношень.

1 спосіб – перелічування пар елементів:

наочно це можна зобразити графом, таблицею, графіком (для числових множин);

2 спосіб – характеристичною властивістю пар:

відповідність між елементами двох множин можна зобразити за допомогою графіка на координатній площині. Для цього на координатній площині позначають усі пари чисел, які знаходяться в даній відповідності. Одержана фігура і буде графіком відповідності.

Відповідність, обернена даній

Нехай дано множини: A={1,3,5,7}, B={2,6}. R – відповідність «більше» між елементами даних множин.

Тоді R = {(3;2), (5;2), (7;2), (7;6)}

Побудуємо граф відповідності R (рис.7):

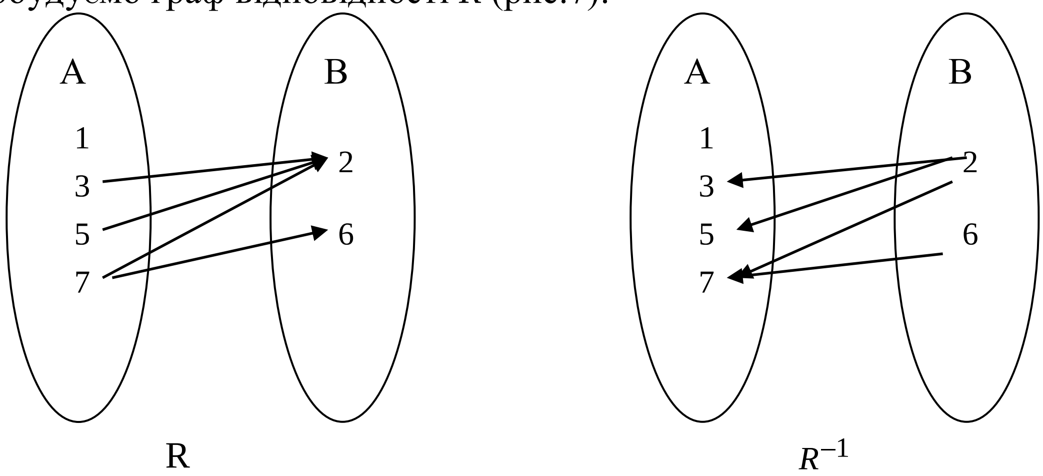


Рис. 7

Замінимо стрілки графа на обернені. Одержимо граф відповідності R^{-1} – «менше». R^{-1} = {(2;3), (2;5), (2;7), (6;7)}.

Означення. *Нехай R – відповідність між елементами множин A і B. Відповідність R^{-1} між елементами множин B і A називається* ***оберненою даній****, якщо $y\,R^{-1}x$ тоді і тільки тоді, коли xRy.*

Відповідності R і R^{-1} називаються взаємно оберненими.

Побудуємо графіки даних відповідностей в одній системі координат.

Графіки прямої й оберненої відповідностей симетричні відносно бісектриси I та III координатних кутів (рис.8):

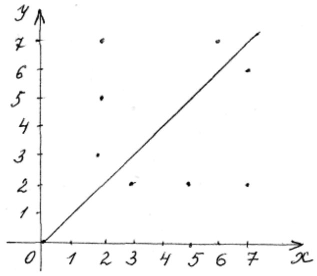


Рис. 8

У початковому курсі математики оберненим відповідностям приділяється значна увага. Учні повинні чітко усвідомити, що, якщо 5 > 3, то 3 < 5; якщо відрізок *AB* коротший, ніж відрізок *CD*, то відрізок *CD* довший, ніж відрізок *AB*. Особлива роль знання взаємозв'язків під час розв'язування текстових задач з відношеннями, заданими в непрямій формі.

Взаємнооднозначні відповідності

Означення. Взаємнооднозначними відповідностями *називаються відповідності, якщо кожному елементу множини X відповідає єдиний елемент множини Y, і кожний елемент множини Y відповідає єдиному елементу множини X.*

У початковій школі поняття взаємно однозначної відповідності використовується неявно: на даному понятті будується лічба предметів та їх порівняння.

Наприклад: Як пояснити дітям, що 4 = 4 ?

□ □ □ □
↕ ↕ ↕ ↕
Δ Δ Δ Δ

Для пояснення беруть чотири червоних квадрата та чотири зелених трикутника і кожному червоному квадрату ставлять у відповідність зелений трикутник, тобто встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами червоних квадратів та зелених трикутників. Так як кожному червоному квадрату можна поставити у відповідність зелений трикутник і навпаки, то говорять, що 4=4.

Як пояснити дітям, що 3 < 4 ?

□ □ □
↕ ↕ ↕
Δ Δ Δ Δ

Для цього беруть також три червоних квадрати (множина *A*) і чотири зелених трикутники (множина *B*) і встановлюють взаємно однозначну відповідність між множиною, в якій 3 елементи і трьохелементною підмножиною множини, що містить 4 елементи.

У першому прикладі кожному елементу множини A (множини червоних квадратів) відповідає єдиний елемент множини B (множини зелених трикутників) і кожний елемент множини B (множини зелених трикутників) відповідає єдиному елементу множини A (множини червоних квадратів), тоді дана відповідність взаємно однозначна.

У другому прикладі кожному елементу множини A (множини червоних квадратів) відповідає єдиний елемент множини B (множини зелених трикутників), але не всім елементам множини B (множини зелених трикутників) відповідає єдиний елемент множини A (множини червоних квадратів), тоді дана відповідність не взаємно однозначна.

Якщо відповідності взаємно однозначні, то кількості елементів відповідних множин рівні.

Рівнопотужні множини

У теорії множин існує поняття рівнопотужних множин. Уточнимо дане поняття.

Означення. *Множини X і Y називаються* ***рівнопотужними****, якщо вони або порожні, або між ними встановлено взаємно однозначну відповідність.*

Позначається рівнопотужність множин: $\sim$.

Якщо множина X рівнопотужна множині Y, то записують так: $X \sim Y$.

Рівнопотужність множин має свої характерні властивості:

1) Рефлективність: $X \sim X$. Будь-яка множина рівнопотужна сама собі.

2) Симетричність: $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$.

3) Транзитивність: $X \sim Y$ і $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

Так як відношення рівнопотужності має властивості рефлективності, симетричності і транзитивності, то воно є відношенням еквівалентності.

Якщо множини скінченні і рівнопотужні, то вони мають однакову кількість елементів. Якщо множини X та Y скінченні і множина X рівнопотужна множині Y, то $n(X) = n(Y)$.

Наприклад:

1) Множина А = {1,2,3,4}, множина букв у слові «урок», множина, що містить чотири геометричні фігури – все це рівнопотужні множини. Вони містять однакову кількість елементів.

2) Множина натуральних чисел і її підмножина – множина непарних натуральних чисел. Поставимо у відповідність кожному натуральному числу n непарне число $2n - 1$. Ця відповідність взаємно однозначна: кожному натуральному числу відповідає єдине непарне число і кожне непарне число відповідає єдиному натуральному числу. Отже, $X \sim Y$, тобто множина натуральних чисел і множина непарних натуральних чисел, яка є підмножиною множини натуральних чисел, рівнопотужні.

Означення. *Будь-яка множина називається* ***зчисленною****, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел.*

Означення. *Множина А називається* ***скінченною****, якщо в ній жодним способом не можна виділити правильної частини В, рівнопотужної всій множині А. Якщо в А можна виділити рівнопотужну їй правильну частину В, то тоді А називається нескінченною множиною.*

Наприклад: Множина усіх квадратів натуральних чисел називається зчисленною, бо вона рівнопотужна множині натуральних чисел. Множина усіх натуральних чисел, кратних k, множина цілих чисел, множина раціональних чисел також зчисленні. Між ними і множиною натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Практичне заняття №2

Кортеж. Прямий (декартів) добуток множин.

Відповідність та відношення

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв’язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) Що називається декартовим добутком двох множин? Як він символічно позначається?
2) За яких умов декартів добуток множин буде нескінченною множиною?
3) Що називається прямим (декартовим) квадратом?
4) Назвіть та запишіть символічно властивості декартового добутку множин.
5) Як обчислити кількість елементів у декартовому добутку кількох скінченних множин (правило добутку)?
6) Що розуміють у математиці під поняттям кортежу? Як називаються об’єкти, з яких складається кортеж?
7) Що є довжиною кортежу? Як називається кортеж завдовжки 0?
8) Назвіть ознаки рівності кортежів. Яку довжину має впорядкована пара?
9) Сформулюйте означення відповідності між множинами. Перелічіть способи задання відповідностей.
10) Означте поняття образу та прообразу елемента при відповідності α.

11) Дайте поняття відповідності, оберненій до даної, назвіть її особливості.
12) Дайте визначення поняття образу і прообразу множин?
13) Сформулюйте поняття взаємнооднозначної відповідності?
14) Дайте означення бінарного відношення між елементами однієї множини, назвіть способи задання бінарних відношень?
15) Назвіть властивості бінарних відношень, проілюструйте на конкретних прикладах.
16) Що називається графом відношення? Назвіть його елементи і позначення та особливості.
17) Яке відношення називається відношенням еквівалентності, відношенням порядку, відношенням нестрогого порядку? Наведіть приклади.
18) Які множини називаються рівнопотужними, скінченними, зчисленними?

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Знайти декартів добуток множин A×B і B×A, якщо A = {5, 7, 9} і B = {2, 4, 6, 8}. Сформулюйте цю задачу у вигляді задачі на відшукання певних двоцифрових чисел. Записати ці числа.

2. Довести істинність рівностей:

а) $(A \cup B) \times C = A\times C \cup B\times C$;

б) $(A\cap B) \times C = A\times C \cap B\times C$;

в) $(A\setminus B) \times C = A\times C \setminus B\times C$.

3. Зобразити в прямокутній системі координат множини A×B, якщо $A = \{a/ -5\leq a \leq 4\}$ і $a \in Z$; $B = \{b/ 2\leq b\leq 6\}$ і $b\in Z$; при тій самій умові, але $a \in N$ і $b\in N$; $a \in R$ і $b\in R$.

4. Дано множини X = {зелений, жовтий, червоний, синій} і $У$ = {лист, прапор, галстук}. Знайти і зобразити відповідність між цими множинами. Побудувати граф оберненого відношення.

5. Побудувати графік і граф прямого і оберненого відношення між парними числами множини X = {-6, -4, -2, 0, 2, 4} і їх модулями.

6. Навести приклади задач із підручників початкових класів, у яких розглядаються відношення «більше в … разів», «важче», «старше», «молодше». Які властивості мають ці відношення?

7. Побудувати граф відношення «$x > y$» на множині $M = \{2, -2, 5, 8, -2^3, 3^2\}$ і простежити за графом властивості цього відношення.

8. Навести приклади задач із підручників початкових класів, у яких учням доводиться упорядковувати множини. Назвіть відношення, за допомогою яких відбувається це упорядкування.

9. На множині людей задано відношення: «бути братом», «бути старшим за віком», «бути вищим зростом», «жити в тому самому будинку». Які з цих відношень є відношення сторогого порядку?

10. Чи є наведені нижче відношення α зв'язними? Рефлексивними? Симетричними? Антисиметричними? Транзитивними?

а) $(a,b) \in \alpha$ означає «пряма a перетинає пряму b» на множині прямих на площині;

b) (a,b) $\in \alpha$ означає «a і b проживають в одному будинку» на множині людей;
c) (a,b) $\in \alpha$ означає «числа a і b взаємно прості або рівні» на множині N;
d) (a,b) $\in \alpha$ означає «a і b – брати» на множині людей;
e) (a,b) $\in \alpha$ означає «a перпендикулярно до b» на множині прямих на площині.

11. Чи є наведені нижче відношення відношеннями еквівалентності?
a) $\alpha = \{(1,1),(1,4),(4,3),(4,4),(5,5),(5,7),(7,5),(7,7)\}$ у множині $\mathrm{M} = \{1,3,4,5,7\}$;
b) $\alpha = \{(\mathrm{a},b),(\mathrm{a},\mathrm{a}),(b,b),(b,\mathrm{a}),(\mathrm{c},\mathrm{a}),(\mathrm{c},\mathrm{c})\}$ у множині $\mathrm{M} = \{\mathrm{a},b,c\}$;
c) (a,b) $\in \alpha \leftrightarrow (a-b) \in Q$ на множині дійсних чисел R;
d) ((a,b),(c,d)) $\epsilon\ \alpha \leftrightarrow a+d = b+c$, де $a,b,c,d \epsilon N$.

12. З елементів множини M=$\{4,5,8,10,12,15\}$ побудувати пари, які належать відношенню α: $(a,b) \in \alpha \ \leftrightarrow b \ \vdots \ a$.

13. Чи є відношення a/b (a ділить b) зв'язним у множині M=$\{1,3,9,27,81,243\}$?

14. Чи є рівно потужними такі множини:
a) $A = \{x|x \in Z, -2 \leq x \leq 15\}$, $B = \{x|x \in N, x < 18\}$;
b) $A = \{x|x \in Z, -5 \leq x \leq 12\}$, $B = \{x|x \in N, x < 20\}$;
c) $A = \left\{x \middle| x = \frac{1}{n}, n \in N\right\}$, $B = N$.

15. Які з наведених нижче відношень є функціональними?
a) $\alpha = \{(x,y)|x,y \in R,\ 3x^2 = y\}$;
b) $\alpha = \left\{(x,y) \middle| x,y \in R,\ \sqrt{1-x^2} = y\right\}$.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал з теми: «Відповідність та відношення» та підготуватись до опитування по темі «Висловлення та операції над ними» (див. практичне заняття №3).

2. Розв'язати вправи:

№1. Чи є рівнопотужними такі множини:
a) $A = \{x|x \in N, x > 140\}$, $B = \{x|x \in N, x > 60\}$;
b) $A = \{x|x \in N, x > 3600\}$, $B = Z$.

№2. Які з наведених нижче відношень є функціональними?
a) $\alpha = \{(x,y)|x,y \in Z, x \ \vdots \ y\}$;
b) $\alpha = \{(x,y)|x,y \in R, 4x - 3y + 2 = 0\}$.

№3. Побудувати множину всіх підмножин
$\mathrm{M} = \{1,2,3,4,5\}$ і розбити її на класи рівнопотужних множин.

№4. Дана множина $M = \{1,2,3,4,5\}$. Елементи даної множини зв'язані відношенням $x > y$. Побудуйте граф і графік цього відношення. Якими властивостями володіє це відношення?

№5 У множині $\mathrm{A} = \{3,5,7,9,11\}$ задане відношення $x < y$. Випишіть всі пари елементів, що знаходяться в цьому відношенні. Як називається множина всіх таких пар?

Розділ 2. Математичні твердження, їх структура. Алгоритми

Елементи математичної логіки. Висловлення. Логічні операції над висловленнями.

Логіка – наука про форми і закони мислення. Формальна логіка як наука сформувалася ще в IV ст. до н. е. у працях грецького філософа Аристотеля. У середині IX ст. формальну логіку вперше математизовано англійським математиком Джорджем Булем на основі так званої алгебри множин, яку ще називають за його іменем «булевою алгеброю».

Будь-яке міркування складається з ланцюга речень – висловлень, які випливають одне з одного за певними правилами. Уміння міркувати, правильно обґрунтовувати свої висновки необхідні людям будь-якої професії. Уже в початкових класах в учнів формують вміння логічно мислити, а саме: порівнювати, класифікувати об'єкти за певними ознаками, аналізувати, узагальнювати, проводити аналогію, обґрунтовувати найпростіші судження. Отже, учитель початкової школи повинен бути знайомий з логікою, тобто з наукою про закони і форми мислення, про загальні схеми правильних дедуктивних міркувань.

Свої судження й умовиводи в повсякденному житті, в науці люди передають, фіксують за допомогою речень, як правило, усно або письмово (термін «письмово» розумітимемо широко, враховуючи й різні технічні види записів). Особливу роль у процесі спілкування, у фіксації якихось фактів відіграють ті розповідні, стверджувальні речення, які містять певну інформацію про щось і відносно яких можна поставити запитання: істинні вони чи хибні? Такі речення називають *висловленнями,* вони є основним об'єктом вивчення математичної логіки.

Прикладами висловлень є такі:

1. Якщо кожний з трьох доданків ділиться на 5, то їхня сума також ділиться на 5.
2. 5 > 8.
3. Числа 9 і 37 взаємно прості.
4. Архімед – англійський математик.
5. Діагональ квадрата несумірна з його стороною.
6. Наші знання дають підставу твердити, що висловлення 1, 3 і 5 – правильні, або істинні, а висловлення 2 і 4 – хибні. Терміни «висловлення», «істинне висловлення», «хибне висловлення» належать до неозначуваних понять, розуміння їх дається нам досвідом, суспільною практикою.
7. Наступні два речення:
   «О котрій годині ти повернувся вчора з Києва?».
   «Дай мені хвилинку над цим подумати» не є висловленнями, бо відносно них немає сенсу ставити запитання, істинні вони чи хибні, вони не мають значень істинності.

Відомо, що геометрія, вивчаючи просторові фігури, абстрагується від багатьох їхніх фізичних властивостей (кольору, температури, густини матеріалу, з якого вони виготовлені, тощо). Геометрія розглядає лише форму фігур. За допомогою аналогічної абстракції в арифметиці утворилося поняття про натуральне число як інваріанта класу рівнопотужних скінченних множин. Такий підхід до вивчення реальних фізичних об'єктів виявився досить ефективним: геометрія й арифметика стали могутнім засобом вивчення дійсності.

Аналогічну абстракцію здійснюють і в математичній логіці: висловлення вивчають тільки з точки зору того, істинні вони чи хибні, зовсім не цікавлячись їхнім конкретним змістом.

Висловлення вважають своєрідною величиною, яка може набувати лише два значення: «істина» або «хибність» і тільки одне з двох. Такий підхід дає змогу створити ефективну теорію, яку потім можна використати в багатьох питаннях.

З наведених вище висловлень 2–5 не можна виділити більш коротші. Такі висловлення називають *елементарними* або *атомарними, неподільними* і позначають їх здебільшого малими латинськими буквами *a, b, c* або цими самими буквами з індексами: $a_1, a_2, \ldots$

Висловлення 1 не елементарне, з нього можна виділити два самостійних висловлення: «кожний з трьох доданків ділиться на 5» і «їхня сума також ділиться на «5». Висловлення 1 утворене з цих двох висловлень за допомогою словосполучення «якщо то ...».

Якщо якесь конкретне висловлення, наприклад, «Число 2 – просте», треба позначити буквою, то пишуть *a* «Число 2 – просте». При цьому говорять, що *a* – це *ім'я* висловлення «число 2 – просте». Якщо висловлення *a* істинне, то записують $a = 1$; якщо *a* – хибне, то $a = 0$. Зазначимо, що тут 1 і 0 – не числа, а просто символи для позначення істинності або хибності. Якщо *A, B* – довільні висловлення не обов'язково елементарні, то записи $A = 1$, $A = 0$ означають те саме.

Логічні операції над висловленнями

Розглянемо логічні операції, які дають змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складні висловлення. Оскільки нас цікавить тільки значення істинності висловлень, то означення логічних операцій дає метод встановлення значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин (компонентів).

Заперечення. Цю операцію позначають знаком $\bar{\ }$ (у літературі зустрічаються й інші позначення, наприклад $\neg$, ~). У звичайній мові цій операції» відповідає частка «не». Запис *A* читається: «не $\overline{A}$», «неправильно, що *A*». Великими буквами позначатимемо довільні висловлення, як елементарні, так і складені, якщо це спеціально не обговорено в тексті.

Означення. Запереченням *висловлення A називається таке висловлення A, яке буде істинним тоді, коли A хибне, і хибним тоді, коли A – істинне, тобто:*

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Нехай, наприклад *а «5* і 3», *в* «7 – просте число». Очевидно, що *a* = 0, *b* = 1. Тоді «Неправильно, що 5 : 3» (або *а* «5 не : 3) і *a*‾ = 1. Аналогічно *в* «Неправильно, що 7 – просте число» (або *в* «7 не просте число») і *b*‾ = 0.

Операція заперечення майже адекватно передає смисл застосування частки «не» в практиці розмовної та письмової мови.

Диз'юнкція. Ця операція позначається знаком $\vee$ – у звичайній мові їй відповідає сполучник «або» в невиключаючому розумінні. Запис $A \vee B$ читається як «*А* диз'юнкція *В*», або як «*А* або *В».*

Означення. Диз'юнкцією *двох висловлень А, В називається таке висловлення А* $\vee$ *В, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з висловлень А чи В – істинне,* тобто:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операцію диз'юнкція іноді називають логічним додаванням.

Кон'юнкція. Цю операцію позначають здебільшого знаком $\wedge$ (є й інші позначення цієї операції, наприклад &). У звичайній мові їй відповідає сполучник «і». Запис $A \wedge B$ читається як *«А* кон'юнкція *В*» або як «*А* і *В».*

Означення. Кон'юнкцією *двох висловлень А і В називається висловлення А* $\wedge$ *В, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення А і В істинні,* тобто

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Наприклад: *a* «7 є просте число», *b* «23 є складене число». Тоді $a \wedge b$ «7 є просте число і 23 є складене число» – хибне висловлення, бо *a = 1,b=0.*

Імплікація. Важливу роль у логіці і особливо в математиці відіграє операція імплікації, яку позначають знаком => або. Запис *А => В* читається: *«А* імплікує *В».* Часто для читання цієї операції застосовують словосполучення: «Якщо *А, то В», «з А* слідує *В», «В* є наслідком з *А».* Висловлення *А* називають *умовою* (антецедентом) імплікації *А =>В,* а висловлення *В – наслідком* (консеквентом).

***Означення. Імплікацією** двох висловлень А і В називають висловлення А => В, яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли А =1, В = 0,* тобто

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операція => тільки частково відображає смисл сполучника «якщо… то ...». У звичайній розмовній мові цей сполучник застосовують у різноманітних значеннях. Так, щоб виразити причинну залежність («Якщо тіло вільно падає, то воно набуває прискорення 9, 81 м/сек^2»), щоб виразити мету й засоби («Якщо хочеш поступити в інститут, то треба сумлінно вчитися в школі») тощо. У звичайному розумінні висловлення «якщо *А,* то *В»* передбачає смисловий зв'язок між висловленнями *А* і *В.* Проте в математичній логіці зміст висловлення не беруть до уваги, ним нехтують, а оцінюють висловлення лише двома значеннями: «істина» і «хибність», а засобами цих оцінок неможливо відобразити всю різноманітність смислових зв'язків, які можуть існувати між поняттями.

Еквіваленція. Цю операцію позначають символом <=>. Запис *А* <=> *В* читається: *«А* еквівалентне *В».* У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення «*А* тоді і тільки тоді, коли *В», «А* необхідно й достатньо для *В»,* «*А*, якщо і тільки якщо *В».*

***Означення. Еквіваленцією** двох висловлень А і В називається таке висловлення А <=> В, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти А і В мають однакові значення істинності,* тобто

A	B	*A* <=> *B*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Кожне складене висловлення зображується певним логічним виразом, або, як називають у математичній логіці, – ***формулою***. При цьому треба вказати правила однозначного порядку читання таких формул, тобто правила однозначного порядку виконання відповідних логічних операцій, які застосовано в даній формулі.

Поняття формули можна ввести строго за індуктивним означенням, а саме:

а) кожне з елементарних висловлень, які позначають малими латинськими буквами, є формулою. Такі формули називають *елементарними.* Так, *а, в, с* – елементарні формули;

б) якщо *А, В* – формули, то формулами є також і такі вирази:

в) ніякі інші логічні вирази, крім тих, які утворені за правилами п. а) і б) не є формулами.

Кожне складене висловлення при певних значеннях (1 або 0) його компонентів є істинним або хибним. Компонента в цьому випадку відіграє роль змінної, яка може набувати лише одне з двох значень: 1 або 0. Такі змінні називають *логічними.* Оскільки кожна формула містить скінченну кількість таких змінних, а кожна змінна набуває лише двох значень, то існує лише скінченна кількість різних наборів значень змінних формули і можна обчислити всі значення, яких набуває дана формула. Кожній формулі алгебри висловлень можна поставити у відповідність її *таблицю істиності.*

Для формул з двома різними логічними змінними є тільки чотири різних набори їхніх значень, для формул з трьома різними змінними – вісім наборів. Взагалі можна довести, що коли формула містить n різних логічних змінних, то існує 2^n різних наборів значень цих змінних.

Практичне заняття №3

Висловлення. Логічні операції над висловленнями. Формули. Таблиці істинності

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв’язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Як одержує людина знання про оточуючий світ? Логіка і математична логіка.
   2) Що називається висловленням? Наведіть приклади висловлень, встановіть їх значення істинності.
   3) Поняття про думку і твердження. Основні види математичних тверджень.
   4) Дайте означення простих і складених висловлень, предиката. Наведіть власні приклади.
   5) Що називається кон’юнкцією висловлення? Побудуйте таблицю істинності.
   6) Що називається диз’юнкцією висловлення? Побудуйте таблицю істинності.

7) Дайте означення заперечення висловлення. Поясність два способи побудови заперечення висловлення, наведіть приклади.
8) Дайте означення імплікації висловлення, побудуйте таблицю істинності.
9) Що називається еквіваленцією висловлень? Побудуйте таблицю істинності, наведіть приклади висловлень, що мають структуру еквіваленції.
10) Індуктивне означення формули логіки висловленнь.
11) Таблиця істинності формули логіки висловлень та кількість її рядків.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ:

1. Встановити, які з наведених речень є висловленнями:

1) 8 – ціле число;
2) 169 ділиться на 9 або на 4;
3) $x^2 \geq 0$;
4) Чи існують рівнокутні трикутники?
5) Існують рівносторонні трикутники;
6) Закрийте зошити!
7) $5 \geq 5$.

2. Встановити логічну структуру висловлення: число a ділиться на 3 і 2 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 6.

3. Встановити логічну структуру висловлення: неправильно, що 5 не менше 7.

4. Встановити логічну структуру висловлення: всі натуральні числа додатні.

5. Встановити логічну структуру висловлення: всі цілі числа невід'ємні.

6. Знайти логічне значення висловлення: всі натуральні числа додатні.

7. Знайти логічне значення висловлення: всі цілі числа невід'ємні.

8. Користуючись логічною та математичною символіками, записати висловлення: «20 ділиться на 5 і 3 тоді і тільки тоді, коли 20 ділиться на 15» у вигляді логічної формули; встановити його логічні структуру та значення.

9. Знайти логічне значення висловлень:

а) 12 ділиться на 3 і 2 тоді і тільки тоді, коли 12 ділиться на 6;
б) неправильно, що 5 не менше 7.

10. Скласти таблицю істинності висловлень :

а) $(B \Leftrightarrow \overline{A}) \wedge \overline{B}$,

б) $\overline{A} \Rightarrow \overline{(B \vee A)}$.

11. Побудувати таблиці істинності для таких формул:

a) $a \Rightarrow \left(\bar{b} \wedge c \vee a\right)$;
b) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow \bar{a} \Rightarrow b) \Rightarrow a$;
c) $\left(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)\right) \Rightarrow \left(b \Rightarrow (a \Rightarrow c)\right)$;
d) $\left(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)\right) \wedge \bar{b}$;
e) $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$;
f) $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$.

12. За допомогою побудови таблиць або методом рівносильних перетворень довести, що виконуються такі рівносильності:

a) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

b) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$;

c) $(C \vee D) \Rightarrow B = (C \Rightarrow B) \wedge (D \Rightarrow B)$;

d) $A \Rightarrow (C \wedge D) = (A \Rightarrow C) \wedge (A \Rightarrow D)$;

e) $A \Rightarrow (C \vee D) = (A \wedge \bar{C}) \Rightarrow D$.

13. Встановити логічну структуру даних висловлень і знайти їх логічне значення:

1) якщо π < 3, то π2 < 32;

2) якщо 7 > 6, то 7 ≥ 6;

3) 198 ⋮ 11 і 18 але не кратне 7;

4) 96 ⋮ 48 тоді і тільки тоді, коли 96 ⋮ 8 і 96 ⋮ 6;

5) неправильно, що хоч одне із чисел 21, 51, 91 є простим.

14. Замість крапок поставити у реченні «для того щоб натуральне число ділилося на 5, …, щоб воно ділилося на 10» один із трьох виразів «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо» так, щоб утворилось істинне висловлення. Відповідь обґрунтувати.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Вивчити теоретичний матеріал з теми: «Предикати і операції логіки висловлень над ними» та підготуватись до практичного заняття №4.

2. Розв'язати вправи:

№1 Які з наведених нижче висловлень є істинними, а які хибні:

a) вирази $(m-n)^2$ і $(n-m)^2$ –тотожньо рівні;

b) сума $128 \times 22 + 22^2$ ділиться на 200;

c) сума $101^2 \times 5 + 65 \times 101$ ділиться на 19;

d) різниця $313 \times 299 - 313^2$ ділиться на 7;

e) число 21 є коренем рівняння $19x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 7x = 37$;

f) графік функції $y = 3x^3$ симетричний відносно початку координат.

№2 В наступних складених висловлюванях виділіть складові їх елементарних висловлювань, запишіть складові висловлювання за допомогою формул і вкажіть, які з них істинні:

a) 15 кратне 3 і 12 кратне 3;

b) $2 < 3 < 5$;

c) $4 \times 2 = 8$ і $27 \div 7 = 4$;

d) 15 – просте число і 15 не ділиться на 7;

e) $\sqrt{16} = 4$ і $\sqrt{16} = -4$;

f) Число 157 просте або складене;

g) $2 \leq 3 < 5$.

№3 З елементарних висловлень a,b побудувати такі висловлення: $\bar{a},\ \bar{b}, a \vee b, a \wedge b, a \Rightarrow b, a \Leftrightarrow b$ і визначити їхні значення істинності, якщо:

a) A: «Число 1155 не ділиться на 21», B: «Число 105 ділиться на 7»;

b) A: «Число 14612 ділиться на 9», B: «Сума цифр числа 14612 ділиться на 9»;

c) A: «Діагональ квадрата несумірна з його стороною», B: «$\sqrt{2}$–ірраціональне число»;

d) A: «Діагоналі прямокутника не рівні між собою», B: «Вертикальні кути рівні між собою»;

e) A: «У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони», B: «У правильному трикутнику всі три кути рівні між собою».

№4 За допомогою таблиць істинності довести:

а) $A \wedge B \Rightarrow C = A \Rightarrow C \vee B \Rightarrow C$;

б) $A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$.

№5 Нехай A: «Зараз ранок», B: «Зараз тиха погода», C: «Зараз іде дощ».

Сформулювати словесно записані за допомогою формул висловлення:

a) $a \wedge b \wedge c,$

b) $\bar{a} \vee \overline{b \wedge c},$

c) $a \Rightarrow\ b \wedge c,$

d) $a \wedge c \Rightarrow \bar{c},$

e) $\overline{a \vee b} \wedge \bar{c}.$

№6 Побудувати таблиці істинності для таких формул:

a) $(\bar{b} \Rightarrow a) \Rightarrow (\overline{a \vee b});$

b) $(a \Rightarrow (b \Rightarrow a)) \wedge (b \vee \bar{c}).$

Предикати і операції алгебри висловлень над ними

Досконалішу символіку, виразні, багаті засоби вираження різних тверджень, досконалі засоби аналізу логічних міркувань дає такий ступінь математичної логіки, як ***логіка предикатів.***

Позначимо через h (x) речення: «x – непарне число». Очевидно, це речення не буде висловленням, бо про нього не можна сказати, істинне воно чи хибне. Якщо в h (x) замість змінної x підставляти конкретні натуральні числа, то матимемо висловлення.

Наприклад: «5 – непарне число» – істинне висловлення, тобто h (5) = 1; «8 – непарне число» – хибне висловлення, тобто h (8) = 0 і т. д.

Означення. *Речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об'єктів з певної множини* М *перетворюються у висловлення,* називають ***висловлювальними формами.*** У розглядуваному випадку h (x) – висловлювальна форма від однієї змінної, або одномісна висловлювальна форма.

Висловлювальна форма *h (x)* визначає одномісне відображення, визначене на множині N натуральних чисел, з множиною значень у дво-елементній множині {0; 1}, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями хибності та істини. Аналогічно, наприклад, висловлювальна форма s (*x*) «*x* – студент» визначає відображення s, визначене на множині імен конкретних людей з множиною значень в {0; 1}.

Прикладів таких одномісних відображень можна навести скільки завгодно. Всі вони мають ту характерну особливість, що областю їх визначення може бути будь-яка (не обов'язково числова) множина *М* об'єктів; а множиною значень завжди є двоелементна множина {0; 1}. Такі відображення визначають певні властивості об'єктів, їх називають одномісними предикатами.

Означення. Одномісним предикатом *називається відображення р, визначене на деякій предметній множині М, яке набуває значення лише в двоелементній множині {0; 1}, тобто відображення М {0; 1}.*

Вираз *р* (*x*) називають *висловлювальною формою предиката р.* Для зручності домовимося предикати позначити разом зі змінними аргументами, тобто записувати їх так, як і відповідні висловлювальні форми. ***Наприклад,*** говоритимемо «предикат *h (x)»,* «предикат s (*x*)». Область визначення предиката *р* (x) позначатимемо через O_p.

Розглядаючи, наприклад, предикат *h* (*x*) «*x* – непарне число» на множині *N*, бачимо, що для одних натуральних чисел він набуває значення 1, для других – 0. Цим самим множина *N* поділяється на дві підмножини, на одній з яких предикат *h* (*x*) набуває лише значення 1, а на другій – лише значення 0. Першу з цих підмножин називають *характеристичною множиною предиката* h (*x*) або його *областю істиності.* Це саме можна сказати про будь-який одномісний предикат *р* (*x*). Характеристичну множину предиката *р* (*x*) з областю визначення, *М* позначатимемо через M_p.

Наприклад, для предиката *h* (*x*), визначеного на *N,* маємо N_h = (1, 3, 5, 7, 9, ..., *2k* + 1, ...}, тобто множину всіх непарних чисел. Аналогічно для предиката *s* (*x*) «*x* – студент» характеристичною множиною є множина імен усіх студентів.

Аналогічно, розглядаючи висловлювальні форми від двох предметних змінних, приходимо до поняття двомісних предикатів, які позначатимемо згідно з тільки що прийнятою домовленістю щодо позначення одномісних предикатів.

Означення. Двомісним предикатом називається відображення *f,* визначене на деякій предметній множині *М,* яке набуває значення лише в двоелементній множині {0; 1}, тобто відображення M^2 {0; 1}, де $M^2 = M \times M$.

У математиці є багато різноманітних предикатів, причому деякі з них, найпоширеніші, мають свої спеціальні позначення, наприклад:

«*x* дорівнює *y*» позначається *«x = y»,*

«*x* менше від *y»* позначається *«x* < у»,

«x паралельно *y»* позначається *«x* || у» і т. д.

Символи предикатів, які мають усталене позначення, називають ***індивідуальними*** або ***сталими символами*** предикатів і записують їх, як правило, інфіксно, тобто, символ двомісного індивідуального предиката записують між позначеннями змінних. Інші символи предикатів – змінні. Залежно від домовленості вони можуть позначати різні конкретні предикати. Тому, записуючи символічно який-небудь конкретний предикат, треба вказувати його конкретний смисл. ***Наприклад,*** нехай предикат $p\ (x,\ y)$ означає «x і y взаємно прості».

Двомісні предикати визначають відношення між об'єктами.

Важливими прикладами одномісних і двомісних предикатів є рівняння (та їх системи) і нерівності (та їх системи).

Домовимося кожне висловлення розглядати як предикат, який залежить від порожньої множини предметних змінних, тобто як нуль-місний предикат, який не залежить від області визначення. Тоді логіка висловлень розглядається як окремий випадок логіки предикатів.

Квантори

Розглянемо операції, які перетворюють предикати у висловлення. Обмежимося спочатку одномісними предикатами.

Однією з таких операцій є операція підстановки замість предметного змінного x імен конкретних елементів з області визначення.

Наприклад, якщо замість змінної х предиката p (x) «x – просте число», підставляти натуральні числа 1, 2, 3, 4, ..., то діставатимемо висловлення, істинні чи хибні: «1 – просте число», «2 – просте число» і т. д.

В результаті підстановки матимемо висловлення, які стосуються окремих елементів області визначення і не характеризують властивостей цієї множини в цілому, тобто не можна дістати певних загальних висловлень про область визначення.

Такі висловлення можна дістати за допомогою нових операцій, які називають ***кванторами.***

У математиці велику роль відіграють слова «кожний», або «для всіх», та «існує», відображаючи категорії цілого і частини в навколишній дійсності. Наприклад, існують пари простих чисел, які відрізняються між собою на два, (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19) і т. д.; для кожного натурального числа x існує більше за нього число y таке, що y і x.

Операції, про які йдеться, відображають зміст слів «для всіх» та «існує» і називаються *операціями квантифікацій* або *операціями зв'язування квантором змінних.*

Про числа 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 можна сказати: всі подані числа однозначні і деякі з цих чисел є парними. Так як відносно цих тверджень можна сказати, що вони істинні чи хибні, то отримані твердження – висловлення. Слова «всі» і «деякі» називають **кванторами**.

Слово квантор з латинського перекладається як «скільки», тобто квантор показує, о скількох (всіх або деяких) об'єктах йдеться в твердженнях. Розрізняють квантори спільності і існування. **Квантори спільності** – це слова **«будь-який», «всякий», «кожний», «всі». Квантори існування** – це слова

«існує», «деякі», «хоча б один». Таким чином, якщо перед висловлюваною формою поставити деякий квантор, то отримаємо вислів.

Отже, квантори загальності позначають знаком $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова All – всі), а квантори існування знаком $\exists$ (перевернута перша буква англійського слова Exists – існує).

Квантори загальності ($\forall$)	**Квантори існування ($\exists$)**
всі	існує
кожен	хоч би один
будь-який	деякі
довільний	знайдеться

Форму висловлення з квантором мають більшість математичних тверджень. ***Наприклад,*** всі квадрати являються прямокутниками; деякі парні числа діляться на 4; в будь-якому прямокутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 360^0. **Істинність** висловів з кванторами *спільності* встановлюється шляхом **доведення**. Щоб впевнитися в **хибності** таких висловів, достатньо навести **контр приклад**.

Наприклад:

1) Будь-яке число 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 являється розв'язком нерівності $x+2>x$ (підставляючи всі значення в нерівність довели істинність вислову, а значить, за індукцією, будь-яке дійсне число задовольняє нерівності);

2) Сума будь-яких послідовних натуральних чисел ділиться на 3 (істинність доводиться безпосередньо);

3) будь-який прямокутник є квадратом (достатньо накреслити прямокутник, який не є квадратом і доведена хибність вислову – контр приклад).

Істинність висловів з кванторами *існування* встановлюється за допомогою **конкретного прикладу**. Щоб впевнитися в **хибності** такого вислову, необхідно **провести доведення**.

Наприклад:

1) існують натуральні числа, кратні 3 (6, 9, 12 і т.д.);

2) існують прямокутні рівносторонні трикутники (є хибним, тому що в прямокутному трикутнику один кут обов'язково прямий, а в рівносторонньому всі кути містять 60^0, значить, серед прямокутних трикутників рівносторонніх не існує).

Правила встановлення значень істинності висловлень, що містять квантори, подані у таблиці:

Висловлення з квантором	$\forall \boldsymbol{A}$	$\exists \boldsymbol{A}$
I	шляхом доведення	навести приклад
X	навести контрприклад	шляхом доведення

Правила побудови заперечень висловів, які містять квантори.

Заперечення висловів з квантором (спільності або існування) може бути побудоване двома способами:

1) перед даним висловом ставляться слова «невірно, що»; «неправильно, що»;

2) квантор загальності (існування) замінюється квантором існування (загальності), а твердження, яке стояло після квантора, замінюється його запереченням. Сформульоване правило є достатнім для правильної побудови заперечення висловів з квантором. Заперечення даного вислову може бути побудовано і в іншій формі. Важливо тільки не забути вимогу: якщо вислів хибний, то його заперечення повинно бути істинним, і навпаки.

Наприклад:

1) «деякі непарні числа діляться на 4» – хибність, його заперечення: «невірно, що деякі числа діляться на 4», або «всі непарні числа не діляться на 4»;

2) «усі натуральні числа діляться на 3» – хибність, його заперечення має вид: «невірно, що всі натуральні числа діляться на 3», або «існують натуральні числа, які не діляться на 3».

Практичне заняття №4

Предикати і операції алгебри висловлень над ними. Квантори

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Що розуміють у математиці під змінною? Значеннями змінної, її областю визначення?
   2) Яке твердження називається предикатом?
   3) Як називаються змінні, що входять до предикату?
   4) Сформулюйте означення одномісного, двомісного, n-місного предикату.
   5) Як означити області істинності (або хибності) предикату? Приклади.

6) Які предикати називаються тотожно істинними, тотожно хибними, рівносильними (на множині M)?
7) Які операції виконуються над предикатами? Наведіть приклад, який розкриває аналогії між певними операціями над предикатами та системами і сукупностями рівнянь та нерівностей.
8) Які символи називаються кванторами, назвіть їх різновиди та охарактеризуйте відповідні операції. Від якого латинського слова походить термін «квантор»?
9) У чому полягає операція навішування квантора загальності, квантора існування?

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Серед наведених речень виділити одномісні та двомісні предикати:
а) $x + y = 56$; б) $x^2 < 4$; в) xy; г) $3x^3 - 4x = 0$.

2. Дано предикат $P(x)$ – «$x<3$», $x \in R$. Знайти області істинності і хибності цього предиката.

3. Дано предикат $Q(x)$ – «$y \geq 2$», $y \in R$.. Знайти характеристичну множину цього предиката.

4. Дано предикат $Q(x)$ – «$y \geq 4$», $y \in R$. Знайти області істинності і хибності цього предиката.

5. Знайдіть області визначення предикатів: а) $\dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x+1}} = 0$; б) $\dfrac{5 - x}{\sqrt{x^2+1}} > 1$.

6. Записати мовою логіки предикатів з використанням кванторів:
а) різниці двох натуральних чисел; б) частки двох натуральних чисел.

7. Записати за допомогою символіки логіки предикатів:
а) «Кожні дві прямі, які знаходяться в одній площині і перпендикулярні до третьої прямої, паралельні між собою».
б) «Для будь-яких дійсних чисел x і y число x менше від y тоді і тільки тоді, коли існує число $z > 0$ таке, що $x + z = y$ ».

8. Записати характеристичну множину предикатів $f(x,y)$: "x+y=8", g(x,y): "$x + y < 8$", визначених на множині M={1,2,3,4,5,6,7,8}.

9. З предиката $f(x,y)$: «Учень другого класу x прочитав книгу y» за допомогою кванторів утворити всі можливі висловлення.

10. Дано предикати: «$x - 5 < x$» і «$x - 1 > x$». Поставити перед ними квантори так, щоб дістати істинні висловлення; хибні.

11. На множині Z задані предикати $E(x)$: «x – дільник 4» і $F(x)$: «x – дільник 12». Доведіть, що $F(x)$ логічно слідує із $E(x)$. Сформулювати висловлення $E(x) \models F(x)$ за допомогою терміна:
1) «достатньо»; 2) «необхідно».

12.* Для предикатів $P(x)$ – «$x > 2$» і $Q(x)$ – «$x \leq 5$», визначених на множині дійсних чисел R, знайти області істинності, виконати операції логіки висловлень над ними та знайти області істинності результатів цих операцій.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Вивчити теоретичний матеріал з теми: «Теореми. Міркування і умовиводи», «Логічні задачі».

2. Розв’язати вправи.

№1 Знайти характеристичну множину предикатів, визначених на множині *R:*

a) $-3 \leq x \leq 8;$

b) $|x| \leq 3;$

c) $2 + x = 15 + x;$

d) $x + 2 > 14;$

e) $x^2 > 0;$

f) $(x+2) - (5x - 7) < 0.$

№2 Нехай предикати $f(x)$: "x+4<0", g(x): "$3x + 2 > 0$", визначені на множині R. Знайти характеристичні множини для предикатів $f(x) \vee g(x), f(x) \wedge \overline{g(x)}, \overline{f(x)}, \overline{g(x)}, f(x) \Rightarrow g(x)$.

№3 Чи будуть рівносильними предикати:

P *(x) – «x2 + x – 6 = 0» і Q (x) – «x2 + 2x – 8 = 0»* – на множині:

1) натуральних чисел N?

2) цілих чисел Z?

№4 Серед речень виділити предикати і для кожного з них встановити область істинності:

1) $x + 5 = 2$, $x \in R$;

2) $3x + 5$, $x \in R$;

3) $x + y = 4$, $x, y \in R$;

4) $2x - 5 < 4$, $x \in R$;

5) $x \vdots 3$, $x \in N$;

6) існують дійсні числа такі, що $x^2 - 5x + 6 = 0$;

7) студент … є старостою групи;

8) число *x* додатне, $x \in R$.

№5 Предикати $P(x)$ і $Q(x)$ визначені на множині дійсних чисел. Виконати операції логіки висловлень над даними предикатами і знайти області істинності результатів операцій, якщо:

1) $P(x)$ – «$x > 2$» і $Q(x)$ – «$x \leq 6$»;

2) $P(x)$ – «$x \geq -3$» і $Q(x)$ – «$-4 < x - 2$»;

3) $P(x)$ – «$x < 5$» і $Q(x)$ – «$x \geq -2$».

№6 На множині *R* задані предикати $E(x)$: «$x - 2 = 0$» і $F(x)$: «$x^2 - 4 = 0$»:

а) знайти множину істинності цих предикатів.

б) визначити, у якому відношенні знаходяться множини I_E і I_F;

в) чи можна стверджувати, що $F(x)$ логічно слідує із $E(x)$ на множині *R*? Якщо так, то зробіть відповідний запис.

Теореми. Міркування і умовиводи

Структура і види теорем

Раніше було відокремлено, що суттєві властивості об'єкта утворюють зміст поняття про цей об'єкт. Частина цих властивостей включається в означення поняття. Щоб мати більш повне уявлення про об'єкт, вивчають і інші його властивості. Властивості основних (первісних) понять розкривається в **аксіомах** – твердженнях, які приймаються без доведення. ***Наприклад,*** властивості основних понять геометрії: точка, пряма, площини включені в аксіоми. Взагалі система аксіом будь-якої теорії, розкриваючи властивості основних понять, дає, по суті, їх означення, які називаються *аксіоматичними.* Властивості, які доводяться, найчастіше називають **теоремами,** іноді *слідствами, признаками.* В алгебрі – *формулами, тотожностями, правилами*. Тому, **теорема** – це висловлення про те, що з властивості A випливає властивість B. істинність цього вислову встановлюється шляхом доведення. В якому б виді не була сформульована теорема, в ній завжди виділяється **умова** A (що задано) і **висновок** B (що треба довести).

Розрізняють пряму, обернену, протилежну і обернену до протилежної теореми.

1. $A \Rightarrow B$ – пряма теорема,
2. $B \Rightarrow A$ – обернена теорема,
3. $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – протилежна теорема,
4. $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – обернена до протилежної теорема.

Пряма і обернена до протилежної теореми є рівносильними.

Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» – пряма теорема.

А: «кути вертикальні», В: «кути рівні».

$A \Rightarrow B$ – пряма теорема.

Обернена: $B \Rightarrow A$: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні».

Протилежна: $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$: «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні».

Обернена до протилежної: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$: «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні».

Існує зв'язок між названими видами теорем. Встановлено, що теореми $A \Rightarrow B$ і $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ рівносильні, тобто $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Отриману рівносильність називають законом контрапозиції.

Не кожна ознака A, необхідна для B, є і достатньою, так само як і не кожна достатня ознака є необхідною. Наприклад, щоб число ділилось на 3, достатньо, щоб воно ділилось на 9, але це не є необхідною умовою, наприклад $6 \vdots 3$, але 6 не $\vdots$ 9 (знак «$\vdots$» – знак подільності). Щоб число ділилось на 6, необхідно, щоб воно ділилось на 2, але цього не достатньо, необхідно також щоб воно ділилось і на 3. Отже, щоб число ділилось на 6, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось і на 2, і на 3. За допомогою складеного висловлення символічно це можна записати так:

$a \vdots 6 \Leftrightarrow (a \vdots 2) \wedge (a \vdots 3)$.

Інакше a ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли $a \vdots 2$ і $a \vdots 3$.

Якщо і умова теореми, і її висновок є простими висловленнями, то теорема називається простою.

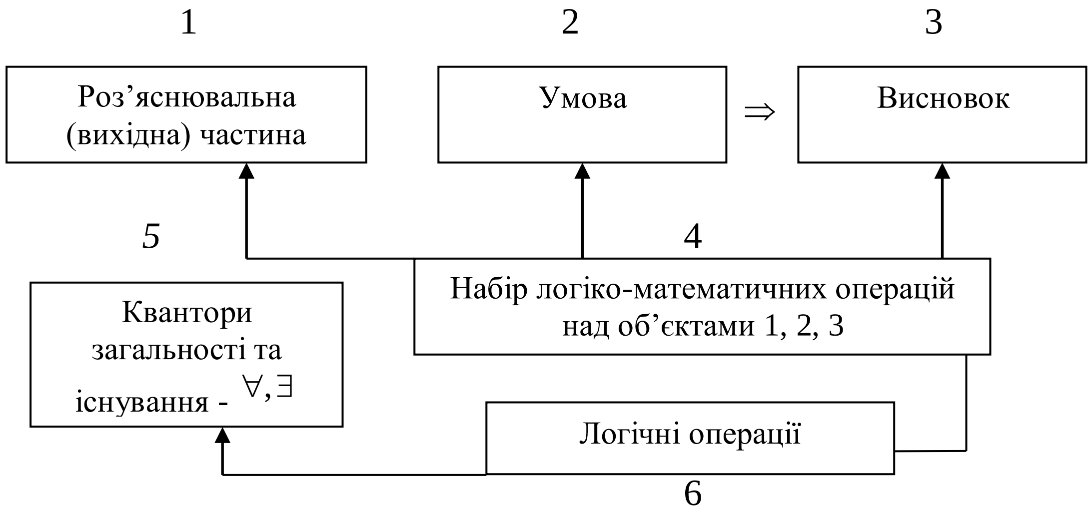
Якщо умова або висновок теореми, або і те, і друге – складені висловлення, то теорему називають складеною. Попередня теорема, що виражає ознаку подільності на 6, є складеною. Її можна записати у вигляді $A \wedge B \Rightarrow C$. Тут умова є кон'юнкцією двох висловлень A і B, а висновок – висловлення C.

Приклад аналогічної структури теореми: «Якщо дві прямі площини перпендикулярні до третьої прямої, то вони паралельні між собою» або $(a \perp c) \wedge (в \perp c) \Rightarrow a \parallel в$.

Приклад теореми, в якій і умова, і висновок є кон'юнкціями: «В паралелограмі протилежні сторони попарно рівні». Інакше: «Якщо чотирикутник – паралелограм (тобто протилежні сторони попарно паралельні), то його протилежні сторони попарно рівні».

Тобто $(a \parallel c) \wedge (b \parallel d) \Rightarrow (a = c) \wedge (b = d)$

До сталих компонентів структури теореми належать такі:



Структурна сталість компонентів 1, 2, 3 зумовлена тим, що питання про істинність теореми всіма розв'язується однозначно, набір же логічних операцій (4), послідовності їх використання можуть бути різними. Тут великі можливості для творчої розумової діяльності, для формування інтелектуальних умінь в процесі доведення теорем.

Необхідні і достатні умови

Якщо з твердження A випливає твердження B, то говорять, що B – **необхідна умова** для A, а A – **достатня для *B***. іншими словами, вислів B називається необхідною умовою для A, якщо воно логічно випливає з A. вислів A називається достатньою умовою для B, якщо B з нього випливає. Якщо твердження A і B рівнозначні, то говорять, A – **необхідна і достатня умова** для B, і навпаки. Наприклад, в геометрії доведено, що з твердження «кути вертикальні» випливає твердження «кути рівні». тому згідно даному означенню можна сказати, що рівність кутів – необхідна умова для того, щоб кути були вертикальні, а вертикальність кутів є достатньою умовою для їх рівності. У зв'язку з цим твердження «якщо кути вертикальні, то вони рівні» можна сформулювати інакше: для того, щоб кути були вертикальні, необхідно, щоб вони були рівні; для того, щоб кути були рівні, достатньо, щоб вони були вертикальні.

Дедуктивні міркування. Довести теорему $A \Rightarrow B$ – значить встановити логічним шляхом, що завжди, коли виконується властивість *A*, буде виконуватись і властивість *B*. Доведення в математиці має ряд особливостей. Часто воно проводиться за правилами логіки без будь-яких посилань на наглядність і дослід.

В основі доведення лежить **міркування** – логічна операція, в результаті якої із одного чи декількох взаємозв'язаних по змісту тверджень отримаємо твердження, яке містить нові (по відношенню до заданих) знання. В якості приклада розглянемо міркування першокласника, якому необхідно встановити відношення «менше» між числами 7 і 8. учень говорить: «$7<8$, тому що 7 при рахунку називають раніше, ніж 8». На які ж факти він опирався, стверджуючи це. По-перше, якщо число а при рахунку називають раніше числа в, то $a<b$ для будь-яких натуральних чисел. І по-друге, 7 при рахунку називають раніше, ніж 8. перше твердження носить загальний характер, так як містить квантор спільності, його називають **загальною посилкою**. Друге твердження стосується конкретних чисел 7 і 8, відображає частинний випадок, його називають **частковою посилкою**. З двох посилок і випливає новий факт $7<8$, його називають **висновком**. Міркування, між посилками і висновком якого має місце відношення слідування, називають **дедуктивним**. Іншими словами, міркування є дедуктивним, якщо за допомогою його з істинних посилок не можна отримати хибний висновок. Інакше міркування не являється дедуктивним.

Вважають, що в основі кожного дедуктивного міркування лежить певне правило висновку.

1) **Правило висновку** ($A \Rightarrow B$ і $A(a)) \Rightarrow B(a)$, де $A \Rightarrow B$ – загальна посилка, $A(a)$ – часткова посилка і $B(a)$ – висновок.

2) **Правило заперечення** $\left(A \Rightarrow B, \overline{B}(a)\right) \Rightarrow \overline{A}(a)$**.**

3) **Правило силогізму** $(A \Rightarrow B, B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. Застосування цих правил гарантує, що міркування буде дедуктивним, тобто дозволяє з істинних посилок виводити істинні висновки. Наприклад, 1) Усі числа, запис яких закінчується нулем, діляться на 5; число не ділиться на 5, значить, його запис не закінчується 0. 2) Якщо натуральне число кратне 8, то воно кратне 4; якщо натуральне число кратне 4, то воно кратне 2; значить, якщо число кратне 8, то воно кратне 2. 3) Якщо запис числа закінчується нулем, то воно ділиться на 5; число не закінчується нулем, значить, воно не ділиться на 5.

Розглянемо деякі з них.

Дедуктивне доведення. Це основний метод математичних доведень. Кожен його крок ґрунтується на певному логічному законі, аксіомі або даних теорем, і все доведення є ланцюжок логічних умовиводів. При такому доведенні з правильних умов теореми ми з необхідністю дістаємо правильний висновок.

Наприклад: Теорема: «Якщо число ділиться на 2 і на 3, то, оскільки воно ділиться на 2 і не ділиться на 6, воно не ділиться на 3».

Введемо позначення: A – «число ділиться на 2», B – «число ділиться на 3», С – «число ділиться на 6».

Доведення цієї теореми запишемо за допомогою послідовних дедуктивних умовиводів.

1) A, B – умова теореми;
2) $A \wedge B$;
3) $A \wedge B \Rightarrow C$;
4) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge \overline{C} \Rightarrow \overline{B})$;
5) $(A \wedge \overline{C} \Rightarrow \overline{B})$.

На третьому кроці використано теорему: якщо число ділиться на кожне з двох взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їхній добуток.

Повна індукція. Термін «індукція» походить від латинського induktio – наведення. У математиці використовуються повна й неповна індукції.

Доведення методом повної індукції полягає в розгляді всіх окремих випадків (чисел, фігур тощо), при яких теорема правильна. Кількість таких випадків повинна бути скінченною і невеликою за кількістю.

Теорема 1. Значення виразу $c = a^2 + b^2$, $(a, b \in Z)$ є число, що при діленні на 4 не має остачі 3.

Доведення теореми проведемо, розглядаючи три випадки: 1) обидва числа парні; 2) обидва числа непарні; 3) одне число парне, друге – непарне.

Нехай a, b – парні, тобто $a = 2m$, $b = 2n$, $m, n \in Z$. Дістанемо

$c = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4\cdot (m^2 + n^2)$, тобто $c \vdots 4$, остача 0.

Нехай a, b – непарні числа, тобто $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $m, n \in Z$. Маємо

$c = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4 (m^2 + n^2 + m + n) + 2$,

а це означає, що при ділені с на 4 дістанемо остачу 2 , а не 3.

Випадок 3) спробуйте розглянути самостійно.

Неповна індукція. Відомо, що 15 ділиться на 5, 25 ділиться на 5, 35 і 95 діляться на 5. враховуючи це, робимо висновок, що будь-яке число, запис якого закінчується цифрою 5, ділиться на 5. У розглянутому міркуванні на основі ряду часткових випадків робимо висновок загальний. Такі міркування називають неповною індукцією.

Неповна індукція – це таке міркування, при якому на основі того, що деякі об’єкти сукупності мають певні властивості, робиться висновок про те, що ці властивості притаманні всім об’єктам цієї сукупності. Висновки, отримані при неповній індукції, можуть бути як істинними, так і хибними. Так, висновок про те, що кожне число, запис якого закінчується цифрою 5, ділиться на 5, істинний. А твердження «при будь-якому натуральному числі n-значення виразу $n^2 + n + 41$ є просте число» хибне. Дійсно, якщо $n = 41$, то отримаємо значення $43 \cdot 41$, тобто даний вираз є складовим числом. До висновків, отриманих за допомогою неповної індукції, треба відноситись критично. Ці висновки носять характер гіпотези, догадки, яку слідує або довести (дедуктивним методом), або спростити. Таким чином, у процесі пізнань дедуктивні і індуктивні міркування виявляються взаємозв'язаними. При тому що індуктивні міркування не завжди приводять до правильних висновків, роль їх в вивченні математики і інших науках дуже велика. У ході індуктивних міркувань формується вміння бачити загальне в конкретних, часткових випадках, висловлювати догадки.

Непрямі доведення

Зведення до абсурду. Цей метод полягає в тому, що в теоремі $A \Rightarrow B$ припускають, що правильним буде $\overline{B}$. Якщо в результаті цього припущення приходять до неправильного висновку, абсурду, то роблять висновок, що наслідок В теореми $A \Rightarrow B$ правильний.

Цим способом доводять, наприклад, таку **теорему:** Якщо дві різні прямі *a* і *b* паралельні третій прямій *c,* то вони паралельні між собою.

Припустимо $\overline{B}$, тобто *a* і *b* не паралельні. Тоді вони перетинаються в якійсь точці К, яка не належить *c*. Дістанемо, що через точку К поза прямою *c* можна провести дві прямі *a* і *b*, які паралельні *c*, а це суперечить аксіомі паралельності, тобто є хибним твердженням. Отже, правильним твердженням є *B*.

Метод від супротивного. Цей спосіб ґрунтується на законі контрапозиції $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Теорема 2. Довести, що коли *ab* – непарне число, то обидва множники *a* і *b* – непарні цілі числа.

Позначимо А: «добуток *ab*– непарне число», Т: «*a* – непарне число», S: «*b* – непарне число». Тоді теорема скорочено запишеться так: $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{S} \wedge \mathrm{T}$, або $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, де В «$\mathrm{S} \wedge \mathrm{T}$».

Припустимо, що $\overline{B} = \overline{S \wedge T} = \overline{S} \vee \overline{T}$, тобто один із множників *a* або *b* є парним числом. Нехай, наприклад, *a* – парне, тобто $a = 2m$, $m \in \mathrm{Z}$. Тоді $ab = 2mb$ – парне число, тоді дістали $\overline{A}$. Таким чином довели теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, а цим самим і дану теорему $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$.

Поширеним прикладом неправильних міркувань є непродумане використання неповної індукції, коли загальний висновок зроблено на основі окремих спостережень, експериментів, розгляду скінченної кількості їх. Використання неповної індукції може привести як до правильних, так і неправильних висновків. Так, побудувавши кілька графіків лінійних рівнянь з двома змінними в прямокутній системі координат і побачивши, що вони є прямими лініями, робимо висновок, що графік кожного лінійного рівняння з двома змінними є пряма лінія. Цей умовивід – правильний. Прикладом, коли неповна індукція приводить до хибного результату є теорема Ферма. Ще у XVII ст. математик П. Ферма (1601 – 1665) помітив, що числа виду $F_n = 2^{2^n}+1$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ – прості: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

Ферма висловив припущення, що при будь-якому $n \in \mathrm{N}$ числа такого виду є простими (їх стали називати простими числами Ферма). Ця гіпотеза була висловлена на основі кількох обчислювальних експериментів. У 1732 р. видатний математик Л. Ейлер (1707 – 1783) показав, що при $n = 5$ $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$, тобто F_5 не є простим числом. Цей контрприклад спростував гіпотезу Ферма.

Практичне заняття №5

Теореми. Міркування і умовиводи.

Розв'язування логічних задач

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.
5. Підготовка до самостійної роботи №1.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Поняття про умовивід та його структура. Дедуктивні умовиводи. Теоретична основа умовиводу. Умовний запис умовиводу.
   2) Правильні і неправильні умовиводи. Поняття про правило виведення.
   3) Простіші правила виведення в логіці висловлень. Яка їх особливість? Як доводиться правильність правила логіки висловлень?
   4) Правильні і неправильні міркування. Способи перевірки правильності міркувань, що містять предикати.
   5) Суть перевірки правильності міркувань за допомогою кругів Ейлера.
   6) Загальні поняття про теорему в математиці. Інші назви поняття теореми.
   7) Умовна форма запису теореми. Повний запис теореми за допомогою символів математичної логіки. Будова теореми.
   8) Твердження, пов'язані з даною теоремою. Яке з них обов'язково є теоремою?
   9) Поняття про доведення теореми. Означення доведення теореми на основі понять математичної логіки.
   10) Способи доведення теорем. Суть прямого способу доведення теорем.
   11) Непрямий спосіб доведення теорем. Доведення від супротивного. Контрапозитивний спосіб доведення теорем.

3. **Розв'язування системи тренувальних вправ.**

1. Користуючись логічною і математичною символікою записати дану теорему в символічній формі, виділити в ній пояснювальну частину, умову, висновок. Записати символічно та сформулювати словами твердження, пов'язані з даною теоремою і встановити їх логічне значення:

1. Якщо чотирикутник є ромбом, то його діагоналі перпендикулярні.

2. Якщо в сумі двох натуральних чисел, кожен із доданків ділиться на 7, то їх сума ділиться на 3.
3. Вертикальні кути рівні.
4. У чому відмінність задач 1 і 2?

2. Дати кілька різних словесних формулювань теореми: «Вертикальні кути рівні».

3. Довести теорему методом від супротивного.
Якщо пряма перетинає одну із паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

4. Три однокласники відвідують різні гуртки: хоровий, танцювальний та драматичний. На питання, хто який гурток відвідує, вони відповіли: Андрій: Я – танцювальний; Василь: Я – не танцювальний; Сергій: Я – не хоровий.
Який гурток відвідує кожен із хлопчиків, якщо відомо, що тільки один із них сказав правду?

5. Троє сусідів – Авраменко, Борисенко і Власенко – вирішили спільними зусиллями побудувати колодязь, розподіливши всі витрати між собою порівну. Авраменко купив 6 мішків цементу, а Власенко – 5 таких мішків. Більше потреби у цементі не було, тому Борисенко свою частку витрат у розмірі 22 гривні вніс грошима. Як розподілити ці гроші між Авраменком і Власенком?

6. Андрій та Федір обмінюються грошима з колекції однієї країни. Спочатку Андрій віддав частину своїх грошей Федору, потім Федір – Андрію, потім знову Андрій – Федору і нарешті Федір віддав Андрію гроші востаннє. Після цього у кожного стало по 160 грошових одиниць. Кількість грошей, яка передавалася щоразу, дорівнювала кількості грошей у того, хто її отримував. Скільки грошей було у Андрія та Федора спочатку?

7. Сформулювати наступні теореми у вигляді
«Якщо…, то…», виділяючи в кожній із них умови й висновки:
а) перпендикуляр до однієї з двох паралельних прямих є також перпендикуляром до другої;
б) будь-який паралелограм має центр симетрії;
в) дуги, що знаходяться між рівними хордами, рівні.

8. Дано теореми:
а) Якщо кожний доданок ділиться на дане число, то й сума ділиться на дане число;
б) Якщо похилі, проведені з однієї точки до однієї й тієї ж прямої, рівні, то рівні і їх проекції.
Кожну з них сформулювати з допомогою термінів «достатньо», «необхідно».

9. Користуючись логічною і математичною символіками, записати теорему: «Рівнобедрений трикутник має вісь симетрії» в символічній формі. Встановити будову теореми. Записати в символічній формі та сформулювати словами твердження, які пов’язані з даною теоремою, і встановити їх логічні значення.

10. З’ясувати за допомогою кругів Ейлера правильність умовиводу: ”Усі ромби – паралелограми. Деякі паралелограми – квадрати. Отже, деякі ромби – квадрати”.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Розв’язати задачі.

1. У трьох купках є відповідно 11, 7 і 6 зошитів. Потрібно за допомогою трьох перекладань зрівняти кількість зошитів у кожній купці, причому дозволяється перекладати в купку стільки зошитів, скільки в ній є. Як це зробити?
2. Андрієнко, Коваленко і Василенко живуть в одному місті. Один із них працює муляром, другий – теслею, а третій – слюсарем. Одного разу муляр прийшов до теслі, щоб він допоміг йому замінити вікно у його квартирі, але йому сказали, що той допомагає Коваленку ремонтувати двері. Визначити фах кожного, якщо відомо, що слюсар ніколи не бачив Василенка.
3. Антоненко, Вороненко, Донченко та Ігнатенко за фахом художник, письменник, співак і режисер. Антоненко і художник були у театрі саме тоді, коли співак брав участь у концерті. Вороненко і письменник разом відвідали художника. Письменник написав біографічну повість про Ігнатенка і збирається написати про Антоненка. Встановити прізвища художника, письменника, співака та режисера.
4. Василь, Микола, Петро і Степан – учні 4, 5, 6 та 7-го класів – пішли по гриби. Шестикласник не знайшов жодного білого гриба, проте Петро і учень 4-го класу – по вісім грибів. Василь і п’ятикласник знайшли багато підосичників і гукнули Миколу до гурту. Семикласник, шестикласник і Микола сміялися зі Степана, який зірвав мухомор. Хто з дітей в якому класі навчається?

5. Підготовка до самостійної роботи №1.

Повторити теоретичний матеріал з розглянутих тем та вміти розв’язувати практичні завдання.

Розділ 3. Цілі невід'ємні числа

Цілі невід'ємні числа та операції над ними

Числа 1, 2, 3, 4,… називаються ***натуральними.***

Це одне з основних понять математики. Воно виникло з *практичних потреб людини.* Головна причина для створення натуральних чисел пояснювалась необхідністю порівнювати різні скінченні множини між собою.

У сиву давнину, щоб порівняти скінченні множини, встановлювали взаємно однозначну відповідність між даними множинами або між однією з множин і підмножиною іншої множини, тобто на цьому етапі людина сприймала чисельність множини предметів без рахунку їх. Наприклад, про чисельність множини з 5-и предметів говорили: «Стільки ж, скільки пальців на руці», про множину з 20-ти предметів: «Стільки ж, скільки пальців у людини». Недолік цього методу полягає у тому, що порівнювальні множини повинні бути одночасно видимі.

Візьмемо будь-яку скінченну множину A і відберемо в один клас всі рівнопотужні їй множини. Якщо A – множина вершин трикутника, то в один клас із нею попадуть, наприклад, множина сторін трикутника, множина букв слова «мир» і т.д.

Узявши будь-яку іншу скінченну множину B, нерівнопотужну A, відберемо всі множини, рівнопотужні B. Отримаємо новий клас скінченних множин.

Якщо проводити цей процес далі, то оскільки відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності, всі скінченні множини будуть розподілені за класами еквівалентності, причому будь-які дві множини одного класу будуть рівнопотужні, а будь-які дві множини різних класів – нерівнопотужні.

Для множин одного класу характерна однакова потужність. Ця спільна властивість і є натуральним числом. Наприклад, загальна властивість множин, рівнопотужних множині вершин квадрата, є натуральне число 4, а загальна властивість множин, рівнопотужних множині сторін п'ятикутника є число 5.

Із теоретико-множинних позицій ***кількісне натуральне число є спільна властивість класу скінчених рівнопотужних множин.***

Кожному класу відповідає одне і тільки одне натуральне число, кожному натуральному числу – один і тільки один клас рівнопотужних скінченних множин.

Взагалі кожній скінченій множині A відповідає одне і тільки одне натуральне число $a = n$ (A), але кожному натуральному числу a відповідають різні рівнопотужні множини одного класу еквівалентності. Тому числу "5" будуть відповідати і множина сторін п'ятикутника, і множина його вершин, множина складів слова «математика».

Теоретико-множинний зміст числа 0.

Число 0 ставиться в відповідність порожній множині.

0 – це спільна властивість класу порожніх множин.

$$0 = n(\varnothing)$$

Множина натуральних чисел і число 0 становлять множину цілих невід'ємних чисел.

$$N_0 = \{0\} \cup N$$

Означення. Сумою двох цілих невід'ємних чисел a* і *b *називається число елементів в об'єднанні множин A і B, які не перетинаються і таких, що n (A) = a, n (B) = b, тобто* $a + b = n(A \cup B)$, *де* $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \cap B = \varnothing$.

Сума $a+b$ не залежить від вибору двох множин, що не перетинаються, але таких, що n (A) = a і n (B) = b.

Приклади:

1) A = $\{a, b\}$, B = $\{c, d\}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ і $A \cap B = \varnothing$, отже, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 2 + 2 = 4$, де $n(A) = 2$, $n(B) = 2$.

2) A = {Δ, Δ}, B = {O, O} $\Rightarrow$ $A \cup B$ = {Δ, Δ, O, O} і $A \cap B = \varnothing$, отже, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 2 + 2 = 4$, де $n(A) = 2$, $n(B) = 2$.

Дія, за допомогою якої знаходять суму, називається ***додаванням.*** Числа, які додаються, називаються ***доданками.***

У початковому курсі математики додавання цілих невід'ємних чисел вводиться на основі виконання практичних вправ, пов'язаних з об'єднанням двох множин предметів (без використання відповідної символіки та термінології). Основним засобом розкриття теоретико-множинного смислу додавання є розв'язування простих текстових задач.

Існування суми, її єдиність

Теорема 1. Сума цілих невід'ємних чисел завжди існує і вона єдина. (Доведення теореми випливає з теореми про існування і єдиність операції об'єднання множин).

Іншими словами, які б не було взято два цілих невід'ємних числа a і b, завжди можна знайти їх суму – ціле невід'ємне число c, яке і буде єдиним для заданих чисел a і b.

Закони додавання

– *Комутативний (переставний) закон*: «Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b виконується рівність: $a + b = b + a$.»

Доведення. Нехай a – кількість елементів множини A, b – кількість елементів множини *B*, тобто $n(A) = a$, $n(B) = b$ і $A \cap B = \varnothing$. Тоді за означенням суми цілих невід'ємних чисел $a + b = n(A \cup B)$. А так як $A \cup B = B \cup A$ (за комутативним законом об'єднання множин), то $n(A \cup B) = n(B \cup A)$ $\Rightarrow$ за означенням суми $n(B \cup A) = b + a \Rightarrow a+b = b+a$ для будь-яких цілих невід'ємних чисел.

– *Асоціативний (сполучний) закон*: «Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a, b, c виконується рівність: $(a + b) + c = a + (b + c)$».

Доведення. Нехай a – кількість елементів множини A, b – кількість елементів множини B, c – кількість елементів множини C, тобто $n(A) = a$, $n(B) =$

в, n (С) = c, А$\cap$В = $\varnothing$, В$\cap$С = $\varnothing$. Тоді за означенням суми двох цілих невід'ємних чисел (a + b) + c = n (А$\cup$В) + n (С) = n ((А$\cup$В)$\cup$С). Так як за асоціативним законом об'єднання множин (А$\cup$В)$\cup$С = =А$\cup$(В$\cup$С), то n ((А$\cup$В)$\cup$С) = n (А$\cup$(В$\cup$С)) $\Rightarrow$ за означенням суми двох чисел n (А$\cup$(В$\cup$С)) = n (А) + n (В$\cup$С) = a + (b + c) $\Rightarrow$ (a + b) + + c = a + (b + c).

– Властивість *монотонності додавання*: «Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a , b, m таких, що $a = b$ виконується рівність: $a+m=b+m$».

Теоретико-множинний зміст різниці двох цілих невід'ємних чисел

Розглянемо задачу: «У гаражі стояло 9 машин. 3 машини від'їхали. Скільки машин залишилось у гаражі ?». Ця задача розв'язується виразом на віднімання: 9 − 3 = 6 (машин). Розв'язання цієї задачі пов'язано з виділенням з множини машин, які стояли у гаражі (число елементів її – 9) підмножини машин, які від'їхали (число елементів підмножини – 3) і знаходженням числа елементів у доповненні цієї підмножини, тобто множини машин, які залишились (число елементів доповнення – 6) до даної множини.

Означення. Різницею цілих невід'ємних чисел a і b *називається число елементів в доповненні множини В до множини А, де n (А) = a, n (В) = b, В$\subset$А, тобто $a - b = n$ (А\В), де n (А) = a, n (В) = b, В$\subset$А.*

Різниця a – b не залежить від вибору множин, але таких, що n(А) = а, n (В) = b і В$\subset$А.

Наприклад:

1) А = {a, b, c, d}, В = {c, d}, тобто В$\subset$А, n (А) = 4, n (В) = 2 $\Rightarrow$ А\В = {a, b}, n (А\В) = 2 $\Rightarrow$ 4 – 2 = 2.

2) А = {Δ, Δ, Δ, О}, В = {О}, тобто В$\subset$А, n (А) = 5, n (В) = 1 $\Rightarrow$
А\В = { Δ, Δ, Δ }, n (А\В) = 4 $\Rightarrow$ 5 – 1 = 4.

Дія, за допомогою якої знаходять різницю, називається ***відніманням.*** Компоненти дії віднімання – ***зменшуване (а) і від'ємник (b).***

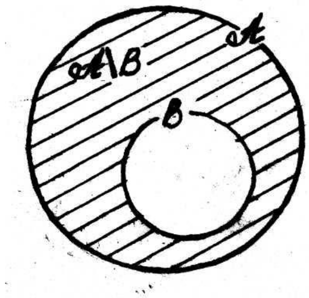
У початковому курсі математики ознайомлення з дією віднімання відбувається на основі практичних вправ, які пов'язані з вилученням підмножини елементів даної множини і утворенням нової множини, що є доповненням даної підмножини (без використання відповідної символіки та термінології). Основним засобом розкриття теоретико-множинного смислу віднімання є розв'язування простих текстових задач.

Означення різниці через суму. Зв'язок дії віднімання з дією додавання.

Існує тісний зв'язок між додаванням і відніманням, тому правильність віднімання перевіряють додаванням.

Нехай дано цілі невід'ємні числа a і b такі, що $a = n$ (А), $b = n$ (В), В$\subset$А і n (А\В) = $a - b$. За допомогою кругів Ейлера множини А, В і А\В зображуються так:

так як А = В$\cup$(А\В), то n (А) = n (В$\cup$(А\В)). Так як В$\cap$(А\В) = $\varnothing$, то n (А) = n (В$\cup$(А\В)) = n (В) + n (А\В) = b + (a – b) = a $\Rightarrow$ різниця a – b – це таке число, яке в сумі з b дає число a. Тому маємо друге означення різниці:



різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке ціле невід'ємне число c, яке в сумі з числом *в* дає число a, тобто $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

Дія віднімання є оберненою до дії додавання. Дії додавання і віднімання є діями І ступеня. Друге означення різниці встановлює зв'язок між цими діями і є основою правила знаходження невідомого доданка за відомою сумою і другим доданком.

Умови існування різниці, її єдиність

Теорема 2 про існування різниці цілих невід'ємних чисел: «різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли $b \le a$».

Доведення.

1) Якщо $a = b$, то $a - b = 0$, тобто різниця $a - b$ існує.

2) Якщо $b < a$, то за означенням відношення «менше» існує таке натуральне число c, що $a = b + c$. Тоді за означенням різниці $c = a - b$, тобто різниця $a–b$ існує.

3) Якщо різниця $a - b$ існує, то за означенням різниці існує таке ціле невід'ємне число c, що $a = b + c$. Якщо $c = 0$, то $a = b$; якщо $c > 0$, то $b < a$ за означенням відношення «менше». Отже, $b \le a$.

Теорема 3 про єдиність різниці цілих невід'ємних чисел: «якщо різниця цілих невід'ємних чисел існує, то вона єдина».

Доведення. Нехай існують два значення різниці $a - b$: $a - b = c_1$ та $a - b = c_2$. Тоді за означенням різниці маємо $a = b + c_1$ та $a = b + c_2$. Звідси маємо в + c_1 = $b + c_2$, тому $c_1 = c_2$.

Множення цілих невід'ємних чисел та його властивості

1. Визначення добутку двох цілих невід'ємних чисел як числа елементів декартового добутку двох скінченних множин.

До означення добутку цілих невід'ємних чисел можна підійти через поняття декартового добутку множин. Нехай $A = \{a, b\}, B = \{x, y, z\}$. Тоді $A \times B$ складається з пар: (a, x), (a, y), (a, z),
(b, x), (b, y), (b, z).

$n(A)=2, n(B)=3$, $n(A\times B)=6$, тоді $2\cdot 3=6$. Отже, у випадку скінченних множин A і B маємо: $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$.

Означення. Добутком цілих невід'ємних чисел *a і b називається число елементів декартового добутку множини, що має а елементів, на множину, що має b елементів.*

2. Визначення добутку цілих невід'ємних чисел через суму. Операція множення цілих невід'ємних чисел.

Розглянемо інший підхід до означення добутку цілих невід'ємних чисел, в основі якого лежить поняття суми.

Означення. Добутком цілих невід'ємних чисел *a і b називається таке ціле невід'ємне число $a\cdot b$, яке задовольняє такі вимоги:*

1) $a\cdot b=\underbrace{a+a+a+...+a}_{b доданків}$, якщо $b>1$;
2) $a\cdot b=a$, якщо $b=1$;
3) $a\cdot b=0$, якщо $b=0$.

Закони множення: комутативний, асоціативний, дистрибутивний

Комутативний, або переставний закон множення

Добуток двох цілих невід'ємних чисел a і b не зміниться, якщо поміняти їх місцями, тобто $a\cdot b=b\cdot a$.

Доведення.

Нехай $a=n(A)$, $b=n(B)$. За означенням добутку $a\cdot b=n(A\times B)$, $b\cdot a=n(B\times A)$. Між парами виду $(a;b)\in A\times B$ і парами виду $(b;a)\in B\times A$ існує взаємно однозначна відповідність, тобто $n(A\times B)=n(B\times A)$. Отже, $a\cdot b=b\cdot a$.

Асоціативний, або сполучний закон множення.

Добуток трьох цілих невід'ємних чисел не зміниться, якщо будь-які два послідовні множники замінити їхнім добутком, тобто $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Доведення.

Нехай $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$.

За означенням добутку $(a\cdot b)\cdot c=n((A\times B)\times C)$, $a\cdot(b\cdot c)=n(A\times(B\times C))$. Між елементами $((a,b),c)\in(A\times B)\times C$ і $(a,(b,c))\in A\times(B\times C)$ має місце взаємно однозначна відповідність, тобто $n((A\times B)\times C)=n(A\times(B\times C))$. Отже, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

Дистрибутивний, або розподільний закон множення

Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a,b,c виконується рівність $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, тобто, щоб помножити суму на число, досить помножити на це число кожен доданок і результати додати.

Доведення.

Використовуємо рівність для множин: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$, де $A\cap B=\varnothing$.

Нехай $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$.

За означенням добутку $(a+b)\cdot c=n((A\cup B)\times C)$, $n((A\cup B)\times C)=n((A\times C)\cup(B\times C))=n(A\times C)+n(B\times C)=a\cdot c+b\cdot c$. Отже, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

З рівності $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$ випливає дистрибутивний закон множення відносно різниці: $a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c$.

Означення. *Нехай $a=n(A)$ і множина А розбита на еквівалентні множини без спільних елементів. Тоді, якщо b – число підмножин у розбитті множини А, то часткою чисел а і b називається число елементів кожної підмножини; якщо b – число елементів кожної підмножини в розбитті множини А, то часткою чисел а і b називається* ***число підмножин у цьому розбитті****.*

Дія, за допомогою якої знаходиться частка $a:b$, називається діленням. Числа при діленні називаються: *a* – ділене, *b* – дільник.

Зв'язок ділення з множенням

Перша задача зводиться до знаходження в однакових доданків, сума яких дорівнює *a*:

$$\underbrace{x+x+...+x}_{b\,доданків}=a, \text{ або } x\cdot b=a$$

Друга задача зводиться до знаходження числа доданків, кожен з яких дорівнює *b* і сума яких *a*:

$$\underbrace{b+b+...+b}_{x\,доданків}=a, \text{ або } b\cdot x=a$$

Як бачимо, в обох випадках задача зводиться до знаходження невідомого множника за відомим добутком і другим множником. Отже, ділення є дія, обернена до множення. Внаслідок її виконання знаходять частку чисел *a* і *b*.

Означення. *Розділити ціле невід'ємне число а на натуральне число b означає знайти таке число с, що* $a=c\cdot b$.

З цього означення випливає, що ділене дорівнює частці, помноженій на дільник: $(a:b)\cdot b=a$. З означення частки та дії ділення випливає рівність $(a\cdot b):b=a$.

Існування частки, її єдиність

Чи завжди існує частка натуральних чисел *a* і *b*? Відповідь на це запитання дає наступна теорема:

Теорема 4. Для того, щоб існувала частка двох натуральних чисел *a* і *b,* необхідно, щоб $b\le a$.

Доведення. Нехай частка натуральних чисел *a* і *b* існує, тобто існує таке натуральне число *c*, що $a=c\cdot b$. Для будь-якого натурального числа *c* правильне твердження $1 \le c$. Помножимо обидві частини цієї нерівності на натуральне число b, отримаємо $b \le c \cdot b$. Оскільки $c \cdot b = a$, то $b \le a$. Теорему доведено.

Чому дорівнює частка $a = 0$ і натурального числа b? За означенням це таке число a, яке задовольняє умові $c \cdot b = 0$. Так як $b \ne 0$, то рівність $c \cdot b = 0$ виконується, якщо $c = 0$. Отже, $0 : b = 0$, якщо $b \in N$.

Теорема 5. Якщо частка натуральних чисел існує, то вона єдина.

Доведення (методом від супротивного). Припустимо, що існують дві частки c і c_1, тобто $a : b = c$ і $a : b = c_1$. Нехай, наприклад, $c > c_1$. Проте це суперечить властивості монотонності дії множення натуральних чисел. Отже, наше припущення, що існують два різних числа c і c_1, які є частками від ділення a на b, неправильне. Теорему доведено.

Із означення $a \cdot 1 = a$ випливає, що:

а) частка від ділення натурального числа a на 1 дорівнює числу a, тобто $a : 1 = a$;

б) частка від ділення натурального числа a самого на себе дорівнює 1, тобто $a : a = 1$.

Правила ділення

На основі означення дії ділення та законів множення натуральних чисел неважко встановити правила ділення суми, різниці, добутку й частки на число та ділення числа на добуток і на частку.

1. Правило ділення суми на число

Щоб поділити суму на число, досить поділити на це число кожний доданок і добуті результати додати: $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Доведення. Якщо рівність правильна, то за означенням дії ділення має бути:

$a + b = (a : c + b : c) \cdot c =$ (за розподільним законом множення);

$= (a : c) \cdot c + (b : c) \cdot c = a + b$ (за властивістю ділення як дії, оберненої множенню).

Це правило можна поширити на будь-яке число доданків:

$(a_1 + a_2 + ... + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + ... + a_n : b$.

Правило ділення суми на число дуже важливе: воно є теоретичною основою алгоритму ділення багатоцифрових чисел.

У початкових класах його розкривають на конкретних задачах.

Задача. В одному сувої 12 м тканини, а в другому 15 м. з цієї тканини пошили плаття, витрачаючи на кожне по 3 м. Скільки платтів пошили?

Розв'язують задачу двома способами, дістаючи при цьому різні, але еквівалентні між собою числові формули розв'язку:

1-й спосіб	2-й спосіб
$(12 + 15) : 3$	$12 : 3 + 15 : 3$

Висновок. $(12 + 15) : 3 = 12 : 3 + 15 : 3$.

2. Правило ділення різниці на число

Щоб поділити різницю на число, досить поділити на це число зменшуване і від'ємник і від першого результату відняти другий: $(a-b):c=a:c-b:c$.

Пропонуємо довести це правило самостійно.

3. Правило ділення добутку на число

Щоб поділити добуток на число, досить поділити на це число один із множників і результат помножити на другий множник: $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b=(b:c)\cdot a$.

Доведемо, наприклад, що $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$. Якщо ця рівність правильна, то за означенням ділення $a\cdot b=((a:c)\cdot b)\cdot c=((a:c)\cdot c)\cdot b=a\cdot b$.

4. Правило ділення числа на добуток

Щоб поділити деяке число на добуток, досить поділити це число на один із множників і знайдену частку поділити на другий множник: $a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$.

На цьому правилі ґрунтується послідовне ділення при усних обчисленнях: $126:18=126:(2\cdot 9)=(126:2):9=63:9=7$.

5. Правило ділення частки на число

Щоб поділити частку на число, досить поділити на це число ділене, а знайдений результат поділити на дільник або помножити дільник на це число, а потім ділене поділити на одержаний добуток.

Наприклад: 1. $(180:5):18=(180:18):5=10:5=2$.

2. $(180:5):4=180:(5\cdot 4)=180:20=9$.

6. Правило ділення числа на частку

Щоб поділити деяке число a на частку від ділення двох чисел, досить поділити це число на ділене і результат помножити на дільник: $a:(b:c)=(a:b)\cdot c$.

Доведення. За означенням ділення:

$$a=((a:b)\cdot c)\cdot(b:c)=(a:b)((b:c)\cdot c)=(a:b)\cdot b=a.$$

Ділення цілого невід'ємного числа на натуральне з остачею

Як відомо, деяке ціле число a може бути чи не бути кратним натуральному числу b. Якщо a кратне b, то $a=bq$. Якщо a не кратне b, то це означає, що при діленні a на b з'являється відмінна від нуля і менша від дільника остача, тобто $a=bq+r$, де $0<r<b$.

Наприклад: $15:4$. Маємо $15:4=3$ (остача 3), або $15=3\cdot 4+3$.

Означення. Говорять, що ціле невід'ємне число a ділиться на натуральне число b з остачею, якщо існують такі цілі невід'ємні числа q і r, що $a=bq+r$, де $0<r<b$.

Існування та єдиність неповної частки (q) і (r) встановлюється такою теоремою.

Теорема 6. Для будь-яких цілого і невід'ємного числа a і натурального числа b існує і причому єдина пара цілих невід'ємних чисел q і r, що $a = bq + r$, де $0 \le r \le b$.

Доведення.

1. Якщо a кратне b, то $a = bq$, а $r = 0$.
2. Якщо $a < b$, то $a = b \cdot 0 + a$, де $q = 0{,}0 < r < b$, бо $r = a$.
3. Якщо $a > b$ і a не кратне b. Тоді серед чисел, кратних b, знайдуться два послідовні числа такі, що $bq < a < b(q+1)$, або $bq < a < bq + b$. Віднявши від усіх трьох частин подвійної нерівності добуток bq, дістанемо: $0 < a - bq < b$. Позначимо $r = a - bq$. Тоді $a = bq + r$, де $0 < r < b$.

Доведемо, що пара чисел q і r єдина для даних чисел a і b. Справді, існує ще пара чисел q_1, r_1 таких, що $a = bq_1 + r_1$, де $0 < r_1 < b$. Тоді за транзитивною властивістю рівності маємо $bq + r = bq_1 + r_1$. Нехай для визначеності $r_1 \ge r$. Тоді $b(q - q_1) = r_1 - r$. З того, що $0 \le r_1 - r < b$ і $(r_1 - r) \vdots b$ випливає $r_1 - r = 0$. Отже, $r_1 = r$ і тому $b(q - q_1) = 0$, де $b \in N$. Тому $q - q_1 = 0$, звідки $q = q_1$.

Теорему доведено.

Теорему про ділення з остачею застосовують в арифметиці і в багатьох інших розділах математики. На ній ґрунтується подання натуральних чисел системними числами, перехід від однієї позиційної системи числення до іншої, алгоритм Евкліда, а також техніка ділення натуральних чисел «кутом».

Ділення з остачею розглядається ще в початкових класах. ***Наприклад,*** $21 : 4 = 5$ (1 остача). Тоді $21 = 5 \cdot 4 + 1(1 < 4)$.

Підкреслюється, що обов'язково остача повинна бути меншою від дільника.

Важливість ділення з остачею в тому, що воно лежить в основі алгоритму ділення багатоцифрових чисел.

Практичне заняття №6
Тема: Цілі невід'ємні числа та операції над ними. Основні властивості

План заняття

1. Аналіз самостійної роботи №1.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Аналіз самостійної роботи № 1.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**

1) Які числа називають натуральними?
2) Із яких потреб виникли натуральні числа?
3) Скільки періодів можна виділити у становленні поняття про натуральне число?
4) Чому відношення рівнопотужності на множині множин є відношенням еквівалентності?
5) На які класи розбивається множина множин за відношенням рівнопотужності? Як їх називають?
6) Що характерно для множин, які входять у один клас рівнопотужних множин?
7) Що можна сказати про кількість елементів у кожній із множин одного такого класу?
8) Який теоретико-множинний зміст кількісного натурального числа? Якій множині відповідає число 0?
9) Сформулюйте означення суми цілих невід'ємних чисел. Які закони додавання вам відомі?
10) Сформулюйте означення різниці цілих невід'ємних чисел із теоретико - множинних позицій.
11) Сформулюйте означення різниці цілих невід'ємних чисел через зв'язок між відніманням і додаванням.
12) Сформулюйте умову існування різниці цілих невід'ємних чисел.
13) Сформулюйте теорему про єдиність різниці цілих невід'ємних чисел. У чому суть її доведення?
14) Сформулюйте означення добутку цілих невід'ємних чисел через суму. Яка операція над множинами лежить у основі дії множення?
15) Сформулюйте означення добутку цілих невід'ємних чисел через декартів добуток множин.
16) Які закони множення вам відомі?
17) Сформулюйте означення частки двох чисел.
18) Сформулюйте теорему про єдиність частки.
19) Сформулюйте означення ділення цілого невід'ємного числа на натуральне з остачею.
20) Сформулюйте правила ділення.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Обчислити значення виразу: 2746 + 7254 + 9876.

2. Знайти, скільки елементів містить множина розв'язків рівняння:

$$5-\frac{45}{4x^2-1}=\frac{3x}{2x-1}-\frac{39}{2x+1.}$$

3. Знайти правильну рівність:

1) 199 + 57 = 200 – 1 – 59;

2) 199 + 57 = 199 – 50 – 7;

3)199 + 57 =200 – 1 + 57.

4. Обчислити раціональним способом значення виразу :

$(420 - 394) \times 405 + 25 \times 405 \times 300$.

5. Замість зірочки (*) поставте знак =, < або > , що отримати істинне висловлення:

а) 4968 + 7369 * 4968 + 7370;

б) 2819 + 6785 * 2820 + 6734;

в) 71598 + 39 * 71600 + 36.

6. Виконати дії раціональним способом, пояснити застосовані властивості:

а) $17527 - (2080 + 4527)$,

б) $(527 + 658) + (342 + 173)$,

в) $(5762 + 416) + 1238$,

г) $(6902+899) - 349$.

7. Запишіть суму у вигляді добутку:

а) $5607 + 5607 + 5607 + 5607 + 5607$;

б) $(34 + 78) + (34 + 78) + (34 + 78) + (34 + 78)$;

в) $x + x + x + x + x + x + x + x + x + x$;

г) $(y + 7) + (y + 7) + (y + 7) + (y + 7) + (y + 7) + (y + 7)$.

8. Запишіть у вигляді суми:

а) 384×9; в) 0×8; д) $(a + 7) \times 4$; ж) 5^2;

б) 1×10; г) $a \times 5$; е) $(c + b) \times 7$; з) a^2.

9. Обчисліть раціональним способом, використовуючи комутативний закон множення:

а) $5 \times 3764 \times 2$; в) $8 \times 5379 \times 125$;

б) $4 \times 6978 \times 25$; г) $4 \times 375 \times 250$.

10. Не виконуючи обчислень, записати результати дій:

a) (1087 – 678)+678;

b) (3906=468 – 468.

11. Пояснити на основі залежності між дією додавання і дією віднімання, як розв’язуються у початкових класах рівняння:

$7+x=12$; $x-5=7$; $12-x=5$.

12. Записати за допомогою кванторів висловлення:

a) *«Для будь-якого цілого невід’ємного числа х знайдеться таке ціле невідємне число а. що х – а=х».*

b) *Яке б не було ціле невід’ємне число х, знайдеться таке ціле невідємне число у, що х – у=0».*

Чи істинні ці висловлення?

13. $315 \div 5 = 315 \div (10 \div 2) = (315 \times 2) \div 10 = 630 \div 10 = 63$. Скласти за таким зразком приклад на ділення числи на 25.

14. На основі залежності між компонентами і результатами операцій розв’язати рівняння:

1) $(x \div 2) \times 11 = 209$;

2) $728 \div (7 \times x) = 13$;

3) $28x \div 14 = 12$.

4) $411 - ((630000 - 105 \times (6250 \div x - 26) \times 180) \div 3150 = 355$.

15. Користуючись методом математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа n мають місце рівності:

1) $1 + 3 + 5 + ... + (2 n – 1) = n2$;

2) $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + ... + n (3n + 1) = n (n+ 1)2$.

16. Знайти x, використовуючи залежність між компонентами і результатами дій. Виконати перевірку одержаної відповіді:

$$100 – ((90000 – (\frac{112500}{x} – 468) \times 150) \div 450) = 44$$

17. При діленні цілого невідємного числа a на натуральне число $в$ дістаємо неповну частку q і невідємну остачу r. Знайти:

q і r, якщо $a = 112, b = 36$.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Опрацювати самостійно питання та скласти конспект з теми: «Натуральне число як результат вимірювання величин. Порівняння відрізків. Натуральне число як міра відрізків. Дії над відрізками та числами-результати вимірювання величин».

2. Розв'язати вправи:

№1 Розв'язати рівняння:

a) $8 – 40 : (((25 \times x + 4) – 19) : 3) = 6$.

b) $280+(48 – x)=328$.

№2 Виконати обчислення найзручнішим способом: 198+237+102.

№3 Знайдіть суму всіх натуральних чисел від 1 до 99.

№4 Обчислити: 99×17+99×83; 198×9; 8×198×25.

№5 Обчисліть раціональним способом:

$(7216 – 5632) \div 8$, $(42 \times 12) \div 7$, $(16 + 64) \div 10$, $(456 \div 2) \div 3$.

№6 При діленні цілого невідємного числа a на натуральне число $в$ дістаємо неповну частку q і невідємну остачу r. Знайти:

a) b і q, якщо $a = 100, r = 6$.

b) b і r, якщо $a = 351, q = 14$.

№7 Знайти натуральні числа, які при діленні на 3 дають в остачі а) 0, б) 1, в) 2.

№8 Довести, що з трьох послідовниз натуральних чисел одне і тільки одне з них ділиться на 3.

№9 Не виконуючи множення, порівняти числа:

3×39+8×39 і 39×11,

2×39+8×39 і 11×39,

2×39+8×39 і 9×39.

№10 Обчислити найбільш раціональним способом. Застосовуючи правила ділення числа на добуток або на частку:

$714 \div 21$; $515 \div (5 \div 8)$.

№11 Прия якому с буде істинним твердження: $c \div (245 - 87) \times 341 = 0$.

Системи числення

Перша *позиційна* система числення виникла понад 2000 років до н.е. в стародавньому Вавилоні. Це була шістдесяткова позиційна нумерація. Проте принцип позиційного значення цифр тут ще не використовувався скрізь. Для запису чисел використовували положення клину : ▼- 1 і 60, ◄ - 10. Інші числа зображувались за допомогою цих знаків і дій додавання.

Сучасна позиційна система числення була винайдена в Індії у V-VI ст. Через арабів вона поширилася в IX ст. в Середню Азію, а пізніше – і в Західну Європу. Великим досягненням індійської математики було введення нуля для позначення відсутності одиниць розряду в числі. Після цього десяткова система числення стала повністю оформленою. Запровадження десяткової системи числення на Русі було зупинено монгольським ігом. Тільки у XVIII ст. індійська система числення витіснила слов’янську нумерацію.

У сучасному житті використовують також інші системи числення. В астрономії з давніх-давен застосовується шістдесяткова система числення. Основою цієї системи є число 60. Так, 60 сек = 1 мінута, або $60'' = 1'$, $60' = 1^\circ$ тощо.

Взагалі, основою числення може бути будь-яке натуральне число $p \geq 2$. Для запису числа в такій системі числення використовується p символів: 0,1, ..., p-1.

Означення. Записом цілого невід’ємного числа x у p-й системі числення називається його подання у вигляді $x = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0$, де $a_n, \ldots, a_1, a_0$ набувають значення 0, 1, ..., p-1, $a_n \neq 0$.

Числа 1, p, p^2, … , p^n називають розрядними одиницями 1-го, 2-го, ... , (n+1)-го розрядів.

Десяткова система числення

Означення. Нумерацією *або* ***системою числення*** *називається сукупність правил і знаків або слів, за допомогою яких можна записати письмово або назвати усно будь-яке натуральне число.*

У десятковій системі числення для запису будь-якого числа використовують десять цифр: 0, 1, 2, ... , 9. За основу лічби взято число десять. Будь-яка скінчена послідовність цифр означає деяке число, причому значення цифри залежить від того, яку позицію (місце) вона займає в запису числа; в запису числа кожна цифра означає відповідну кількість розрядних одиниць. Перші десять одиниць називаються *одиницями першого розряду*, десять одиниць першого розряду становлять одну одиницю другого розряду – десяток; десять одиниць другого розряду – сотню, десять сотень – одну одиницю четвертого розряду – тисячу і т. д. Кожні три послідовні розряди, починаючи з першого, утворюють *клас.* Три розряди класу називаються *одиницями, десятками* і *сотнями* цього класу. За допомогою усної десяткової нумерації називають будь-яке натуральне число. Виходячи з позиційного принципу десяткової нумерації, кожне натуральне число можна подати у вигляді суми добутків чисел, які зображуються цифрами, на відповідні степені числа 10.

Наприклад, $2017 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$.

Алгоритм додавання цілих невід'ємних чисел у десятковій системі числення

При додаванні багатоцифрових чисел використовують правило додавання одноцифрових чисел. Такі числа подають (або уявляють) у вигляді сум степенів числа 10 з коефіцієнтами, якими є цифри даних чисел. ***Наприклад:*** $1917 + 1991 = (1\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 1\cdot10 + 7) + (1\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 9\cdot10 + 1)$. Згрупуємо коефіцієнти відносно однакових степенів числа 10 і додамо їх, згідно з таблицею додавання одноцифрових чисел. Якщо сума коефіцієнтів менша за 10, то записують її в тому ж розряді; якщо сума більше від 10, то число її одиниць записують в тому ж розряді, а число десятків додають до вищого розряду.

Так, $1917 + 1991 = (1+1)\cdot10^3 + (9 + 9)\cdot10^2 + (1 + 9)\cdot 10 + (7 +1) = 3908$. Для того щоб відповідні одиниці розрядів відразу згрупувати, треба числа записати стовпцем і виконати додавання цифр відповідних розрядів:

$$\begin{array}{r} {}_{+}1\,9\,1\,7 \\ \underline{1\,9\,9\,1} \\ 3\,9\,0\,8 \end{array}$$

У загальному вигляді алгоритм додавання багатоцифрових чисел такий:

1) другий доданок записують під першим так, щоб відповідні розряди знаходились один під одним;

2) додають цифри розряду одиниць; якщо сума менша 10, її записують у розряд одиниць результату і переходять до додавання цифр наступного розряду;

3) якщо сума цифр одиниць більша або дорівнює 10, то число її одиниць записують у розряд одиниць результату і додають одиницю до цифри десятків першого доданку, після чого переходять до додавання в розряді десятків;

4) аналогічні дії повторюють відносно десятків чисел, потім сотень і т.д.

Віднімання цілих невід'ємних чисел у десятковій системі числення

Віднімання числа b від числа a, які є в таблиці додавання, зводиться до знаходження такого числа c, щоб $a = b + c$. Віднімання інших чисел виконують стовпчиком, застосовуючи таблицю додавання одноцифрових чисел. Теоретичні основи цього алгоритму такі. Нехай від числа 453 треба відняти 231. Запишемо ці числа у вигляді степенів 10 і використаємо закони арифметичних операцій, а також таблицю додавання одноцифрових чисел. Тоді $453 - 231 = (4 - 2)\cdot 10^2 + (5 - 3)\cdot 10 + (3 - 1) = 222$.

Як бачимо, віднімання таких чисел зводиться до віднімання одноцифрових чисел у відповідних розрядах за допомогою таблиці додавання. Якщо в деякому розряді зменшуваного одноцифрове число менше від числа в тому ж розряді від'ємника, то до цього числа додають 10, зменшивши на одну одиницю цифру вищого розряду. Після чого віднімають число відповідного розряду від'ємника.

***Наприклад*:** нехай від 451 треба відняти число 243.

Маємо $451 - 243 = (4 - 2)\cdot 10^2 + (5 - 4)\cdot 10 + (1 - 3) = (4 - 2)\cdot 10^2 + (4 - 4)\cdot 10 + (11 - 3) = 208$.

Для виконання віднімання стовпчиком підписують під зменшувальним від'ємник так, щоб відповідні розряди знаходились один під одним, і виконують віднімання, згідно з розглянутими випадками:

$$\begin{array}{r} \_453 \\ \underline{231} \\ 222 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \_451 \\ \underline{243} \\ 208 \end{array}$$

Таким чином, віднімання чисел зводиться до порозрядного віднімання одиниць, десятків, сотень і т.д., якщо цифри зменшувального більші за відповідні цифри від'ємника. Якщо в якомусь розряді зменшувального цифра менша від цифри відповідного розряду від'ємника, то беруть одиницю наступного вищого розряду, роздроблюють її в одиниці даного розряду, додають ці одиниці до одиниць даного розряду і віднімають відповідні одиниці розряду від'ємника.

Множення і ділення багатоцифрових чисел в десятковій системі числення багатоцифрових чисел

Для виконання множення одноцифрових чисел складають таблицю множення (як суми однакових доданків) і запам'ятовують її. Множення багатоцифрових чисел на одноцифрове зводиться до використання таблиці множення, розподільного закону множення відносно додавання і правил додавання чисел.

Наприклад:

$$453\times4 = (4\times10^2 + 5\times10 + 3) \times 4 = (4\times10^2)\times4 + (5\times10)\times4 + 3\times4.$$

Користуючись переставним і сполучним законами множення, дістаємо:

$$(4\times4) \cdot 10^2 + (5\times4) \cdot 10 + (3\times4) = 16\times10^2 + 20\times10 + 12 = 1812.$$

Як бачимо, множення багатоцифрового числа на одноцифрове зводиться до множення одноцифрових чисел і додавання, взагалі кажучи, багатоцифрових чисел. Множення числа на степінь 10^k зводиться до приписування до множеного k нулів. Множення числа на багатоцифрове число зводиться до використання правила множення на одноцифрове число і степені числа 10. Для цього множник подають у вигляді суми степенів числа 10 з коефіцієнтами, що є цифрами числа. Наприклад,

$$453\times132 = 453\times (1\times10^2 + 3\times10 + 2) = (453\times1) \times10^2 + (453\times3) \times10 + (453\times2).$$

Результат множення можна дістати, якщо подати множення у такій формі:

$$\begin{array}{r} 453 \\ {}^{\times}\ \underline{132} \\ 906 \\ +1359 \\ \underline{453} \\ 59796 \end{array}$$

Алгоритм множення числа $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ на число $y = b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0$ такий:

1. Записати множник y під множником x .
2. Помножити число x на число одиниць b_0 числа у і записати добуток $x \cdot b_0$ під відповідними розрядами числа у.
3. Помножити число x на число десятків числа y і записати добуток $x \cdot b_1$, зміщуючи запис на один розряд вліво.
4. Цей процес множення продовжити до обчислення $x \cdot b_m$.
5. Знайдені добутки додати.

Ділення чисел – операція, обернена до операції множення. Вона полягає у знаходженні за відомим добутком двох множників і одним із множників другого (невідомого) множника. Тому при діленні одноцифрових і двоцифрових чисел на одноцифрове використовується таблиця множення одноцифрових чисел.

Загальний алгоритм ділення цілого невід'ємного числа *a* на натуральне число *b* такий:

1. Якщо $a = b$, то частка $q = 1$, остача $r = 0$.
2. Якщо $a > b$ і число розрядів у чисел a і b однакове, то, помножаючи b послідовно на числа 1, 2, ... ,9, знаходять частку q від ділення числа a на число b і остачу $r = a - bq$.
3. Якщо $a > b$ і число розрядів у числі a більше, ніж у числі b, то частку і остачу шукають так.

У числі a зліва відокремлюють стільки розрядів, скільки їх має число b чи на один розряд більше, а число c_1, ними утворене, дорівнювало б чи було б більше від числа b; далі підбирають серед чисел 1, 2, ... , 9 такий множник q_1, що $bq_1 \le c_1$, число bq_1 підписують під числом c_1 і віднімають.

Дістають $r_1 = c_1 - bq_1$. Це число записують під числом bq_1; потім справа до r_1 приписують цифри першого з невикористаних розрядів діленого a і порівнюють здобуте число з числом b; якщо воно не менше b, то повторюють вище розглянутий процес, якщо ж воно менше b, то приписують до нього ще стільки розрядів, щоб воно було не менше числа b, і знову застосовують розглянутий вище процес.

Недесяткові позиційні системи числення: запис, читання і порівняння чисел в них

У практичній діяльності люди користувалися різними системами числення, особливо позиційними, бо, як уже зазначалося, вони дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. Поділ року на 12 місяців, години на 60 хв. підтверджують існування позиційних систем числення з різними основами. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Для запису чисел у різних позиційних системах числення користуються цифрами десяткової системи числення. Наприклад, цифрами системи числення з основою $g = 2$ є 0 і 1, а при $g = 5$ – 0, 1, 2, 3 і 4. Якщо ж основа системи числення $g > 10$, то її цифри, як багатоцифрові числа десяткової системи числення, беруться в дужки. Наприклад, якщо основа системи числення $g = 12$, то цифрами її будуть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11).

З розвитком обчислювальної техніки для зображення чисел потрібно було використовувати якнайменше стійких станів, а для цього потрібна система числення з малою кількістю цифр. Такою системою є двійкова система, якою найчастіше користуються при роботі на сучасних ЕОМ.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою $g \geq 2$ називається подання його у вигляді

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g$.

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, \ldots g^{n-1}, g^n$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки $a_0, a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, \ldots, a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^n$ – *розрядними доданками*.

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду, і основу системи числення. Наприклад, число 25064_8 читається: «два п’ять нуль шість чотири у системі числення з основою вісім».

Запис числа у позиційній системі числення з основою g показує скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

Порівняння чисел, записаних у системі числення з основою p, виконується так само, як і в десятковій системі числення: порівнюються цифри, починаючи зі старших розрядів.

Дії над числами в не десяткових системах числення виконуються за тими ж правилами, що і в десятковій системі числення. Перш за все, для додавання і множення одноцифрових чисел складаються відповідні таблиці. Вони використовуються як при відніманні й діленні одноцифрових чисел, так і при діях з багатоцифровими числами.

Таблиця додавання з $p = 5$

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Таблиця множення з $p = 5$

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Виконаємо додавання і віднімання чисел, записаних у п’ятірковій системі числення:

$$\begin{array}{r} +\;3421_{(5)} \\ \underline{342_{(5)}} \\ 4313_{(5)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} -\;3421_{(5)} \\ \underline{342_{(5)}} \\ 3024_{(5)} \end{array}$$

Виконаємо множення і ділення чисел п’ятіркової системи числення:

$$\begin{array}{r} \times 4203_{(5)} \\ \underline{24_{(5)}} \\ 32322_{(5)} \\ \underline{13411_{(5)}} \\ 221432_{(5)} \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{l|l} -\,221432_{(5)} & \underline{28_{(5)}} \\ \;\;\underline{211} & 4203_{(5)} \\ \;-104 & \\ \;\;\;\underline{103} & \\ \;\;\;\;-132 & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{132} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Здійснити перехід від запису числа у десятковій системі числення до запису у не десятковій системі можна за допомогою послідовного ділення. Розглянемо це на конкретному ***прикладі***:

$869 = x_{(4)}$

$$\begin{array}{lllllllll} 869 & | \; \underline{4} & & & & & & & \\ \underline{868} & | \; 217 & | \; \underline{4} & & & & & & \\ \;1 & \;\;\underline{216} & | \; 54 & | \; \underline{4} & & & & & \\ \text{I р.} & \;\;\;1 & \;\;\underline{52} & | \; 13 & | \; \underline{4} & & & & \\ & \text{II р.} & \;\;2 & \;\;\underline{12} & \;\;3 & & & & \\ & & \text{III р.} & \;\;1 & \text{V р.} & & & & \\ & & & \text{IV р.} & & & & & \end{array}$$

Отже, $869 = 31211_{(4)}$

Розглянемо обернену задачу до попередньої: $31211_{(4)} = x_{(10)}$

$31211_{(4)} = 3 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot 256 + 1 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1 = 768 + 64 +$
$+ 32 + 4 + 1 = 869.$

Перехід від запису чисел в одній позиційній системі до запису в іншій

Одне й те ж саме число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Метод ділення виконується за такою схемою:

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього

розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується поки не одержиться частка, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$, бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Задача 1. Число 2564_7 записати у системі числення з основою 6.

► Оскільки $7 > 6$, то скористаємося методом ділення. Послідовно ділимо число 2564_7 і частки, які отримуються, на число 6. Дістанемо

```
 _2564 7| 6
  24     |------
  --     |_321  | 6
  _16    | 24   |------
   15    | --   |_36  | 6
   --    | _51  | 33  |---
   _14   |  51  | --  | 4
     6   |  --  |  3
    --   |   0
     5
```

Відповідь: $2564_7 = 4305_6$. ◄

Теоретичною основою *способу множення* є таке представлення числа a, записаного у позиційній системі числення з основою g:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= ((\ldots(a_n \cdot g + a_{n-1}) \cdot g + a_{n-2}) \cdot g + \ldots + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0.$$

Якщо виконати усі зазначені тут операції у системі числення з основою h, то одержане число буде також записане у системі числення з основою h.

Суть методу множення можна викласти так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у ній як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо до тих пір, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа, і на цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

Задача 2. Число 530142_8 записати у десятковій системі числення.

► Переходимо до десяткової системи числення, а тому скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення.

$$
\begin{array}{l}
5\cdot 8+3=43 \\
\quad \underline{\times\ 8} \\
\quad 344+0=344 \\
\qquad \underline{\times\quad 8} \\
\qquad 2572+1=2753 \\
\qquad\quad \underline{\times\qquad 8} \\
\qquad\quad 22024+4=22028 \\
\qquad\qquad \underline{\times\qquad\ 8} \\
\qquad\qquad 176224+2=176226
\end{array}
$$

Відповідь: $530142_8 = 176226$. ◄

Задача 3. Число 2313_4 записати у системі числення з основою 6.

► Оскільки $4 < 6$, то скористаємося методом множення. Обчислення проводимо у системі числення з основою 6.

$$
\begin{array}{l}
2\cdot 4+3=15 \\
\quad \underline{\times\ 4} \\
\quad 112+1=113 \\
\qquad \underline{\times\quad 4} \\
\qquad 500+3=503_6
\end{array}
$$

Відповідь: $2313_4 = 503_6$. ◄

Порівняння цілих невід’ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюється так само, як і у десятковій системі числення, при цьому тільки потрібно враховувати основу системи числення і пам’ятати, що g одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, і, навпаки, одна одиниця вищого розряду дорівнює g одиницям сусіднього нижчого розряду. Наприклад, число $32405_7 > 32366_7$, бо $3 = 3$, $2 = 2$, а $4 > 3$.

Практичне заняття №7

Тема: Системи числення. Алгоритми та правила виконання арифметичних дій в непозиційних системах числення

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв’язування системи тренувальних вправ.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Що називають системою числення? Яке число називають системним?
   2) Перелічіть стародавні системи числення і назвіть їх відмінності. Якими з цих систем користуються ще й до цього часу?
   3) Назвіть відмінності позиційних і непозиційних систем числення.
   4) Як означаються числа в десятковій системі числення?
   5) Як виділяються розряди числа, записаного в десятковій системі числення?
   6) Вигляд числа у десятковій системі числення (позиційний запис).
   7) Сформулюйте алгоритм додавання багатоцифрових чисел в десятковій системі числення.
   8) Сформулюйте алгоритм віднімання багатоцифрових чисел в десятковій системі числення.
   9) Сформулюйте алгоритм множення багатоцифрових чисел в десятковій системі числення.
   10) Сформулюйте алгоритм ділення багатоцифрових чисел в десятковій системі числення.
   11) Запис натурального числа в недесятковій позиційній системі числення.
   12) Теорема про існування запису будь-якого натурального числа в недесятковій позиційній системі числення.
   13) Сформулюйте алгоритм порівняння чисел на основі їх запису в недесятковій позиційній системі числення.
   14) Сформулюйте алгоритми додавання і віднімання в недесятковій позиційній системі числення.
   15) Сформулюйте алгоритм множення в недесятковій системі числення. Таблиця множення.
   16) Сформулюйте алгоритм ділення в недесятковій системі числення.
   17) Поясніть алгоритм переходу з десяткової системи числення в позиційну систему, відмінну від десяткової. Як виконати перевірку?
   18) Що спільне в алгоритмах виконання арифметичних дій в десятковій системі числення і в системах, відмінних від десяткової?

3. **Розв’язування системи тренувальних вправ.**
   1. Цифра десятків у записі деякого двоцифрового числа втричі більша цифри одиниць. Якщо ці цифри переставити, то вийде число менше за дане на 36. Знайдіть це число.

2. Скільки цифр в записі числа: а) 245; б) 0; в) 1 000 000; г) 343 537? Скільки серед них різних цифр?

3. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 16. Якщо від цього числа відняти число, записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку, то вийде – 18. Знайдіть це число.

4. Розв'яжіть нижченаведені задачі, використовуючи запис числа в десятковій системі числення:

а) Двоцифрове число закінчується цифрою 3. Якщо суму його цифр помножити на 4, то вийде число, записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку. Знайдіть двоцифрове число.

б) У двоцифровому числі десятків у три рази більше, ніж одиниць. Якщо між цифрами цього числа вставити цифру 0, то число збільшиться на 540. Знайдіть це двоцифрове число.

в) У трицифровому числі десятків на один більше, ніж одиниць і сотень на одну більше, ніж десятків. Якщо до цього числа додати число, записане тими ж цифрами, але у зворотному прядку, то вийде 444. Знайдіть це число.

5. Розв'язання нижче наведеної задачі запишіть у вигляді числового виразу, а потім знайдіть його значення:

У місті три бібліотеки. В одній із них 24 650 книг, в другій – на 8 060 більше, ніж в першій, а в третій на 1 700 книг більше, ніж у другій. Скільки книг в трьох бібліотеках?

6. Прочитайте і запишіть в десятковій системі числення наступні числа: III, IV, VIII, IX, XL, L, CM, C, M, XXXIX, CCCXXXVIII.

7. Скільки цифр необхідно для запису чисел:

а) у десятковій системі числення;
б) у двійковій системі числення;
в) у вісімковій системі числення;
г) у системі числення з основою р.

8. Замініть наступні суми коротким записом числа:

a) $2 \times 10 + 7$;
b) $6 \times 102 + 5 \times 10 + 1$;
c) $3 \times 103 + 8 \times 102 + 7$;
d) $9 \times 103 + 8 \times 102 + 7 \times 10 + 5$;
e) $1 \times 104 + 6 \times 102$.

9. Записати число 379 в системі чисел з основою g = 6; 759 – з основою q = 2; 256642 – з основою 5; 7; 11.

10. Перейти від запису числа в одній системі числення до його запису в іншій системі числення і зробити перевірку:

a) $23045 = a_6$;
b) $4367_8 = a_7$;
c) $475_9 = a_3$;
d) $34 = a_2$.

11. Записати числа 511403_7 і 30213_4 в десятковій системі числення.

12. Обчислити суму:

a) $434213_5 + 2343_5$;

b) $3758_9 + 276_9$;

c) $10011_2 + 111001_2 + 1111_2$

13. Знайти різницю : а) $343001_6 - 24213_6$; б) $134602_8 - 26415_8$.

14. Обчислити: $4413_6 - 3234_6 + 40432_6$.

15. Перевести число з десяткової системи числення в іншу:

a) $214_{10} = \ldots_7$,

b) $305_{10} = \ldots_8$.

16. Знайти частку чисел:

a) $1022_3 \div 12_3$;

b) $731_8 \div 13_8$.

17. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами:

a) $x + 431_5 = 3314_5$;

b) $x - 142_7 = 5631_7$.

18. Знайти добуток чисел:

a) $2734_8 \times 653_8$;

b) $43413_5 \times 423_5$.

19. При якому значенні x правильна рівність:

a) $203_x = 53$;

b) $401_x = 197$;

c) $236_x = 12405$.

20. Знайти основу системи числення:

a) $306_x + 124_x = 220$;

b) $752_x - 647_x = 67$.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Вивчити теоретичний матеріал та підготуватися до опитування по темі: «Подільність цілих невід'ємних чисел» (див. матеріали до практичного заняття №8,9).
2. **Розв'язати вправи:**

№1 Вирахуйте раціональним способом значення кожного із нижче наведених виразів і поясніть, які закони додавання були при цьому використані:

a) а) 386 + 287 + 213 + 564;

b) б) 3 057 + 1 561 + 1 513 + 829 + 2 564.

№2 Скільки у числі 132 620:

a) одиниць;

b) одиниць тисяч;

c) десятків;

d) десятків тисяч;

e) сотень;

f) сотень тисяч?

№3 Запишіть число, в якому:

a) а) x десятків і одна одиниця;

b) б) 3 десятки та x одиниць;

c) в) m десятків і t одиниць.

№4 Запишіть числа $7434_8, 2543_6$ у десятковій системі числення.

№5 Обчислити:

a) $745_8 + 427_8 + 653_8 + 1175_8$;

b) $2020021_3 + 10210212_3 + 10221_3 - 1212002_3$.

№6 Знайти значення x:

a) $306_x + 124_x = 220$;

b) $102_x + 212_x = 34$;

c) $752_x - 647_x = 67$;

d) $626_x \div 123_x = 5$.

№7 Розв'язати рівняння і подати результат у десятковій системі числення:

a) $x_6 - 432_6 = 561_6$;

b) $x_4 + 2685_9 = 31654_7$;

c) $5132_{12} - 132_{12} + x_{12} = 39$.

№8 Виконати множення найзручнішим способом:

a) $1002_5 \times 432_5$;

b) 302×7869;

c) $3467_8 \times 502_8$.

№9 Знайти частку чисел: $2134_5 \div 12_5$.

№10 Скласти таблиці додавання та множення одноцифрових чисел у вісімковій системі числення і виконати в цій системі арифметичні операції над довільними числами.

№11 Обчислити результат і подати його у десятковій системі числення:

$2445_6 + 8567_9 - 2434_6 \cdot 37_9$.

Подільність цілих невід'ємних чисел

Відношення подільності на множині натуральних чисел, його властивості

Означення. Говорять, що ціле невід'ємне число a ділиться на натуральне число b, якщо існує таке ціле невід'ємне число q, що $a = bq$.

Говорять «число a кратне числу b». Відношення подільності числа a на число b символічно позначають $a \,\vdots\, b$. Відношення подільності не означає операції, тому не можна писати $a \,\vdots\, b = q$. Наприклад, число $a = 24$ ділиться на число $b = 6$, бо існує таке число $q = 4$, що $24 = 6\times4$.

Чисел, кратних даному числу – нескінченна множина. Наприклад, усі парні числа кратні числу 2. Їх можна знайти за формулою $x = 2\times q$, де q набуває значення 0, 1, 2, 3, ...

Число 1 ділиться тільки само на себе; числа 2, 3, 5, 7, ... діляться самі на себе і на одиницю; числа 4, 6, 8, 9, ... мають більше двох дільників. Ці спостереження привели математиків до введення понять простого і складеного числа.

Означення. *Натуральне число, яке має лише два дільники, називається* ***простим.***

Отже, числа 2, 3, 5, 7 – прості числа.

Означення. *Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається* ***складеним.***

Такими числами є 4, 6, 8, 9. Так число 6 має дільники 1, 2, 3, 6. Оскільки число 1 має тільки один дільник, то його не відносять ні до простих, ні до складених.

Властивості відношення подільності

1. **Рефлексивність.**

Оскільки для будь-якого невід'ємного числа a виконується рівність $a = a \cdot 1$, тобто будь-яке ціле невід'ємне число ділиться само на себе ($a \vdots a$), то відношення подільності на цій множині чисел – рефлексивне.

2. **Антисиметричність.**

Для невід'ємних цілих чисел a і b, для яких виконуються відношення $a \vdots b$ і $b \vdots a$, маємо, що $a=b$, тобто відношення подільності невід'ємних чисел антисиметричне.

$(a \vdots b) \Rightarrow \exists q\ (a = b \cdot q) \wedge (b \vdots a) \Rightarrow \exists q_1\ (b = a \cdot q_1)$, тому
$a = aqq_1$, звідки $qq_1 = 1$. Це може бути тоді і тільки тоді, коли $q = q_1 = 1$.

3. **Транзитивність:** $(a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \rightarrow (a \vdots c)$.

$(a \vdots b) \Rightarrow \exists q\ (a = b \cdot q) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow \exists q_1\ (b = c \cdot q_1)$. Тому $a = b\,q = cqq_1 = cq_2$.

Отже, $a \vdots c$.

Отже, відношення подільності на множині N_0 цілих невід'ємних чисел має властивості рефлективності, антисиметричності і транзитивності, тобто є відношенням нестрогого порядку, причому часткового порядку, бо не кожна пара цілих невід'ємних чисел знаходиться у відношенні подільності. Наприклад, $\overline{4 \vdots 3}$ і $\overline{3 \vdots 4}$.

Теореми про подільність суми, різниці, добутку

Теорема 1 про подільність суми. Якщо кожний доданок ділиться на натуральне число n, то й їхня сума теж ділиться на це число.

Доведення. Нехай $a \vdots n$ і $b \vdots n$. Тоді за означенням подільності $a = n\,q_1$ і $b = n\,q_2$, а тому $a + b = n\,q_1 + n\,q_2 = n\,(q_1 + q_2)$. Отже, $(a + b) \vdots n$. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться теорема для будь-якого числа доданків.

Теорема 2 про подільність різниці. Якщо a і b діляться на n і $a \geq b$, то $a - b$ теж ділиться на n.

Теорема 3 про подільність добутку. Якщо один з множників ділиться на натуральне число n, то й добуток ділиться на це число.

Доведення. Нехай множник a добутку ab ділиться на число n, тобто $a = nq$. Тоді $ab = (nq)b = n\ (qb)$. Отже, $ab \vdots n$. Теорему доведено.
Аналогічно доводиться твердження для більшого числа множників.

Наслідок 1. Якщо в добутку ab множник a ділиться на m, а множник b ділиться на n, то добуток ab ділиться на mn.
Наприклад: 24·36 ділиться на 108, бо 108 = 12·9.

Наслідок 2. Якщо в сумі один доданок не ділиться на число n, а решта доданків ділиться, то вся сума не ділиться на число n. ***Наприклад:*** $(34+125+376) \vdots 2$? Так як число 125 не ділиться на 2, значить вся сума не ділиться на 2.

Ознаки подільності на 2 і 5, 4 і 25, 3 і 9, 6, 10, 12, 15, на складені числа

Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9 чисел, записаних у десятковій системі числення, відомі з математики середньої школи. Обґрунтуємо ці ознаки, спираючись на введене означення відношення подільності та його властивості.

Теорема 4 про подільність на 2 і 5. Для того щоб число ділилося на 2 (на 5), необхідно й достатньо, щоб на 2 (на 5) ділилось число його одиниць.

Доведення. Запишемо число $a = a_n a_{n-1} \dots a_0$ у вигляді суми розрядних одиниць, яку розіб'ємо на два доданки: $a = (a_n 10^n + \dots + a_1 10) + a_0$. Як бачимо, перший доданок ділиться і на 2, і на 5. Отже, щоб сума ділилась на 2 або на 5, необхідно і достатньо, щоб і другий доданок a_0 ділився відповідно на 2 або на 5. Теорему доведено.

Наслідок 3. Для того, щоб число a ділилось на 2, необхідно і достатньо, щоб воно закінчувалось однією з цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Наслідок 4. Для того, щоб число a ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб воно закінчувалось цифрою 0 або 5.

Теорема 5 про подільність на 4 і 25. Для того щоб число ділилось на 4 (на 25), необхідно і достатньо, щоб на 4 (на 25) ділилося число, утворене його двома останніми цифрами.

Доведення. Число $a = a_n a_{n-1} \dots a_0$ запишемо у вигляді суми двох доданків: $a = (a_n 10^n + \dots + a_2 10^2) + (a_1 10 + a_0)$. Перший доданок ділиться як на 4, так і на 25. Отже, число a як сума двох доданків ділиться на 4 (на 25) тоді і тільки тоді, коли на 4 (на 25) ділиться число $a_1 a_0 = a_1 10 + a_0$, утворене двома останніми цифрами числа a. Теорему доведено.

Теорема 6 про подільність на 3 і на 9. Для того щоб число a ділилось на 3 або на 9, необхідно і достатньо, щоб на 3 або на 9 ділилась сума цифр цього числа.

Доведення. Запишемо число a у вигляді: $a = a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0$.
Оскільки $10 = 9 + 1$, $10^2 = 99 + 1$, ... , $10^n = \underbrace{99..9}_{n} + 1$,

то $a_n\ (99..9 + 1) + \dots + a_1\ (9 + 1) + a_0 = (a_n 99..9 + \dots + a_1 9) + (a_n + \dots + a_1 + a_0)$.
Перші доданки суми діляться як на 3, так і на 9. Отже, для того, щоб число a ділилось на 3 або на 9, необхідно і достатньо, щоб сума одноцифрових чисел,

виражених його цифрами (сума цифр) $a_n + \ldots + a_1 + a_0$, ділилась на 3 або на 9. Теорему доведено.

Доведені вище ознаки подільності дають змогу визначити подільність чисел на 2, 3, 4, 5, 9 і 25 . Природно виникає питання, чи існують ознаки подільності на 6, 12, 30 і взагалі на будь-яке складене число.

Ознака подільності на 6. Для того, щоб число a ділилося на 6, необхідно й достатньо, щоб воно ділилося на 2 і на 3.

Доведення. Необхідність. Нехай $a \vdots 6$. Тоді оскільки $a \vdots 6$ і $6 \vdots 2$, то $a \vdots 2$. Через те що $a \vdots 6$ і $6 \vdots 3$, то $a \vdots 3$ (за властивістю транзитивності).

Достатність: Якщо $a \vdots 2$ і $a \vdots 3$, то a – спільне кратне чисел 2 і 3, а будь-яке кратне чисел ділиться на їхнє НСК. Отже, $a \vdots$ К (2, 3). Оскільки Д (2, 3) = 1, то К (2, 3) = 2·3 = 6. Таким чином, $a \vdots 6$. Теорему доведено.

Ознака подільності на 10. Для того, щоб число a ділилося на 10, необхідно і достатньо, щоб десятковий запис числа закінчувався цифрою 0.

Ознака подільності на 12. Для того, щоб число a ділилося на 12, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і 4.

Ознака подільності на 15. Для того, щоб число a ділилося на 15, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і 5.

Теорема 7 про подільність на складені числа: Для того, щоб натуральне число ділилось на складене число $n = bc$, де НСД $(b,c) = 1$, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на b і c.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню ознаки подільності на 6.

Зауважимо, що дану теорему можна застосовувати багаторазово.

Так, щоб число ділилося на 60, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 4 і на 15. У свою чергу, щоб число ділилися на 15, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і на 5. Отже, для того, щоб число ділилося на 60, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 4, на 3 і на 5.

Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне натуральних чисел

Означення. Спільним дільником *натуральних чисел a і b називається натуральне число, яке є дільником кожного з даних чисел.*

Означення. Найбільшим спільним дільником *натуральних чисел a і b називається найбільше число з усіх спільних дільників даних чисел і позначається НСД (a, b) або Д (a, b).*

Візьмемо два числа 12 і 18. Дільники числа 12 є: 1, 2, 3, 4, 6, 12, а числа 18 – 1, 2, 3, 6, 9, 18. Спільні дільники чисел 12 і 18: 1, 2, 3, 6. Серед них найбільшим спільним дільником є число 6.

Найбільший спільний дільник має такі найпростіші властивості:

1. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдиний НСД. Справді, множина спільних дільників чисел a і b не порожня, бо вона має принаймні число 1, крім того, вона скінченна. Тому серед її елементів знайдеться єдине число, яке є НСД (a, b).

2. НСД (a, b) не перевищує меншого з даних чисел, тобто якщо $a < b$, то НСД $(a, b) \le a$.

3. НСД (a, b) ділиться на будь-який їхній спільний дільник. Справді, нехай НСД $(a, b) = d$ а d_1 – будь-який їхній спільний дільник. Тоді $a=dq$, $d=dq_1$, де числа q і q_1 мають спільним дільником тільки 1. Отже, спільний дільник d_1 чисел a і b є дільником їхнього найбільшого спільного дільника d.

4. Якщо $a \vdots b$, то НСД $(a, b) = b$.

Означення. Якщо НСД $(a_1, a_2, ..., a_k)=1$, то числа $a_1, a_2, ..., a_k$ називаються ***взаємно простими***. *Якщо, крім того, кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа* $a_1, a_2, ..., a_k$ *називаються* ***попарно взаємно простими***.

Так числа 4, 6, 7 – взаємно прості, НСД (4,6,7) =1. Проте вони не є попарно взаємно простими, НСД (4,6) = 2.

Означення. Спільним кратним *натуральних чисел a і b називається натуральне число, кратне кожному з даних чисел.*

Означення. Найменшим спільним кратним натуральних чисел a і b називається найменше число з усіх спільних кратних даних чисел. Найменше спільне кратне позначається НСК (a, b) або К (a, b).

Візьмемо числа 12 і 18. Кратними числа 12 є: 12, 24, 36, …, а кратними числа 18 – 18, 36, 54, … Числа 12 і 18 мають спільні кратні 36, 72, …Серед них найменше – 36. Отже НСК(12, 18) = 36.

Найменше спільне кратне має такі найпростіші властивості:

1. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдине НСК.

2. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше більшого з даних чисел, тобто якщо $a > b$, то НСК$(a, b) \ge a$.

3. Кожне спільне кратне даних чисел a і b ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

4. Якщо $a \vdots b$, то НСК $(a, b) = a$.

Теорема 8. НСК (a,b) є найменшим спільним кратним усіх спільних дільників чисел a і b.

Способи знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного: за канонічним розкладом чисел та за алгоритмом Евкліда

<u>І спосіб обчислення НСК і НСД за канонічним розкладом чисел.</u>

Запис числа в виді добутку простих чисел називається **розкладом цього числа на прості множники.** ***Наприклад***: $110=2\times5\times11$. розкладаючи числа на прості множники, використовують ознаки подільності на 2,3,5,7, 11,13,17…наприклад, число $720=2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, або $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ і $288 = 2^5 \cdot 3^2$.

В розклад на прості множники **НСД** мають ввійти **всі спільні** прості множники, які містяться **в розкладі даних чисел**, причому кожний з них потрібно взяти **з найменшим степенем**, з яким вони входять в обидва розклади. Тоді $D(3600.288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

У розклад на прості множники **НСК** мають ввійти всі **спільні** прості множники, які містяться **хоча б одному** з розкладів даних чисел, причому кожний з них потрібно взяти **з найбільшим степенем**, з яким вони входять в обидва розклади. Тоді $K(3600,288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 7200$.

Алгоритм знаходження НСК, НСД.

1. Представляємо число в канонічному виді.
2. Утворюємо добуток спільних для чисел простих множників, причому кожний х них обираємо з найменшим степенем, з яким вони входять до розкладу. Обчислюємо значення добутку – це НСД даних чисел.
3. Утворюємо добуток з всіх простих множників, причому кожний обираємо з найбільшим степенем, з яким вони входять до розкладу чисел. Обчислюємо значення добутку – це НСК цих чисел.

Наприклад:

Знайдемо НСК і НСД чисел 360 і 525. Ці числа можна подати у канонічному вигляді: $360 = 2^{3\times}3^2\times5$; $525 = 3\times5^2\times7$. У розклад на прості множники НСД цих чисел повинні ввійти всі спільні прості множники, причому кожний з них треба взяти з найменшим показником, з яким він входить в канонічні розклади даних чисел. Отже, НСД (360, 525) = 3×5 = 15.

У розклад на прості множники НСК (360, 525) повинні ввійти всі прості множники, які входять принаймні в один розклад, причому кожний з них треба взяти з найбільшим показником. НСК(360, 525) = $2^{3\times}3^{2\times}5^{2\times}7 = 12600$.

Теорема 9. НСК (a,b) × НСД $(a,b) = a\times b$.

Наслідок 5. Якщо НСД (a,b) = 1, то НСК $(a,b) = a\times b$.

Теорема 10. Для того щоб спільний дільник d чисел a, b був НСД цих чисел, необхідно й достатньо, щоб числа a/d, b/d були взаємно прості.

Теорема 11 (основна властивість взаємно простих чисел). Якщо НСД $(a,b)=1$ і $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Наслідок 6. Якщо добуток чисел a і b ділиться на просте число p, то НСД (a,p)=1.

Теорема 12. Якщо натуральне число a не ділиться на просте число p, то НСД (a,p)=1.

<u>ІІ спосіб обчислення НСК і НСД за алгоритмом Евкліда.</u>

Отже, щоб знайти НСД натуральних чисел за їхнім канонічним розкладом, треба спочатку розкласти ці числа на прості множники. Для великих чисел це – складна задача. З часів Евкліда (ІІІ ст. до н.е.) відомий більш ефективний спосіб знаходження НСД, який оснований на діленні з остачею і називається алгоритмом Евкліда.

Лема 1. Якщо a ділиться на b, то НСД $(a, b) = b$.

Лема 2. Якщо $a = bq + r$, де a, b, r – натуральні числа, то НСД (a, b) = НСД (b, r).

Розглянемо алгоритм Евкліда для знаходження НСД довільних натуральних чисел a і b. Нехай $a \geq b$. Якщо $a \vdots b$,то за лемою 1 НСД $((a, b) = b$.

Якщо $a = bq + r$, де $r \neq 0$, то за лемою 2 задача знаходження НСД зводиться до обчислення НСД чисел b, r, де $r < b$. Якщо $b \vdots r$, то НСД $(b, r) = r$, а отже, і НСД$(a, b) = r$. Якщо при діленні b на r матимемо остачу $0 < r_1 < r$, то $b = rq_1 + r_1$, і тому НСД (a, b) = НСД (b, r) = НСД (r, r_1). Продовжуючи описаний процес, діставатимемо все менші і менші остачі: $r, r_1, \ldots, r_m$. Зрештою дістанемо остачу, яка ділить попередню остачу. Згідно з лемою 2, ця, відмінна від нуля, остача і є НСД (a,b). Таким чином НСД двох натуральних чисел дорівнює останній, відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда для цих чисел.

Алгоритм Евкліда, як спосіб послідовного ділення зручно записувати у вигляді многократного ділення кутом.

Розглянемо на прикладах:

1. Знайти $D(525,231)$**.**

Поділимо число 525 на 231 з залишком, маємо $525 \div 231 = 231 \cdot 2 + 63$, дільник 231 поділимо на залишок 63, отримаємо $231 = 63 \cdot 3 + 42$, аналогічно дільник 63 поділимо на залишок 42, $63 = 42 \cdot 1 + 21$, потім число 42 ділимо на 21 – $42 = 21 \cdot 2 + 0$. Останній відмінний від нуля дільник при послідовному діленні і являється НСД заданих чисел 525 і 231.

Тобто $D(525,231) = D(231,63) = D(63,42) = D(42,21) = D(21,0) = 21$, значить $D(525,231) = 21$.

Цей спосіб знаходження НСД засновано на діленні з залишком.

2. Знайдемо НСД (90,35).

$$\begin{array}{r|l} -\,90 & \underline{35} \\ \underline{70} & 2 \end{array} \qquad \text{Таким чином, } 90 = 35 \cdot 2 = 20$$

$$\begin{array}{r|l} -\,35 & \underline{20} \\ \underline{20} & 1 \end{array} \qquad 35 = 20 \cdot 1 + 15$$

$$\begin{array}{r|l} -\,20 & \underline{15} \\ \underline{15} & 1 \end{array} \qquad 20 = 15 \cdot 1 + 5$$

$$\begin{array}{r|l} -\,15 & \underline{5} \\ \underline{15} & 3 \\ 0 & \end{array} \qquad 15 = 5 \cdot 3 + 0$$

Отже, остання відмінна від нуля остача дорівнює 5, тому НСД(90, 35) = 5.

Після обчислення за допомогою алгоритму Евкліда НСД двох чисел можна знайти НСК, використовуючи залежність між НСД і НСК. Так, НСК (90, 35) = $90 \times 35 \div 5 = 630$.

Алгоритм Евкліда є тим загальним методом, за яким через скінченне число кроків можна обчислити НСД і НСК будь-яких двох і більше натуральних чисел.

Загальна ознака подільності Паскаля. Прості й складені числа. Решето Ератосфена. Основна теорема арифметики натуральних чисел

У зв'язку з тим, що процес ділення одного числа на друге досить трудомісткий, нелегко з'ясувати істинність висловлення «$a \vdots b$» при безпосередньому діленні одного числа на друге, а тому виникає задача пошуку одержання відповіді без виконання ділення.

Означення. Ознакою подільності *одного натурального числа на інше називається необхідна і достатня умова, при виконанні якої одне число ділиться на інше, причому перевірка умови виконується легше, ніж безпосереднє ділення.*

У XVII ст. відомий французький математик Б. Паскаль довів загальну ознаку подільності, яка доводиться для чисел, записаних у будь-якій позиційній системі числення. Сформулюємо й доведемо її для натуральних чисел, записаних у десятковій системі числення.

Теорема 13 (ознака подільності Паскаля). Для того щоб число $a = \overline{a_n \dots a_0}$ ділилося на число *m,* необхідно й достатньо, щоб на число *m* ділилося число $r = a_n r_n + \dots + a_1 r_1 + a_0$, де r_k — остача від ділення 10^k на число *m,* $k = 1, 2, \dots, n$.

Доведення. Запишемо число *a* у вигляді $a = a_n 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 = mq_k + r_k$, $0 \le r_k < m$, $k = 1, 2, \dots, n$. Після підстановки цих значень у запис числа *a* дістанемо:
$$a = (a_n q_n + \dots + a_1 q_1)m + (a_n r_n + \dots + a_1 r_1 + a_0)$$

Теорему доведено.

Наведемо приклад застосування цієї ознаки для $m = 11$. Маємо $10 = 11 - 1$; $10^2 = 11 \cdot 9 + 1$; $10^3 = 11 \cdot 91 - 1$; $10^4 = 11 \cdot 99 + 1$. Отже, число $a = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли різниця між сумою цифр, які стоять на непарних місцях, і сумою цифр, які стоять на парних місцях, ділиться на 11, тобто число
$r = (a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)$ ділиться на 11.

Так, число 6 571 829 ділиться на 11, бо число $r = (9+8+7+6) - (2 + 1 + 5) = 30 - 8 = 22$ ділиться на 11.

При вивченні відношення подільності було помічено, що серед натуральних чисел є такі, що діляться тільки на одиницю і на само себе. Такими числами є 2, 3, 5, 7, ...

Означення. *Натуральне число $p > 1$, яке ділиться тільки само на себе і на одиницю, називається* ***простим***.

Означення. *Натуральне число* п *> 1, яке має більше двох дільників, називається* ***складеним***.

Такими числами є 4, 6, 8, 9, ...

Число 1 не є ні простим, ні складеним числом.

Дільники складеного числа, відмінні від 1 і самого числа, називаються його *власними дільниками.* Так, число 6 має власні дільники 2 і 3. З означення простого і складеного числа випливає, що складене число *n* має принаймні два власні дільники: якщо $n = n_1 n_2$ і $1 < n_1 < n$, то $1 < n_2 < n$.

Оскільки складені числа є добутками простих чисел, то важливо вивчення властивості відношення подільності натуральних чисел зв'язати з властивостями простих чисел.

Властивості подільності натуральних чисел:

1. Якщо просте число p ділиться на натуральне число $n \neq 1$, то $n = p$.

2. Якщо p і q – різні прості числа, то $\overline{p \vdots q}$ і $\overline{q \vdots p}$. Ця властивість випливає з означення простого числа.

3. Будь-яке натуральне число $n > 1$ ділиться принаймні на одне просте число.

4. Найменший відмінний від 1 дільник pчисла $n > 1$ є простим числом.

5. Якщо число n складене, то найменший простий дільник числа n не перевищує $\sqrt{n}$.

Наслідок 7. Якщо n не ділиться на жодне просте число $p \leq \sqrt{n}$, то n – просте число.

Так, число 41 не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5. Тому воно просте число.

6**.** Будь-яке натуральне число n або ділиться на дане просте число p, або ні.

На основі властивостей простих чисел грецький математик Ератосфен знайшов у III ст. до н. е. спосіб знаходження простих чисел у будь-якому відрізку 1**,** 2**,** 3, ... (цей спосіб називають **«решетом Ератосфена»**). Спочатку викреслювалася 1, потім всі числа, кратні 2; потім – всі числа, кратні 3, крім 3, і т. д. Викресливши у натуральному ряду всі числа, кратні простим числам *2,* 3, ... p, які не перевищують $\sqrt{n}$, діставали всі прості числа даного відрізка натурального ряду чисел. Зрозуміло, якщо способом решета Ератосфена викреслені всі числа, крім простих чисел, які менші від p, то всі невикреслені числа, які менші від p^2, є також простими. Справді, кожне складене число $a < p^2$ буде викреслене як кратне його найменшого простого дільника, який не перевищує $\sqrt{a} < p$. Отже, викреслювання чисел, кратних простому числу p, треба починати з p^2. Після викреслювання всіх чисел, кратних p_m, наступним за p_m невикресленим числом буда просте число p_{m+1}, у противному разі воно мало б простий дільник, який не перевищує p_m, але всі числа, кратні таким дільникам, уже викреслені. Простими числами є також всі невикреслені числа, менші від p_{m+1}^2, бо складені числа, менші *від* p_{m+1}^2, мають простий дільник, який не перевищує p_m, але такі числа уже викреслені. Тому викреслювання слід починати з *від* p_{m+1}^2. Пошук простих чисел, які не перевищують числа n, буде закінчено тоді, коли буде викреслено всі складені числа, кратні простим, що не перевищують $\sqrt{n}$.

Як бачимо, такий спосіб знаходження простих чисел є громіздким. Тому були розроблені різноманітні модифікації цього способу, придатні також для застосування ЕОМ. Складено таблиці простих чисел до $\boldsymbol{10}^8$, знайдено окремі прості числа, більші за $\boldsymbol{10}^8$.

Основну теорему арифметики – теорему про існування і єдиність розкладу кожного натурального числа в добуток простих множників використовували ще стародавні греки. Піфагорейцям були відомі також приклади числових множин, зокрема, множина парних чисел, в яких теорема, аналогічна основній теоремі арифметики, не виконувалася. Наприклад, розклад парних чисел в добуток парнопростих чисел неоднозначний: 120 = 2 × 60 = 4 × 30

= 10 × 12 = 20 × *6.* Проте вперше основну теорему було сформульовано і доведено лише у 1801 р. німецьким математиком К. Гауссом, який досліджував нові області цілих чисел, відмінних від звичайних цілих і натуральних чисел.

Теорема 14 (основна теорема арифметики).

Кожне натуральне число $n > 1$ або просте, або може бути однозначно розкладено в добуток простих чисел з точністю до порядку розміщення множників.

Практичне заняття №8,9

Тема: Подільність цілих невід'ємних чисел. Ознаки подільності чисел. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. Алгоритм Евкліда

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.
5. Підготовка до самостійної роботи №2.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Сформулюйте означення відношення подільності на множині натуральних чисел. Поясніть властивості цього відношення.
   2) Які числа називаються простими? Складеними?
   3) Сформулюйте теореми про подільність суми, різниці, добутку.
   4) Поясніть ознаки подільності на 2 і 5, 3 і 9, 4 і 25, на складені числа.
   5) Сформулюйте основну теорему арифметики. У чому полягає її практичне значення?
   6) Сформулюйте означення спільного дільника, найбільшого спільного дільника, назвіть його властивості.
   7) Сформулюйте означення спільного кратного, найменшого спільного кратного, назвіть його властивості.
   8) Поясніть два способи знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) і найменшого спільного кратного (НСК).
   9) Як обчислюються НСК і НСД за канонічним розкладом чисел?
   10) Сформулюйте алгоритм Евкліда та поясніть на прикладі.
   11) Сформулюйте загальну ознаку подільності Паскаля.
   12) У чому полягає суть решета Ератосфена.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. При діленні цілого невід'ємного числа a на натуральне число b дістанемо неповну частку q і невід'ємну остачу r. Знайти: а) q і r, якщо $a = 112$, $b = 36$, б) b і q, якщо $a = 100$, $r = 6$, в) b і r, якщо $a = 351$, $q = 14$.
2. Яке число треба поставити замість зірочки (*), щоб число $\overline{152*8}$ ділилося на 6?
3. Які числа, поставлені замість (*) і (^), забезпечують подільність $\overline{413*8\wedge}$ на 3?
4. Простими або складеними є числа 127, 919, 549, 7429?
5. Встановити, простим чи складеним є число 967.
6. Знайти всі прості числа між числами 100 і 110, 200 і 220.
7. Знайти канонічний розклад чисел: 150, 494, 541, 2008.
8. Скільки різних натуральних дільників має число $2\times 3^2 \times 5$?
9. Які з чисел 532. 5604, 6910 є кратними 12?
10. Знайти НСК і НСД чисел 360 і 504, 128 і 750, 12345 і 7565. Для яких із наведених пар чисел доречно застосувати алгоритм Евкліда?
11. Знайти за алгоритмом Евкліда найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел:
    a) 138 і 115;
    b) 3762 і 4446;
    c) 42350, 840.
12. Добуток ab цілих невід'ємних чисел ділиться на натуральні числа m і n. Чи ділиться він на добуток mn?
13. Довести, що різниця будь-якого чотирицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9.
14. Довести, що коли число а при діленні на 5 дає в остачі 3, то число $a^2 + 1$ ділиться на 5.
15. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.
16. Сформулювати ознаку подільності на 6, на 30.
17. Скільки яєць лежить у корзині, якщо при розкладанні кучками по 2, по 3, по 4, по 5 і по 6 одне яйце залишиться зайвим, а при розкладанні по 7 не залишиться жодного зайвого яйця?
18. Знайти найбільший спільник дільник та найменше спільне кратне чисел, подавши їх в канонічному вигляді:
    a)144 і 360;
    b)16380, 33800 і 2730;
    c)351 і 228;
    d)238, 266, 413 і 329.
19. Встановіть, не виконуючи обчислення, значення яких виразів ділиться на 18:
    a) $24 \times 36 \times 53$;
    b) $72 \times 29 \times 47$;
    c) $123 \times 207 \times 41$;

d) $123 \times 201 \times 44$.

20. Які з висловлень істинні, а які хибні:

a) «Сума 175+3400 не ділиться на 17».
b) «Сума 389+172 не ділиться на 17».
c) «Добуток 175×3400 не ділиться на 17».
d) «Добуток 44×369 не ділиться на 36».

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання

1. Повторити теоретичний матеріал з теми: «Цілі невід'ємні числа та операції над ними», «Системи числення», «Подільність цілих невід'ємних чисел, НСК, НСД».
2. **Розв'язати вправи:**

№1 Чому число 12 є дільником числа 36 і кратним числу 4?

№2 Знайдіть дільники чисел 15, 24,25.

№3 Знайти всі прості дільники числа 60, 72.

№4 Серед чисел перших двох десятків занйти числа, які:

a) Одночасно діляться на 2 і на 5;
b) Діляться на 2, але не діляьтся на 5;
c) Не діляться ні на 2, ні на 5.

№5 Не виконуючи додавання, визначити. Чи ділиться сума:

a) 124+420+213 на 4;
b) 1080+123+124 на 9.

№6 Який з добутків чисел 243×42 чи 123×42 ділиться на 9?

№7 Знайти дільники й спільні дільники чисел: 24, 36. 48, 54. Чому дорівнює НСК цих чисел?

№8 Знайдіть прості дільники кожного із чисел: 216, 594, 729, 1024, 2348.

№9 Знайти за алгоритмом Евкліда найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел:

a) 360 і 504;
b) 12345 і 4565;
c) 4206126 і 525.

№10 Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне заданих чисел 4680, 7722 і 4368 за допомогою їх канонічних розкладів.

5. Підготовка до самостійної роботи №2.

Повторити теоретичний матеріал з розглянутих тем та вміти розв'язувати практичні завдання.

***Орієнтовні практичні завдання до самостійної роботи № 2* (зразок)**

Варіант №1

Завдання 1. Розв'язати наступні рівняння:

1. $16795_{11} = x_7$ 2. $1031632_7 = x_{11}$

Завдання 2. Обчислити значення виразу в позиційній системі числення з основою p:

1. $3203_4 \times 43_5 - 42323_5 + 8105_9$ і $p = 5$.

Завдання 3. Встановити, простими чи складними є числа: 653.

Завдання 4. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне даних чисел: 2047 і 989.

Завдання 5. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне заданих чисел за допомогою їх канонічних розкладів: 9324, 4662 і 3330.

Варіант №2

Завдання 1. Розв'язати наступні рівняння:

1. $65824_9 = x_{12}$ 2. $144171_8 = x_{12}$.

Завдання 2. Обчислити значення виразу в позиційній системі числення з основою p:

$105454_6 + 22122_3 \times 54_6 - 8204_9$ і $p = 6$.

Завдання 3. Встановити, простими чи складними є числа: 863.

Завдання 4. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне даних чисел: 1403 і 1769.

Завдання 5. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне заданих чисел за допомогою їх канонічних розкладів: 8370, 9765 і 3570.

Розділ 4. Розширення поняття про число

Цілі числа

Розширення множини натуральних чисел. Побудова множини цілих чисел

Необхідність розширення множин чисел обумовлено як теорією, так і практикою. Розширення множини *N* до множини *Z* здійснюють, зокрема, для того, щоб можна було охарактеризувати будь-яку зміну чисельності, користуючись лише одними числами. Необхідність більш точного вимірювання величини (порівняно з вимірюваннями, що базуються на натуральних числах) привела до поняття дробового числа, на основі якого будується множина *Q,* яка є розширенням множини *Z*. Проте для розв'язування інших задач раціональних чисел не досить. їх недостатньо, зокрема, для вимірювання довжин довільних відрізків. Розв'язування цієї проблеми привело до розширення множини *Q,* яким стала множина *R*.

При розширенні певної числової множини до деякої іншої задовольняються не тільки цільові вимоги, а й те, щоб відношення й операції, які виконувалися на розширюваній множині, виконувалися й на розширеній множині, причому їхній зміст для елементів з розширеної множини, які є одночасно елементами розширюваної множини, повинен збігатися із тим самим змістом, який ці відношення і операції мали на розширюваній множині.

Натуральні числа можна зображувати точками на прямій лінії. Щоб визначити положення точки на прямій відносно до фіксованої точки *O* (початок відліку), недостатньо знати її відстань від точки *O*, необхідно ще вказати, по який бік від початку відліку вона знаходиться. Частіше за все таку пряму розташовують горизонтально, напрямок праворуч від точки *O* вважають додатнім, а ліворуч – від'ємним. Додатній напрямок на прямій позначають стрілкою. Звичайно замість того, щоб писати слова «з права» і «зліва», пишуть по один бік від точки *O* числа 1, 2, 3, …, а по другий її бік – числа зі знаком «мінус»: –1, –2, –3, … (рис. 1.1). Числа 1, 2, 3, … називають *додатними,* числа –1, –2, –3 – *від'ємними*. Число 0 відділяє на прямій додатні числа від від'ємних. Вона позначається точкою *O* – початком відліку. Саме число 0 не є ані додатнім, ані від'ємним. Всі цілі додатні числа і число 0 називаються *невід'ємними числа.*

Розширення множини *N* здійснюється приєднанням до неї від'ємних цілих чисел і числа *0***.**

Означення. Від'ємним цілим числом *називають число виду* – п *(читають: «мінус n»), де* п $\in$ *N. Множину від'ємних цілих чисел позначають* Z_{-}.

Після введення від'ємних цілих чисел, натуральні числа природно назвати ***додатними цілими числами.*** Для множини додатних цілих чисел, крім позначення *N*, застосовують позначення Z_{+}...

Отже, $Z_{-} \sim Z_{+}$(тут ~ – знак еквівалентності).

Означення. Об'єднання множин Z_+, Z_- і $\{0\}$ називають ***множиною цілих чисел*** і позначають Z, тобто $Z = Z_+ \cup Z_- \cup \{0\}$, причому, множини Z_+, Z_- і $\{0\}$ попарно не перетинаються.

Розглянемо ще деякі означення, що стосуються цілих чисел.

Число, що показує положення точки на прямій, називають *координатою цієї точки*. Пряму лінію з обраним на ній початком відліку, одиничним відрізком і додатнім напрямом називають *координатною прямою*.

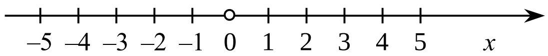


Рис. 1

Точки з координатами 5 і –5 (рис. 1) однаково віддалені від точки O, знаходяться по різні боки від неї і симетричні відносно цієї точки. Щоб потрапити з точки O в ці точки, потрібно відкласти від неї відрізки довжиною 5 в протилежних напрямках. Внаслідок цього числа 5 і –5 називаються *протилежними.* Для кожного числа існує одне протилежне йому число. Число 0 протилежне саме собі. Два протилежні числа зображуються на координатній прямій точками, симетричними відносно початку відліку.

Число, протилежне числу 1, позначають -1. Натуральні числа, протилежні їм числа і нуль називають ***цілими числами.*** Множину всіх цілих чисел позначають Z:

$Z = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Модулем (абсолютною величиною) цілого числа a називають невід'ємне число $|a|$, що визначається за формулою:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \text{ додатнє або дорівнює нулю,} \\ -a, \text{ якщо } a \text{ від'ємне.} \end{cases}$$

Введення від'ємних чисел робить не виконуваною дію віднімання над цілими числами (різниця $a-b$ має зміст при $a<b$).

Означення. Сумою цілих чисел a і b *називають ціле число* ***c****, що визначається рівністю* ***a + b = c****. Числа* ***a*** **і** ***b*** *називають* ***доданками****, а операцію знаходження суми –* ***додаванням****.*

При додаванні двох цілих чисел одного й того самого знака дістають ціле число, що мав той самий знак і модуль якого дорівнює сумі модулів доданків.

При додаванні цілих чисел протилежних знаків дістають ціле число, знак якого збігається зі знаком доданка, що має більший модуль, а модуль його дорівнює різниці більшого і меншого модулів доданків.

Сума протилежних цілих чисел дорівнює нулю, а додавання з нулем не змінює цілого числа.

Теорема 1. Для будь-яких цілих чисел a і b існує їхня сума $a + b,$ і при тому єдина.

Нехай сума двох цілих чисел визначена і визначена сума n – 1 цілого числа $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$. Тоді сума n цілих чисел, тобто сума $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ визначається рівністю $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

Можна довести, що операція додавання цілих чисел має властивості:

комутативності $(\forall a)\ (\forall b)\ (a + b = b + a),\ a, b \in Z;$

асоціативності $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ ((a + b) + c = a + (b + c)),\ a, b, c \in Z.$

Розглянемо операцію віднімання цілих чисел. Ця операція вводиться як обернена до операції додавання.

Означення. ***Різницею* цілих чисел *a* і *b*** *називають таке ціле число $c = a - b$, що $c + b = a$. Число a називають зменшуваним, b – від'ємником, а операцію знаходження різниці – відніманням.*

У множині N різниця існує не завжди.

Теорема 2. Для будь-яких цілих чисел a і b їхня різниця $a - b$ існує і єдина.

Доведення. Спочатку покажемо, що справедливе таке **допоміжне твердження:** для будь-яких цілих чисел a і b виконується рівність $a - b = a + (-b)$.

Справді, оскільки для кожного цілого числа b існує протилежне йому ціле число $-b$ і $b + (-b) = 0$, то $(a + (-b)) + b = a$. Це означає, що $a - b = a + (-b)$.

Справедливість теореми випливає з теореми про суму і розглянутого допоміжного твердження. Це твердження має й самостійне значення. Воно дає змогу операцію віднімання цілих чисел звести до операції додавання.

Наприклад: 5 – (–7) = 5 + 7 = 12.

Узагальнимо означення та теореми на прикладах. *Отже:*

1. Щоб додати два від'ємних числа, необхідно скласти їх модулі і перед отриманим числом поставити знак мінус. Наприклад, (–17) + (–8) = –(17 + 8) = –25.

2. Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно від більшого модуля відняти менший і поставити перед отриманим числом знак того доданка, модуль якого більший.

$$62 + (-12) = +(62 - 12) = 50;$$
$$(-36) + 30 = -(36 - 30) = -6;$$
$$27 + (-34) = -(34 - 27) = -7;$$
$$(-28) + 60 = +(60 - 28) = 32.$$

Відмітимо, що сума двох протилежних чисел дорівнює нулю: $8 + (-8) = 0$; $a + (-a) = 0$.

3. Якщо потрібно додати декілька чисел, серед яких є додатні і від'ємні, можна додати окремо додатні і оремо від'ємні, а потім до суми додатнім чисел додати суму від'ємних чисел. ***Наприклад:*** $30 + 12 + (-20) + (-12) = 42 + (-32) = 10$.

4. Щоб з одного числа відняти інше, потрібно до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику. ***Наприклад:*** $-15 - 18 = -15 + (-18) = -33$; $41 - (-7) = 41 + 7 = 48$.

Будь-який вираз, що містить лише знаки додавання і віднімання, можна розглядати як суму. ***Наприклад:*** вираз $-3+5-1$ можна розглядати як суму трьох доданків: -3, 5 і $-a$; $-3+5-1=-3+5+(-a)$.

Різниця двох чисел додатна, якщо зменшуване більше за від'ємник, і від'ємна, якщо зменшуване менше за від'ємник. Різниця дорівнює нулю, якщо зменшуване і від'ємник рівні.

Множення й ділення цілих чисел

Означення. Добутком *цілих чисел* a і b *називають ціле число* $c = a \times b$, *або* $c = ab$, *що задовольняє такі умови:*

1. $a \times 0 = 0$, *при* $b = 0$**,**
2. $a \times 1 = a$, *при* $b = 1$**,**
3. $a \times b = a + a + \ldots + a$, *при* $b > 1$**,**
4. $a \times b = -a \times |b|$, *при* $b < 0$.

Числа a і b називають *множниками,* а операцію знаходження добутку – *множенням.*

Залежно від значень множників a і b можуть бути такі окремі випадки застосування цього означення:

I. $a > 0, b > 0$.

II. $a < 0, b < 0$.

III. $a > 0, b < 0$.

IV. $a < 0, b > 0$.

V. $a = 0, b \neq 0$.

VI. $a \neq 0, b = 0$.

VII. $a = 0, b = 0$.

З розгляду цих вказаних випадків дістаємо правила множення цілих чисел.

При множенні двох цілих чисел дістають ціле число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників; це число додатне, якщо множники мають однакові знаки, і від'ємне – у противному разі. Добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один з множників дорівнює нулю.

Теорема 3. Для будь-яких цілих чисел a і b існує добуток $a \times b$ і при тому єдиний.

Означимо тепер добуток n цілих чисел $(n > 2)$.

Нехай добуток двох цілих чисел визначений і визначений добуток $n-1$ цілого числа $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$. Тоді добуток n цілих чисел, тобто добуток $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ визначається рівністю: $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n = (a_1a_2 \ldots a_{n-1})a_n$.

Можна довести, що операція множення цілих чисел має властивості:

- ✓ комутативності $(\forall a)(\forall b)(ab = ba), a, b \in Z$;
- ✓ асоціативності $(\forall a)(\forall b)(\forall c)((ab)c = a(bc)), a, b, c \in Z$;
- ✓ дистрибутивності відносно додавання
  $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\big((a+b)c = ac + bc\big),\ a, b, c \in Z.$

Аналогічно введенню віднімання цілих чисел як операції, оберненої до додавання, ділення цілих чисел вводиться як операція, обернена до множення.

Означення. Часткою цілих чисел a* і *b називають таке ціле число $c = a \div b$, що $c \times b = a$. Число a називають *діленим,* b – *дільником,* а операцію знаходження частки – *діленням.*

Якщо $a = 0$, то для довільного цілого числа $b \neq 0$ частка існує і $0 \div b = 0$, що випливає з рівності $0 \times b = 0$.

Якщо $a = 0$, $b = 0$, то, оскільки $(\forall\, c)\ (c \times 0 = 0)$, $c \in Z$, виразу $0 \div 0$ можна надати будь-якого значення. Тому вираз $0 \div 0$ не має смислу.

Якщо ціле число $a \neq 0$, $b = 0$, то ні для жодного $c \in Z$ не може виконуватися рівність $c \times 0 = a$, тому частка $a \div 0$ не існує. Отже, ділення на нуль неможливе.

Теорема 4. Частка цілих чисел a і b**,** де $b \neq 0$, існує тоді і тільки тоді, коли $a = cb$, де $c \in Z$.

Доведення. Якщо існує таке ціле число c, що $a = \times cb$, то c є часткою $a \div b$. Якщо ж число a не міститься серед чисел виду cb, де $c \in Z$, то припущення існування частки $a \div b = c$ призводить до суперечності: $a = c \times b$, де c – деяке ціле число.

Теорему доведено.

Наприклад: Арифметичні дії над цілими числами виконуються за правилами, наведеними нижче.

1. Щоб перемножити два числа з різними знаками, потрібно перемножити модулі цих чисел і перед отриманим числом поставити мінус. ***Наприклад,*** $(-6)\cdot 3 = -(6\cdot 3) = -18$.

При зміні знаку будь-якого множника знак добутку змінюється, а модуль його залишається тим самим. Якщо ж змінюються знаки обох множників, то знак добутку і його модуль не змінюються (тут добуток змінює знак двічі): $5\cdot 3 = 15$; $5\cdot(-3) = -15$; $(-5)(-3) = 15$.

2. Щоб перемножити два від'ємні числа, потрібно перемножити їх модулі. Добуток двох від'ємних чисел є число додатне. ***Наприклад,*** $(-5)\cdot(-3) = |-5|\cdot|-3| = 5\cdot 3 = 15$.

3. Щоб розділити від'ємне число на від'ємне, потрібно розділити модуль ділимого на модуль дільника. Часткове двох від'ємних чисел є число додатне. ***Наприклад,*** $-72:(-8) = |-72|:|-8| = 72:8 = 9$.

4. Щоб розділити два числа з різними знаками, потрібно розділити модуль ділимого на модуль дільника і перед отриманих числом поставити мінус. ***Наприклад,*** $-24:8 = -(24:8) = -3$; $45:(-5) = -(45:5) = -9$.

Практичне заняття №10

Тема: Цілі числа. Властивості та правила виконання арифметичних дій над цілими числами

План заняття

1. Аналіз самостійної роботи №2.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. Аналіз самостійної роботи №2.

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) У чому полягає необхідність розширення множини цілих невід'ємних чисел?
2) Сформулюйте означення цілих чисел?
3) Сформулюйте означення модуля цілого числа?
4) Зобразіть цілі числа на числовій прямій.
5) Сформулюйте означення множини цілочисельних точок прямої?
6) Сформулюйте означення суми та різниці цілих чисел?
7) Сформулюйте правила додавання цілих чисел?
8) Сформулюйте означення добутку цілих чисел?
9) Назвіть правила множення цілих чисел?
10) Назвіть властивості цілих чисел?
11) Сформулюйте означення частки цілих чисел?
12) Сформулюйте правила арифметичних дій над цілими числами. Наведіть приклади.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Знайдіть модуль чисел:
$-3;\ \sqrt{12}; 3{,}5; -2{,}1; -3\frac{1}{2}; 0; -\frac{9}{5}; -\sqrt{3}; -2\frac{3}{8}; -4^2; 3-\sqrt{6}; 1-\sqrt{5}$.

2. Розмістіть числа в порядку зростання: – 1; –5; $|2|;\ |-\sqrt{5}|; 0;\ |1-\sqrt{2}|;\ |3-\sqrt{10}|$.

3. Обчисліть найбільш зручним способом, використовуючи закони арифметичних дій:

a) 80 – 116 – 64;
b) 50 – 211 – 139;
c) 100 – 353 – 247.

4. Виконайте зазначені дії:

1) $28 - 4\times(25-33) - 100;$

2) $28 - 4\times(25 - 33 - 100)$;
3) $(28 - 4)\times(25 - 33) - 100$;
4) $(28 - 4)\times(25 - 33 - 100)$;
5) $570 \div 19 - 36 \times 25 - 60 \div 2$;
6) $570 \div 19 - 36 \times (25 - 60 \div 2)$;
7) $(570 \div 19 - 36) \times 25 - 60 \div 2$;
8) $(570 \div 19 - 36) \times (25 - 60 \div 2)$.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теорію з теми «Цілі числі», підготуватися до опитування по темі: «Раціональні числа» по контрольних запитаннях (див. матеріали до практичного заняття №11).

2. Розв'язати вправи:

№1 Довести, що множина $M = \{x | x \in Z, |x| > 10\}$ зчисленна.

№2 Для яких цілих чисел *x* виконується:

a) Рівність $|x| = -x$;

b) Нерівність $|x| > 12$?

№3 Знайти добуток усіх цілих чисел х таких, що $-10 \le x < 10$.

Раціональні числа

Означення. *Символ* $\frac{m}{n}$, *де m і n натуральні числа, називають* ***дробом****, m – чисельник дробу і n – знаменник.*

Дріб $\frac{m}{n}$ означає, що одна *n*-на частина одиниці виміру *e* міститься *m* разів у відрізку *a*, тобто одиничний відрізок розділили на *n* рівних частин і взяти *m* таких частин. Це записується так: $a = \frac{m}{n}e$,

Дріб $\frac{m}{n}$ є мірою довжини відрізка *a* при одиниці довжини *e*.

Повернемось до випадку 2) $a = \frac{4}{3}e$, це не єдиний розв'язок, бо якщо поділимо *e* на 6 рівних частин, то отримаємо $a = \frac{8}{6}e$ і т.д.

Тобто, довжина відрізка *a* може бути виражена нескінченною множиною дробів: $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \ldots$

Означення. *Дроби, які виражають довжину одного і того ж відрізка при одиниці довжини e, називаються* ***рівними****.*

Якщо дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ рівні, то записують $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Необхідна і достатня умова рівності дробів.

Два дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ рівні тоді і тільки тоді, коли виконується умова $mq=np$, тобто $\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow mq=np$

Доведення.

а) Доведемо, що $\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Rightarrow mq=np$

Для будь-якого натурального числа q $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$, а для будь-якого натурального числа n $\frac{n}{q}=\frac{np}{nq}$. Тоді з рівності дробів $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ випливає $\frac{mq}{nq}=\frac{np}{nq}$. Оскільки знаменники цих дробів рівні, то і чисельники їх будуть рівні: $mq=np$.

б) Доведемо тепер, навпаки, що $mq=np \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. Розділимо обидві частини $mq=np$ на натуральне число nq, тоді отримаємо $\frac{mq}{nq}=\frac{np}{nq}$. Але $\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}$, $\frac{np}{nq}=\frac{p}{q}$. Тоді, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Рівні дроби вважають різними записами одного і того ж числа, а саме число називають ***додатним раціональним числом.***

Дріб – це лише форма зображення числа. Дробове число $\frac{2}{3}$ можна зобразити (записати) різними рівними дробами: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{20}{30}=...$

Дроби $\frac{5}{6},\frac{7}{9}$, … зображають зовсім інші числа: $\frac{5}{6}\neq\frac{2}{3};\frac{7}{9}\neq\frac{2}{3}$ і ін.

Для будь-якого додатного раціонального числа існує один і тільки один нескоротний дріб, що є записом цього числа.

Множина додатних раціональних чисел *– це множина натуральних чисел в об'єднанні з множиною дробових чисел. Множину додатних раціональних чисел позначають* Q_+*. Множина натуральних чисел є підмножиною множини додатних чисел, тобто* $N \subset Q_+$.

Дріб, чисельник якого менший від знаменника, називається правильним; дріб, чисельник якого більший або дорівнює знаменнику, називається неправильним. Наприклад, $\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{1}{2}$ – правильні; $\frac{9}{4},\frac{7}{7},\frac{13}{12}$ – неправильні дроби.

Дріб $\frac{m}{n}$, чисельник і знаменник якого є числа взаємно прості, тобто $D(m;n)=1$, називається нескоротним дробом.

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу помножити на те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному: $\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, де k – натуральне число.

Застосування основної властивості дробу:

- скорочення дробів (заміна даного дробу іншим, що дорівнює йому, але з меншим чисельником і знаменником);
- зведення дробів до спільного знаменника (це заміна дробів рівними їм дробами, що мають однакові знаменники).

Наприклад:

1. Скоротити дріб $\frac{18}{81}$.

1-ий спосіб: чисельник і знаменник дробу ділити послідовно на спільні прості дільники: $\frac{18}{81}=\frac{18:3}{81:3}=\frac{6}{27}=\frac{6:3}{27:3}=\frac{2}{9}$, (2; 9) = 1

2-ий спосіб: знайти НСД чисельника і знаменника та поділити чисельник і знаменник відразу на їх НСД.

$18=2\cdot 3^2$

$81=3^4$

НСД (18; 81) = 3^2 = 9

$\frac{18}{81}=\frac{18:9}{81:9}=\frac{2}{9}$, (2; 9) = 1.

2. Звести до найменшого спільного знаменника дроби:

а) $\frac{1}{3},\frac{5}{7},\frac{9}{10},\frac{7}{11}$.

Знаменники цих дробів попарно взаємно прості. Тому НСК (3; 7; 10; 11) = =3 · 7 · 10 · 11 = 2310

Тоді

$$\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 7\cdot 10\cdot 11}{2310}=\frac{770}{2310},\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 3\cdot 10\cdot 11}{2310}=\frac{1650}{2310},\frac{9}{10}=\frac{9\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{2310}=\frac{2079}{2310},\frac{7}{11}=\frac{7\cdot 3\cdot 7\cdot 10}{2310}=\frac{1470}{2310}$$

б) $\frac{3}{8},\frac{5}{32},\frac{7}{64}$.

64:8 і 64:32, тому НСК (8; 32; 64) = 64.

Тоді

$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 8}{64}=\frac{24}{64};\frac{5}{32}=\frac{5\cdot 2}{64}=\frac{10}{64};\frac{7}{64}=\frac{7}{64}$.

в) $\frac{15}{75},\frac{12}{72},\frac{14}{60}$.

Маємо скоротні дроби, перед зведенням їх до найменшого спільного знаменника потрібно ці дроби скоротити.

Скоротимо ці дроби: $\frac{15}{75}=\frac{1}{5}.\frac{12}{72}=\frac{1}{6},\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$.

НСК (5; 6; 30) = 30

$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 6}{30}=\frac{6}{30},\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 5}{30}=\frac{5}{30}$.

Отже, $\frac{15}{75}=\frac{6}{30},\frac{12}{72}=\frac{5}{30},\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$.

г) $\frac{8}{15}$ і $\frac{4}{35}$

$15 = 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$

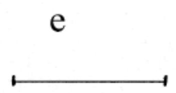
НСК (15; 35) $= 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Тоді $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 7}{105} = \frac{56}{105}, \frac{4}{35} = \frac{4 \cdot 3}{105} = \frac{12}{105}$.

3. Побудувати відрізок, довжина якого виражена числом $\frac{13}{4}$.

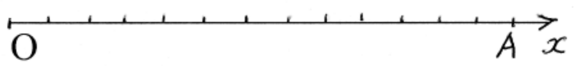
Побудова:

1) обираємо одиницю довжини *e*



2) ділимо відрізок *e* на 4 рівні частини

3) відкладаємо на промені Ох 13 відрізків, кожний з яких дорівнює четвертій частині відрізка *e*.



Отримаємо відрізок ОА, довжина якого виражена числом $\frac{13}{4}$.

Поняття дробу вводять в початкових класах. За програмою з математики в 2 класі передбачено ознайомлення з частинами числа: половиною, третиною, чвертю, п’ятою частиною. У 3 класі учні розуміють сутність поняття частина числа; знаходять половину, третину, четверту на інші частини від числа, число за його частиною. У 4 класі розділ «Дроби». Тут за одиницю беруть відрізок, круг, прямокутник, зокрема квадрат, смужки та ін. Наприклад, круг ділять на 8 рівних частин і виділяють $\frac{1}{8}$ частину круга, $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$. Вводять поняття чисельника і знаменника дробу: число під рискою означає, на скільки рівних частин поділено ціле, його називають знаменником дробу. Число над рискою означає, скільки взято рівних частин. Це число називають чисельником дробу.

Учні записують і читають дроби; знаходять дріб від числа та число за його дробом; порівнюють дроби з однаковими знаменниками.

Додавання невід’ємних раціональних чисел

Означення. Сумою двох (або кількох) дробових чисел *з однаковими знаменниками є дробове число, чисельником якого є сума їх чисельників, а знаменником – їх спільний знаменник:*

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{n}.$$

Означення. Сумою невід’ємних раціональних чисел $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *називається число* $\frac{ad + bc}{bd}$, *тобто:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Візьмемо два будь-які натуральні числа a і c та зобразимо їх у вигляді дробів із знаменниками 1, тоді, за означенням додаванні дробів, матимемо

$$\frac{a}{1}+\frac{c}{1}=\frac{a+c}{1}=a+c.$$

Зобразимо тепер a і c у вигляді дробів із знаменниками b і d і застосуємо правило додавання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{ab}{b}+\frac{cd}{d}=\frac{abd+bcd}{bd}=\frac{(a+c)bd}{bd}=a+c.$$

Звідси видно, що означення суми раціональних невід'ємних чисел є узагальненням означення суми натуральних чисел.

Наприклад: $5 + 3 = 8$;

$$5+3=\frac{10}{2}+\frac{6}{2}=\frac{10+6}{2}=\frac{16}{2}=8;$$

$$5+3=\frac{15}{3}+\frac{12}{4}=\frac{15\cdot 4+12\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{96}{12}=8.$$

Мішані числа

Означення. *Сума натурального і дробового чисел, записаних поряд без знака додавання, називається* ***мішаним числом****.*

Наприклад: $7+\frac{2}{3}=7\frac{2}{3}$ – мішане число.

Для того, щоб подати неправильний дріб, більший від одиниці, у вигляді мішаного числа, треба чисельник дробу поділити на знаменник; у частці дістанемо число цілих одиниць, а в остачі — число відповідних часток одиниці.

Наприклад: $\frac{23}{3}=\frac{7\cdot 3+2}{3}=7+\frac{2}{3}=7\frac{2}{3}$ – мішане число.

І навпаки, щоб подати мішане число у вигляді неправильного дробу, треба цілу частину помножити на знаменник дробової частини і додати чисельник, одержаний результат взяти чисельником і підписати знаменник дробової частини.

Наприклад: $7\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 3+2}{3}=\frac{23}{3}$.

Віднімання невід'ємних раціональних чисел

Як і для натуральних чисел, віднімання невід'ємних раціональних чисел – дія, обернена додаванню.

Означення. Відняти від раціонального числа $\frac{a}{b}$ *число* $\frac{c}{d}$*, або знайти різницю* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$*, означає знайти таке число* $\frac{x}{y}$*, щоб задовольнялась умова* $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}+\frac{c}{d}$.

Множення невід'ємних раціональних чисел

Як відомо, множення цілого невід'ємного числа на натуральне число, більше за 1, зводиться, за означенням, до додавання рівних доданків:

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + ... + a}_{n доданків}$$

при $n = 1$ $a \cdot 1 = a$; при $n = 0$ $a \cdot 0 = 0$.

Ці означення поширюють і на випадок множення дробового числа на натуральне число n.

Означення. Добутком дробового числа $\frac{a}{b}$ *на натуральне число n > 1 називається сума n доданків, кожний з яких є* $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + ... + \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a + a + ... + a}^{n}}{b} = \frac{an}{b}.$$

Отже, $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}; \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}; \frac{a}{b} \cdot 0 = 0.$

Наприклад: $\frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{4} = \frac{21}{4}; \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \cdot 0 = 0.$

Означення. Добутком невід'ємних раціональних чисел, *поданих у вигляді дробів* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$, *називається число, зображене дробом, чисельником якого є добуток чисельників даних дробів, а знаменником — добуток знаменників:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Це означення поширюється і на випадок, коли один чи обидва співмножники є цілі числа, зокрема нуль або 1. Тоді:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{b} \cdot 0 = \frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{0}{b} = 0;$$

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{a \cdot n}{b \cdot 1} = \frac{an}{b}.$$

Означення. *Два числа, добуток яких дорівнює 1, називаються* ***взаємно оберненими.***

Число 1 обернене самому собі, бо $1 \cdot 1 = 1$.

Натуральне число n має обернене число $\frac{1}{n}$, бо $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Отже, n і $\frac{1}{n}$, - пара взаємно обернених чисел.

Число $\frac{a}{b}$ має обернене $\frac{b}{a}$, бо $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Отже, $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{a}$ - пара взаємно обернених чисел.

Нуль не має оберненого числа, бо не існує такого числа, яке б при множенні на нуль дало 1.

Ділення невід’ємного раціонального числа на додатне

Правило 1. Щоб поділити одне число, виражене дробом, на друге, треба чисельник першого дробу помножити на знаменник другого дробу і добутий результат взяти чисельником, а знаменник першого дробу помножити на чисельник другого дробу і одержаний результат взяти знаменником частки, або інакше, треба помножити на число, обернене дільнику:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Наприклад: $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}.$

Це правило поширюється і на випадок ділення на натуральне число:

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot c}=\frac{a}{b\cdot c}.$$

Можна довести, що при діленні частка буде більша від діленого, якщо дільник правильний дріб; частка менша від діленого, якщо дільник більший від одиниці; частка дорівнює діленому, якщо дільник дорівнює одиниці. Тобто:

$$\frac{c}{d}<1\Rightarrow\frac{a}{b}:\frac{c}{d}>\frac{a}{b};$$

$$\frac{c}{d}>1\Rightarrow\frac{a}{b}:\frac{c}{d}<\frac{a}{b};$$

$$\frac{c}{d}=1\Rightarrow\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

Приклади:

1) $\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}>\frac{3}{4};$

2) $\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1}{2}<\frac{3}{4}.$

Основна властивість частки

Якщо ділене і дільник помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля і виражене дробом число, то значення частки не зміниться, тобто

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right):\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right),\text{ де }\frac{m}{n}\neq 0$$

1) Щоб поділити суму (різницю) двох дробових чисел на третє дробове число, досить поділити на це число кожний доданок (зменшуване і від’ємник) і знайдені частки додати (відняти), тобто

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\pm\frac{c}{d}:\frac{m}{n}.$$

Наприклад: $\left(\frac{15}{22}-\frac{10}{77}\right):\frac{5}{11}=\frac{15\cdot 11}{22\cdot 5}-\frac{10\cdot 11}{77\cdot 5}=\frac{3}{2}-\frac{2}{7}=\frac{17}{14}.$

2) Щоб поділити на дробове число добуток двох дробових чисел, досить поділити на це число один із співмножників і частку помножити на другий співмножник:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}:\frac{m}{n}\right).$$

Наприклад: $\left(\frac{18}{65}\cdot\frac{3}{8}\right):\frac{9}{13}=\frac{18\cdot 13}{65\cdot 9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{3}{20}.$

3) Щоб поділити дробове число на добуток двох дробових чисел, досить поділити його послідовно на кожний із співмножників, тобто

$$\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\right):\frac{c}{d}.$$

4) Щоб поділити дробове число на частку від ділення двох дробових чисел, досить поділити це число на ділене і помножити на дільник, тобто

$$\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}:\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}.$$

Наприклад: $\frac{10}{19}:\left(\frac{5}{19}:\frac{15}{22}\right)=\frac{10\cdot 19}{19\cdot 5}\cdot\frac{15}{22}=\frac{15}{1}=1\frac{4}{11}.$

Закони додавання і множення

1) Закон існування і єдиності суми.

З означення дробу і означення дії додавання невід'ємних раціональних чисел та закону існування суми і добутку натуральних чисел випливає, що дія додавання дробових чисел завжди здійсненна, тобто, що сума невід'ємних раціональних чисел завжди існує і є число невід'ємне і раціональне.

Наприклад: 1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{3\cdot 4}=\frac{7}{12};$

2) $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 6+8\cdot 5}{8\cdot 6}=\frac{58}{48}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}.$

У цих прикладах знайдено суму, користуючись означенням. Проте дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ можна замінити еквівалентними їм дробами із спільним знаменником по-різному. Чи не зміниться від цього їх сума? Наприклад, дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ простіше додати, звівши до найменшого спільного знаменника: $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 3+5\cdot 4}{8\cdot 3}=\frac{29}{24}.$

2) Переставний закон: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

Доведення. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+ad}{db}.$$

Беручи до уваги переставний закон додавання і множення натуральних чисел, легко зробити висновок про тотожність цих виразів.

3) Сполучний закон: $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}.$

Доведення. $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f};$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a}{b}+\frac{cf+ed}{df}=\frac{ad+cb}{bd}+\frac{e}{f};$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{adf+bcf+bed}{bdf}=\frac{adf+cbf+bde}{bdf}.$$

Ці вирази тотожно рівні. Оскільки всі перетворення еквівалентні, то і вихідна рівність є тотожністю.

4) Монотонність множення: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}<\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$

5) Дистрибутивний (розподільний) закон відносно додавання і віднімання:

$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n};$

$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}.$

Приклади :

1) $\left(\frac{19}{77}+\frac{57}{44}\right)\cdot\frac{11}{19}=\frac{19\cdot 11}{77\cdot 19}+\frac{57\cdot 11}{44\cdot 19}=\frac{1}{7}+\frac{3}{4}=\frac{25}{28};$

2) $\left(\frac{19}{72}+\frac{5}{36}\right)\frac{8}{29}=\frac{19+10}{72}\cdot\frac{8}{29}=\frac{29\cdot 8}{72\cdot 29}=\frac{1}{9}.$

Упорядкованість множини додатних раціональних чисел

Якщо раціональні числа представлені рівними дробами, то вони рівні.

Наприклад, $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{6}{8}$, то $a=b$ тому, що $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Як визначити, яке число більше чи менше ?

Означення. *Нехай a і b – додатні раціональні числа. Тоді $a<b$, якщо існує таке додатне раціональне число c, що $a+c=b$.*

Для того, щоб різниця додатних раціональних чисел a і b існувала, необхідно і достатньо, щоб $b<a$.

Відношення «менше» володіє властивостями антисиметричності і транзитивності, тобто є відношенням порядку на множині додатних раціональних чисел, а сама ця множина є упорядкованою множиною.

В множині додатних раціональних чисел:

1) немає найменшого числа;

2) між будь-якими двома різними додатними раціональними числами існує нескінченно багато чисел цієї множини.

Запис додатних раціональних чисел у вигляді десяткових дробів

Означення. Десятковим дробом *називається дріб, знаменником якого є* 10^n *, де n Є N, і який записано в позиційній десятковій системі числення так: записано чисельник і в ньому справа наліво відділено n цифр (десяткових знаків).*

Наприклад: $\frac{35}{10} = 3{,}5; \frac{356}{100} = \frac{356}{10^2} = 3{,}56.$

Якщо число цифр чисельника не більше від показника *n* (тобто не більше, ніж кількість нулів у степені десяти, що є знаменником), то зліва дописують необхідну кількість нулів.

Наприклад: $\frac{3}{10} = 0{,}3; \frac{3}{100} = 0{,}03$ і т. д.

Зазвичай, десяткові дроби значно більше застосовують при обчисленні, ніж звичайні. Це пояснюється ще й тим, що в основу метричної системи мір також взято число 10, а тому при практичних вимірюваннях здебільшого дістаємо десяткові дроби. Через те тепер у школі після першого ознайомлення із звичайними дробами спочатку вивчають дії над десятковими дробами, а потім над звичайними.

Основна властивість десяткового дробу:

дописування нулів справа дробової частини запису десяткового дробу не змінює його значення.

Наприклад: 0,3 = 0,30 = 0,300 = ..., що випливає з основної властивості звичайних дробів:

Будь-яке натуральне число $a_m a_{m-1} \ldots\ a_1$ можна подати у вигляді десяткового дробу $a_m a_{m-1} \ldots\ a_1$, 0 ...0.

При перенесенні у десятковому дробові коми на *і* цифр праворуч значення дробу збільшується в 10^i разів, а ліворуч – зменшується в 10^i разів. Це випливає з самого означення десяткового дробу.

Правило 2. *Щоб даний десятковий дріб помножити або поділити на* 10^i *, треба перенести кому на і цифр відповідно вправо або вліво.*

Оскільки у дробовій частині запису десяткових дробів можна справа дописувати нулі, від чого значення дробу не змінюється, то в загальному вигляді два десяткових дроби можна записати так, що вони матимуть однакову кількість цифр після коми, тобто будуть зведені до спільного знаменника.

Наприклад: щоб порівняти десяткові дроби 12,34 і 6,36472, перший дріб можна записати так: 12,34000, і тоді порівняння десяткових дробів можна звести до порівняння їх чисельників. Проте практично для порівняння десяткових дробів дописувати нулі немає потреби. Досить порівняти цілі частини; той дріб виражає більше число, у якого ціла частина більша. Якщо цілі частини рівні, той дріб виражає більше число, у якого більше десятих часток, і т. д.

Правило 3. *Десяткові дроби слід додавати, як натуральні числа, не звертаючи уваги на коми, тільки всі розряди слід підписувати під* *відповідними їм розрядами, і в одержаній сумі відокремити справа стільки десяткових знаків, скільки їх має доданок з найбільшою кількістю десяткових знаків.*

Примітка. Тут сказано «з найбільшою кількістю десяткових знаків», а не «стільки десяткових знаків, скільки їх має кожний доданок» тому, що практично нулі у десятковій частині не дописують, а просто їх мають на увазі.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 23,516 \\ +\underline{982,8} \\ 1006,316 \end{array}$$

Закони додавання, доведені для звичайних дробів, мають місце і для десяткових дробів, оскільки десяткові дроби є окремим випадком звичайних.

Віднімання виконується аналогічно:

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 415,634 \\ -\underline{12,78} \\ 402,854 \end{array}$$

Правило 4. *Десяткові дроби слід перемножати, як натуральні числа, не звертаючи уваги на коми, а потім відокремити в добутку стільки десяткових знаків, скільки їх у множеному і множнику разом.*

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 12,36 \\ \times\underline{1,214} \\ 4944 \\ +\ 1236 \\ 2472 \\ \underline{1236} \\ 15,00504 \end{array}$$

Для десяткових дробів зберігаються перевірені уже для звичайних дробів закони множення.

Як показано вище, в результаті виконання дій додавання, віднімання і множення над десятковими дробами завжди дістаємо десяткові дроби.

Розглянемо ділення десяткового дробу на десятковий дріб.

Наприклад:

1) $0,28 : 5,2 = \frac{28}{100} : \frac{520}{100} = 28 : 520 = 7 : 130 = \frac{7}{130};$

2) $0,364 : 0,28 = \frac{364}{1000} : \frac{280}{1000} = 364 : 280 = 1,3.$

Як уже зазначалося, будь-яке ціле число можна записати у вигляді десяткового дробу, з нулями після коми.

Наприклад: 5 = 5,000...

Виникає запитання: чи будь-яке дробове число можна зобразити у вигляді десяткового дробу? Щоб дати відповідь на це запитання, проаналізуємо, за якою ознакою приклади записано у правій і в лівій колонках?

$\frac{2}{5} = 0{,}4;$ $\frac{2}{3} = 0{,}3333...;$

$\frac{5}{8} = 0{,}625;$ $\frac{5}{6} = 0{,}8333...;$

$\frac{3}{20} = 0{,}15;$ $\frac{3}{28} = 0{,}10714285714285...;$

$\frac{4}{25} = 0{,}16;$ $\frac{4}{15} = 0{,}2666...$

Відповідні дробові числа правої і лівої колонок мають однакові чисельники, проте залежно від знаменників або процес ділення чисельника на знаменник закінчується і в результаті дістаємо скінченний десятковий дріб (зліва), або не закінчується і дістаємо нескінченний десятковий дріб (справа), причому обов’язково періодичний – у ньому одна або кілька цифр періодично повторюються. При уважному аналізі можна помітити, чим відрізняються знаменники дробів правої і лівої колонок.

Теорема 1. Для того, щоб звичайний нескоротний дріб можна було перетворити у десятковий, необхідно й достатньо, щоб канонічний розклад його знаменника не містив жодних простих множників, крім 2 і 5.

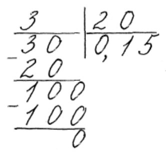
Наслідок 1. Будь-який нескоротний дріб, канонічний розклад знаменника якого не містить ніяких множників, крім 2 і 5, можна подати у вигляді десяткового дробу, причому двома способами:

1) діленням його чисельника на знаменник;

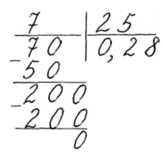
2) домноженням чисельника і знаменника дробу на відповідний степінь 2 або 5.

Наприклад:

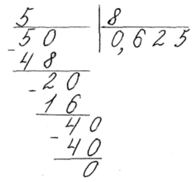
1) $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15}{10^2} = 0{,}15;$ або



2) $\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{28}{10^2} = 0{,}28;$ або



3) $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{5^4}{10^3} = \frac{625}{10^3} = 0{,}625;$ або



Теорема 2. Якщо нескоротний дріб – не перетворюється у скінченний десятковий, то його можна записати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу (такий десятковий запис дробу, у якому, починаючи з

деякого місця, одна і та сама цифра або сукупність цифр без кінця повторюються в певному порядку).

Сукупність цифр, які повторюються, називається періодом. У періоді буде не більше ніж n — 1 цифра. Наприклад,

$$\frac{2}{3} = 0{,}666...; \frac{5}{6} = 0{,}8333...;$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714...$$

Розрізняють чисті і мішані періодичні десяткові дроби.

Означення. Чистим періодичним десятковим дробом *називається періодичний десятковий дріб, у якого період починається безпосередньо після коми: 0,333..., 0,232323...*

Означення. Мішаним періодичним десятковим дробом *називається періодичний десятковий дріб, у якого період починається не відразу після коми: 0,08333..., 17,12777...* При цьому число, що стоїть між комою і початком періоду, називається доперіодичною частиною.

Періодичні десяткові дроби записують компактніше, беручи період у дужки:

0,232323…= 0,(23) – нуль цілих і 23 в періоді;

0,08333… = 0,08(3) – нуль цілих, нуль вісім до періоду і 3 в періоді.

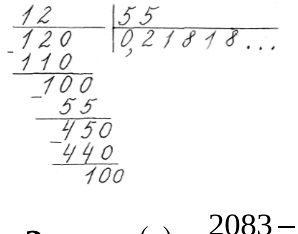
Правило 5. *Чистий періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробові, чисельник якого є число, що стоїть у періоді, а знаменник число, записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.*

Наприклад: 1) $0,(37) = \frac{37}{99}$; 2) $5,(315) = 5\frac{315}{999} = 5\frac{35}{111}$.

Правило 6. *Мішаний періодичний десятковий дріб дорівнює звичайному дробові, чисельником якого є різниця між числом, що стоїть до періоду і в періоді, і числом, що стоїть до періоду, а знаменником – число, записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, і з стількома нулями на кінці, скільки цифр між комою і періодом.*

Наприклад: **1.** $0{,}2(18) = \frac{218-2}{990} = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$.

Перевірка.



2. $0{,}208(3) = \frac{2083-208}{9000} = \frac{1875}{9000} = \frac{5}{24}$.

Практично досить часто використовують десяткові дроби із сталим знаменником 100. Такі дроби легко порівнювати між собою, бо не треба попередньо зводити їх до спільного знаменника. Ці дроби, як відомо, називають процентами.

Практичне заняття №11

Тема: Раціоналі числа. Обчислення виразів та правила виконання арифметичних дій над раціональними числами.

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв’язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Дайте означення дробу; рівних дробів.
   2) Сформулювати і довести необхідну і достатню умови рівності двох дробів.
   3) Що називають множиною додатних раціональних чисел?
   4) Який дріб називається правильним; неправильним?
   5) Сформулювати основну властивість дробу.
   6) У чому полягає застосування основної властивості дробу?
   7) Розкрити вивчення поняття дробу в початковій школі.
   8) Яке число називається мішаним?
   9) Які числа називаються взаємно оберненими?
   10) Сформулювати означення суми, різниці, добутку, частки додатних раціональних чисел?
   11) Сформулювати закони додавання і множення невід’ємних раціональних чисел.
   12) У чому полягає упорядкованість множини додатних раціональних чисел?
   13) Який дріб називається десятковим?
   14) В чому полягає основна властивість десяткового дробу?
   15) Як подати звичайний дріб у вигляді десяткового?
   16) Який дріб називається нескінченним десятковим періодичним дробом?
   17) Який дріб називається чистим періодичним десятковим дробом?
   18) Який дріб називається мішаним періодичним десятковим дробом?
   19) Якому звичайному дробові дорівнює чистий періодичний десятковий дріб?
   20) Якому звичайному дробові дорівнює мішаний періодичний десятковий дріб?

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Серед даних дробів вибрати рівні і записати це за допомогою знака рівності: $\frac{12}{72}, \frac{14}{21}, \frac{13}{186}, \frac{15}{45}, \frac{14}{42}, \frac{6}{36}$.
2. Хлопчик відпив $\frac{1}{6}$ чашки кави і долив молока, відпив $\frac{1}{3}$ чашки і знову долив молока, відпив $\frac{1}{2}$ і долив молока, і нарешті випив усю каву з молоком. Чого хлопчик випив більше – кави чи молока?

3. Скоротіть дроби $\frac{26}{130}, \frac{52}{260}, \frac{240}{720}$.
4. Зведіть дроби до найменшого спільного знаменника двома способами: $\frac{18}{45}, \frac{11}{55}, \frac{8}{36}$.
5. Замініть неправильні дроби мішаними числами: $\frac{28}{12}; \frac{56}{21}; \frac{124}{24}$.
6. Оберіть одиницю довжини і побудуйте відрізок, довжина якого виражена числом: 1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$.
7. Обчисліть раціональним способом:
   1) $\frac{2}{15}+1\frac{5}{13}+3\frac{1}{5}+4\frac{3}{26}$;
   2) $2\frac{4}{9}+3\frac{1}{14}+5+2\frac{6}{14}+3\frac{5}{9}$;
   3) $5\frac{15}{24}+3\frac{22}{33}+1\frac{32}{48}+1\frac{7}{24}+\frac{2}{3}$;
   4) $\frac{3}{5}\cdot 3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}$;
   5) $\frac{4}{7}\cdot 6\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}$;
   6) $\frac{5}{8}\cdot\frac{17}{18}\cdot 1\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7}$;
   7) $\left(4\frac{2}{3}+3\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{11}$.
8. Знайдіть значення виразу:
   1) $2\frac{7}{15}-1\frac{1}{12}+\left(2\frac{7}{90}-\left(1\frac{1}{2}-\frac{8}{45}\right)\right)$;
   2) $\left(24-3\frac{7}{36}\right)-\left(21\frac{5}{12}-\frac{11}{18}\right)$;
   3) $8\frac{6}{57}:12\frac{3}{19}$;
   4) $\left(4\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}\right):6\frac{3}{4}$;
   5) $4\frac{1}{4}:\left(11\frac{1}{3}\cdot 5\frac{1}{4}\right)$;

6) $(60{,}3-53{,}235:3{,}9)\cdot 1{,}4+10{,}2\cdot 12$;

7) $15{,}85-3{,}4\cdot(50-(1{,}530+0{,}4))+3{,}57:17$;

8) $17\frac{1}{2}-8{,}25\cdot\frac{10}{11}\cdot\left(11\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}+3{,}5\right)$;

9) $((1{,}72:0{,}8+0{,}7)\cdot 0{,}8):\left(\left(7-3{,}5\cdot 1\frac{5}{8}\right):3\frac{1}{2}\right)-0{,}152$.

9. Користуючись залежністю між компонентами і результатами операцій, розв'язати рівняння: $66\frac{3}{5}\div\left(5+3\frac{1}{5}\div(1\frac{3}{5}-\frac{4}{15}x)\right)-7\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$.

10. Записати у вигляді десяткових дробів: $\frac{378}{100}, \frac{359}{10000}, \frac{79}{100000}, \frac{17859}{1000}$.

11. Записати десяткові дроби у вигляді звичайних нескоротних дробів:
    a) 0,225;
    b) 0,17;
    c) 13,345.

12. Запишіть у вигляді нескінченних десяткових дробів звичайні дроби:
    a. 1) $\frac{8}{33}$; 2) $\frac{137}{18}$; 3) $\frac{127}{28}$.

13. Перетворити нескінченні періодичні десяткові дроби у звичайні:

1) $0,(43)$;	6) 0,(81);
2) $0,(301)$;	7) 3,(513);
3) $5{,}7(27)$;	8) 0,7(112);
4) $6{,}31(8)$;	9) 12,88(13).
5) $15{,}43(29)$.	

14. Зобразити дані звичайні дроби періодичними десятковими дробами:
    a) $\frac{4}{13}$;
    b) $\frac{13}{70}$;
    c) $2\frac{5}{73}$.

15. Для даних періодичних десяткових дробів знайти звичайні дроби, зображення яких є такі переодичні десяткові дроби:
    a) 0,(25);
    b) 0,13(749);
    c) 15,(347).

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал з теми «Раціональні числі», підготуватися до опитування по темі: «Дійсні числа» (див. матеріали до практичного заняття №12).
2. **Розв'язати вправи:**

   № 1 Під час сніданку було спожито $\frac{3}{8}$ торту, а під час обіду – $\frac{5}{8}$. Чи весь торт спожито?

№2 Один робітник може виконати роботу за 4 дні, а другий – за 6 днів. За скільки днів робітники виконають роботу, працюючи разом?

№3 Скоротити дроби: $\frac{225}{990}$; $\frac{2750}{4125}$; $\frac{9392}{7044}$.

№4 Звести о спільного знаменника дроби: 1) $\frac{4}{15}$; $\frac{7}{80}$; $\frac{11}{45}$; 2) $\frac{13}{128}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{97}{102}$.

№ 5 Виконати дії:

a) $\left(\frac{5}{8}+1\frac{2}{9}+2\frac{5}{16}\right)-(\frac{4}{7}+\frac{17}{21}+\frac{11}{14}))$;

b) $\left(\frac{4}{13}\times\frac{26}{55}-\frac{3}{97}\times\frac{5}{6}\right)\div\frac{105}{697}$;

c) $\left(13\frac{3}{4}-22\times\frac{1}{4}\right)\div\left(12\frac{3}{4}-\left(1\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\right)\div\left(\left(\frac{3}{4}-\frac{39}{100}\right)\times\frac{2}{9}\right)\right)$;

d) $(3{,}718+2{,}73)\times 15{,}125-8{,}003\times 0{,}05$;

e) $\left(15{,}14\times\left(12{,}47\times 1{,}305-9{,}1427\right)-23{,}023\right)\div 1{,}17$;

f) $(12{,}8\div 0{,}64+3{,}05\div 0{,}05)\div\left(8\frac{2}{3}\div 1\frac{4}{9}-1\right)$.

№6 Записати десяткові дроби у вигляді звичайних нескоротних дробів:

a) 103,117;
b) 0,0103;
c) 11,0018.

№7 Які з даних звичайних дробів можна перетворити в десяткові, і якщо це можливо, то виконати таке перетворення:

a) $\frac{17}{125}$;
b) $\frac{139}{600}$;
c) $1\frac{17}{130}$;
d) $2\frac{23}{40}$;
e) $13\frac{69}{70}$;
f) $\frac{13}{4000}$.

№8 Які з даних звичайних дробів зображуються чистими, а які – мішаними періодичними десятковими дробами:

a) $\frac{9}{13}$;
b) $2\frac{7}{11}$;
c) $\frac{117}{150}$;
d) $5\frac{7}{60}$;
e) $2\frac{5}{117}$.

№9 Зобразити дані звичайні дроби періодичними десятковими дробами:

a) $5\frac{3}{22}$;
b) $14\frac{50}{121}$;

c) $24\frac{19}{170}$.

№10 Для даних періодичних десяткових дробів знайти звичайні дроби, зображення яких є такі переодичні десяткові дроби:

d) 12,5(001);
e) 10,00(105);
f) 2,(12345).

№11 Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами операцій: $1\frac{3}{5}+\left(2\frac{7}{12}-\left(\left(\frac{3}{4}-x\right)+1\right)\right)=2\frac{14}{15}$.

Дійсні числа

У «Началах» Евкліда також ірраціональні числа фактично не використовувались. Вперше свідомо почали оперувати ірраціональними числами індійські та китайські математики, переносячи на них усі правила дій над коренями, що являють собою раціональні числа.

Означення. Ірраціональними числами *називають числа, які можна зобразити нескінченними десятковими неперіодичними дробами*.

Внаслідок розширення множини невід'ємних раціональних чисел введенням ірраціональних (додатних) чисел стала завжди можливою задача вимірювання відрізків: тепер кожній точці числового променя можна поставити у відповідність тільки одне дійсне число (раціональне чи ірраціональне), і навпаки. Саме в цьому і полягає ідея неперервності числового променя і множини невід'ємних дійсних чисел. Між множиною невід'ємних дійсних чисел і множиною точок числового променя існує взаємно однозначна відповідність.

Два ірраціональних числа вважають рівними, якщо вони виражають довжини рівних між собою відрізків.

У множині дійсних невід'ємних чисел зберігаються основні властивості відношень «рівно», «більше», «менше», які було встановлено для невід'ємних раціональних чисел.

Арифметичні дії над дійсними невід'ємними числами. Їхні властивості

Відомо, що арифметичні дії над періодичними десятковими дробами трактуються як дії над відповідними їм звичайними дробами. Тому всі властивості арифметичних дій, розглянуті для звичайних дробів, мають місце і для нескінченних періодичних десяткових дробів.

Виконати арифметичну дію над періодичними десятковими дробами можна двома способами:

а) подати дані періодичні десяткові дроби у вигляді звичайних дробів, виконати дію над звичайними дробами і в разі потреби подати результат у вигляді періодичного десяткового дробу;

б) виконати дію над періодичними десятковими дробами подібно до того, як виконується ця дія над десятковими дробами.

Наприклад: Знайти суму 3,(2) + 4,3(42).

а) $3,(2)+4,3(42)=3\frac{2}{9}+4\frac{342-3}{990}=3\frac{2}{9}+4\frac{339}{990}=7\frac{220+339}{990}=7\frac{559}{990}=7,5(64).$

б) $$\begin{array}{r} +3,2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ldots \\ 4,2\ \ 4\ \ 2\ \ 4\ \ 2\ \ 4\ \ 2\ldots \\ \hline 7,5\ \ 6\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ldots \end{array} = 7,5\ (64).$$

Означення. Сумою (добутком) двох ірраціональних чисел α і β *називається число, яке більше за суму (добуток) будь-яких їх наближених значень, взятих з недостачею, але менше за суму (добуток) будь-яких їх наближених значень, взятих з надлишком.*

Нехай $\alpha=\pi=3{,}1415...\beta=\sqrt{2}=1{,}442...$, тоді згідно з означенням:

$3+1<\pi+\sqrt{2}<4+2;$ $\quad 3\cdot 1<\pi\cdot\sqrt{2}<4\cdot 2;$

$3{,}1+1{,}4<\pi+\sqrt{2}<3{,}2+1{,}5;$ $\quad 3{,}1\cdot 1{,}4<\pi\cdot\sqrt{2}<3{,}2\cdot 1{,}5;$

$3{,}14+1{,}41<\pi+\sqrt{2}<3{,}15+1{,}42;$ $\quad 3{,}14\cdot 1{,}41<\pi\cdot\sqrt{2}<3{,}15\cdot 1{,}42.$

Такий спосіб обчислення забезпечує відповідну точність, проте він досить громіздкий, оскільки доводиться вести подвійні обчислення. На практиці, якщо не потрібна велика тонічність, можна обмежуватись обчисленнями над відповідними десятковими наближеннями, але принаймні прикидкою оцінювати при цьому похибку і враховувати її.

Дії віднімання і ділення дійсних чисел, як і для раціональних чисел, означаються як дії, обернені відповідно додаванню і множенню.

Чи може бути раціональним числом добуток двох ірраціональних чисел? сума двох ірраціональних чисел?

Відповідь на ці запитання дають такі приклади:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{36}=6$ – раціональне число;

2) $\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)=2$ – раціональне число.

У множині дійсних невід'ємних чисел зберігаються основні закони і властивості арифметичних дій, які було встановлено для невід'ємних раціональних чисел:

1. Існування і єдиність суми і добутку.
2. Комутативність додавання і множення.
3. Асоціативність додавання і множення.
4. Дистрибутивність множення відносно суми.
5. Закони монотонності додавання і множення.

Проте ірраціональні числа мають і свої особливості. Наприклад, не має смислу говорити, у скільки разів $\sqrt{3}$ більше за $\sqrt{2}$ або у скільки разів $\pi>\sqrt{2}$, неправильно вважати $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ дробовим числом або $\frac{1}{\sqrt{5}}$ правильним дробом, це числа ірраціональні.

Від'ємні числа. Множина дійсних чисел

Натуральні числа виникли на початку розвитку людства у зв'язку з лічбою предметів. Потреба вимірювання величин, а також вимога виконання обернених операцій, зокрема ділення, добування кореня і логарифмування, привели до введення дробових та ірраціональних чисел.

Як і коли виникли від'ємні числа?

Поняття про від'ємні числа виникло значно пізніше, ніж поняття дробових і ірраціональних чисел. Введення від'ємних чисел було новим етапом розширення поняття числа, викликаним практичною необхідністю; по-перше, потребою вимірювання напрямлених величин і величин, які можна розуміти в двох протилежних значеннях (температура – тепло і холод; час – майбутній і минулий; економія матеріалів і перевитрата і т. ін.); по-друге, потребою в розв'язуванні практичних задач, що приводять до віднімання від меншого числа більшого. Обидві ці задачі тісно пов'язані між собою.

Уперше від'ємні числа почали використовувати в Китаї в I ст. до н.е. у зв'язку з розв'язуванням рівнянь. Оскільки в ті часи знаків «плюс» і «мінус» ще не було, то на відміну від додатних чисел китайці зображали від'ємні числа іншим кольором. Додатними числами позначали майно, наявні гроші, прибуток. Їм раділи і зображали їх червоним кольором (китайці їх називали «чен»). Від'ємними числами позначали борг, збиток і зображали їх чорним кольором («фу»).

Індійські математики Брахмагупта (VII ст.) і Бхаскара (XII ст.) дали такі правила дій над від'ємними і додатними числами: «Сума майна і майна є майно». «Сума двох боргів є борг». «Сума майна і боргу дорівнює різниці». «Сума майна і рівного йому боргу дорівнює нулю». «Добуток боргу на борг є майно» і т.ін.

Проте важко було уявити, як це з «боргів» (перемноження за схемою $(-)(-)=(+)$) може вийти «майно»? Тому довго від'ємні числа не визнавали справжніми, вважали їх недійсними, абсурдними, фіктивними. Бхаскара писав, що люди не схвалюють від'ємних чисел.

У Європі вперше від'ємні числа почав використовувати італійський математик Л. Фібоначчі (XII – XIII ст.). Німецький математик М. Штіфель (XVI ст.) назвав їх «числами, меншими ніж ніщо» (меншими від нуля). Людям важко було миритися з тим, що існує величина, «менша ніж ніщо». Сам Штіфель писав, що нуль знаходиться між істинними і абсурдними числами. Тільки після того, як у XVII ст. французький математик Рене Декарт у відомій книзі «Геометрія» зобразив на числовій прямій додатні числа праворуч від нуля, від'ємні числа – ліворуч, їх почали визнавати дійсними числами.

Від'ємне число можна розглядати як різницю між меншим дійсним числом і більшим, якщо ця різниця виражає значення величини, протилежне значенню, що виражається дійсним числом (тепло і холод, борг і наявні гроші, прибуток і збиток, вправо і вліво тощо).

Від'ємні числа слід розглядати в тісному взаємозв'язку з додатними числами, причому не тільки в протиставленні їх додатним числам, а й в діалектичній єдності з ними.

Нова розширена множина містить у собі відомі вже невід'ємні числа як свою підмножину. Множина від'ємних чисел не містить у собі множини чисел додатних, як це було з множиною дробів, яка містила в собі числа натуральні. Навпаки, тут кожному додатному дійсному числу ставиться у відповідність протилежне йому від'ємне число. При цьому число нуль набуває нового смислу як число, яке «розділяє» додатні і від'ємні числа і належить ні до тих, на до інших. Разом же всі додатні, від'ємні числа і нуль об'єднуються в одну множину – множину дійсних чисел *R*. Саме в цьому і виявляється діалектична єдність додатних і від'ємних чисел.

Звертаємо увагу на недопустимість ототожнення смислу виразів виду «нуль карбованців» і «нуль градусів». Вираз «температура 0°» зовсім не означає відсутність температури (хоч іноді у повсякденному житті при вимірюванні температури людського тіла і говорять «немає температури» замість «температура нормальна»),

Невід'ємні числа – це числа нової природи, вони мають свої особливості і тому на них не можуть бути механічно перенесені всі властивості додатних чисел, зокрема означення і закони дій.

Поняття «правильний дріб» має смисл лише для додатних дробів.

Особливість частки від ділення двох раціональних чисел, із яких хоча б одне від'ємне, пов'язана з неможливістю кратного порівняння цих чисел, яка зумовлюється тим, що напрямлені величини (вектори) можна порівнювати в кратному відношенні лише за модулем (довжиною).

Оскільки від'ємні числа є числами нової природи, введення їх потребує перегляду існуючих означень прямих дій, розширення їх у випадку, коли для нових чисел вони не мають попереднього смислу.

Кожному додатному числу на числовій прямій відповідає так само за величиною число, але із знаком мінус. Такі пари дійсних чисел називаються протилежними числами.

Наприклад: +1 і –1; +2,5 і –2,5; +3,(8) і –3,(8), $\sqrt{3}$ і $-\sqrt{3}$ і т.ін.

Тільки нуль без пари: він не належить ні до додатних, ні до від'ємних чисел: –0= +0 = 0. Як відомо знак «+» перед додатними числами, як правило, не ставиться.

Із двох від'ємних чисел те більше, модуль якого менший.

Означення. Сумою *двох дійсних чисел одного знака називається сума їх модулів, взята з тим самим знаком, який мають доданки*.

Сумою двох дійсних чисел, взятих з різними знаками, називається різниця між більшим і меншим модулем даних чисел, взята із знаком числа, модуль якого більший.

Наслідки.

1. Сума двох протилежних дійсних чисел дорівнює нулю: $a+(-a)=0.$

2. Сума двох дійсних чисел, одне з яких дорівнює нулю, дорівнює другому доданку: $a+0=0+a=a.$

Введене означення суми дійсних чисел узагальнюється на випадок будь-якої кількості доданків.

Безпосередньо із означення дійсного числа та з означення суми дійсних чисел випливають основні властивості дії додавання дійсних чисел, які мали місце на множині дійсних невід'ємних чисел.

Означення дії віднімання дійсних чисел залишається таким самим, як і для дійсних невід'ємних чисел.

Означення. Відняти *від дійсного числа a дійсне число b – це означає знайти таке дійсне число x, яке в сумі з b дає a*: $a-b=x$, $a=b+x$.

Правило 1. Щоб знайти різницю двох дійсних чисел, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику: $a-b=a+(-b)$.

Оскільки віднімання дійсних чисел зводиться до додавання, то у множині дійсних чисел додавання і віднімання об'єднують в одну дію, яку називають алгебраїчним додаванням.

Означення. *Вираз, що являє собою запис кількох дійсних чисел, послідовно з'єднаних знаками дій додавання і віднімання, називається* ***алгебраїчною сумою*** *дійсних чисел*.

Означення. Добутком *двох дійсних чисел називається добуток їх модулів, якщо дані числа з однаковими знаками або хоч одне з них нуль, і число, протилежне добутку їх модулів, якщо числа з різними знаками*.

Правило 2. *Щоб перемножити кілька дійсних, відмінних від нуля чисел, треба перемножити їх модулі і взяти результат із знаком «плюс», якщо число від'ємних співмножників парне, і із знаком «мінус», якщо число від'ємних співмножників непарне.*

Основні закони дії множення зберігаються і на множині всіх дійсних чисел.

Означення. Знайти ***частку*** від ділення дійсного числа *a* на *b*, це означає знайти таке дійсне число *c*, щоб задовольнялася умова $a=c\cdot b; a:b=c$, де $b\neq 0$.

Правило 3. *Частка від ділення двох дійсних чисел дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника із знаком «плюс», якщо ділене і дільник є числа з однаковими знаками, із знаком «мінус», якщо ділене і дільник числа з різними знаками.*

Підкреслюємо, що і у множині дійсних чисел ділення на нуль виключається, оскільки у випадку $a\neq 0$ немає такого дійсного числа *c*, щоб виконувалася умова $a=c\cdot 0$; у випадку $a=0$ будь-яке дійсне число *c* задовольняє умову $0=c\cdot 0$.

Частка дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ділене дорівнює нулю. Звідси випливає, що рівняння виду $\frac{a}{f(x)}=0$ при $a\neq 0$ не має розв'язку.

Частка $a:b$, де $b\neq 0$, завжди існує, і притому єдина. Окремі випадки ділення: $0:b=0$, якщо $b\neq 0$; $a:1=a$; $a:a=1$.

Таким чином, у множині дійсних чисел виконуються всі чотири арифметичні дії (за винятком ділення на нуль).

Відсотки. Розв'язування задач на відсотки

Відсотки – це одна з найскладніших тем математики, і дуже багато учні не можуть або взагалі не вміють вирішувати задачі на відсотки. А розуміння відсотків і вміння здійснювати відсоткові розрахунки необхідні для кожної людини. Прикладне значення цієї теми дуже велика і зачіпає фінансову, економічну, демографічну та інші сфери нашого життя. Вивчення відсотка продиктовано самим життям. Уміння виконувати процентні обчислення і розрахунки необхідно кожній людині, тому що з відсотками ми стикаємося в повсякденному житті. Проаналізувавши програму середньої школи з математики, прийшла до висновку, що за існуючими програмами рішення задач на відсотки передбачено в основному в 5-6 класах, а в наступних класах даної теми віддана незначна частина навчального часу. Німецький фізик 18-го століття Ліхтенберг сказав: «Те, що ви були змушені відкрити самі, залишає у вашому розумі доріжку, якою ви зможете знову скористатися, коли в тому виникне необхідність».

Слово «відсоток» походить від латинського *pro centum, що* буквально означає «за сотню» або «зі ста». Відсотками дуже зручно користуватися на практиці, так як вони виражають цілі частини чисел в одних і тих же сотих частках. Знак «%» походить, як вважають, від італійського слова *cento (сто),* яке в процентних розрахунках часто писалося скорочено *cto.* Існує й інша версія виникнення цього знака. Передбачається, що цей знак стався в результаті безглуздої помилки, вчиненої складачем. У 1685 році в Парижі була опублікована книга - керівництво по комерційній арифметиці, де помилково складач замість *cto* ввів%.

Вперше опублікував таблиці для розрахунку відсотків в 1584 році Симон Стевін – інженер з міста Брюгге (Нідерланди).

Відсотки застосовувалися тільки в торгових і грошових угодах. Потім область їх застосування розширилася, відсотки зустрічаються в господарських і фінансових розрахунках, статистиці, науці і техніці. Нині відсоток– це приватний вид десяткових дробів, сота частка цілого (прийнятого за одиницю).

При розв’язанні задач на відсотки застосовують такі ***правила:***

1. ***Знаходження відсотків від числа:***

щоб знайти відсотки від числа потрібно, відсотки перетворити на десяткову дріб і помножити на це число.

2. Знаходження числа за його відсотками:

щоб знайти число за його відсотками потрібно, відсотки перетворити на десяткову дріб і число розділити на цей дріб.

3. Знаходження процентного відношення чисел:

щоб знайти процентне відношення чисел, треба відношення цих чисел помножити на 100.

Основні типи задач на відсотки

І тип. Задачі на знаходження відсотка від числа

Щоб знайти відсоток від числа, треба: • відсоток перетворити у дріб; • число помножити на цей дріб.	***Знайти 25% від числа 46.*** *25%= 0,25; 46·0,25=11,5.* *Відповідь: 11,5.*

II тип. Задачі на знаходження числа за його відсотком

Щоб знайти число за його відсотком, треба: • відсоток перетворити у дріб; • число поділити на цей дріб.	***Знайти число 15% якого становлять 165.*** *15%=0,15; 165:0,15=1100.* *Відповідь: 1100.*

III тип. Задачі на знаходження відсоткового відношення

Щоб знайти відсоткове відношення числа *a* до числа *b*, треба: $\frac{a}{b} \cdot 100\%$	***Скільки відсотків становить число 12 відносно числа 15?*** $\frac{12}{15} \cdot 100\% = 80\%$. *Відповідь: 80%* .

IV тип. Задачі на знаходження зміни числа у відсотках

Щоб знайти на скільки відсотків відбулась зміна від числа *a* до числа *b*, треба: • знайти різницю чисел *a* і *b*; • $\frac{\text{різницю}}{\text{початкове число}} \cdot 100\%$	***На скільки відсотків змінилось число від 120 до 150.*** 1. *150-120=30* 2. $\frac{30}{120} \cdot 100\% = 25\%$ *Відповідь: зменшилось на 25%*

V тип. Задачі на знаходження відсотка від відсотка

Щоб знайти відсоток від відсотка, треба: відсоток перетворити у дріб; • інший відсоток помножити на цей дріб.	***Перше число становить 30% від суми, а друге – 20% від першого. Скільки відсотків становить друге число від суми?*** *20%=0,2; 30%·0,2=6%* *Відповідь: друге число становить 6% від суми.*

VI тип. Задачі на зміну числа на *p*%

Щоб змінити число *x* на *p*% треба:	***Ціну товару двічі збільшили на 20%.***

- **збільшити на р%:**

до початкового числа додати число, яке становить р% від нього:

$x + \frac{p}{100} \cdot x;$

- **зменшити на р %:**

від початкового числа відняти число, яке становить р% від нього:

$x - \frac{p}{100} \cdot x$

Якою стала нова ціна? На скільки відсотків вона змінилася?

Нехай х – початкова ціна товару.

1. $x+0{,}2 \cdot x=1{,}2x;$
2. $1{,}2x+0{,}2 \cdot 1{,}2x=1{,}2x(1+0{,}2)=1{,}44x;$
3. $\frac{1{,}44x-x}{x} \cdot 100\% = 0{,}44 \cdot 100\% = \ = 44\%$

Відповідь: ціна збільшилась на 44%.

VII тип. Задачі на складні відсотки

Знаходження кількості грошей, яку можна буде одержати з вкладеної в банк суми через певну кількість років, якщо відомий річний відсоток.

$A_n = A_0(1+\frac{p}{100})^n$,

де A_n – майбутня сума,

A_0 – початковий капітал,

$p\%$ – відсоток річних, n – кількість років.

Початковий капітал 20 000 грн поклали в банк під 7% річних. Яка сума грошей буде на рахунку через 5 років?

$A_5 = 20000 \cdot (1+\frac{7}{100})^5 \approx 28060$ грн.

Відповідь. 28 060 грн.

Приклади цікавих задач на відсоткові розрахунки

1. Задачі на обчислення відсотків від відсотків.

Задача 1. Число спочатку збільшили на 20%, а потім зменшили на 20%. Як змінилося число?

Розв'язання:

Нехай *х* – число. Тоді після збільшення його на 20% воно дорівнюватиме *1,2х*. $1{,}2x \times 0{,}8 = 0{,}96x$ – становить число після зменшення;

$x - 0{,}96x = 0{,}04x$ – зміна числа.

Оскільки 0,04 = 4%, то це значить що число зменшилося на 4%.

Відповідь. На 4% зменшиться.

Задача 2. Цукерки подешевшали на 20%. На скільки відсотків більше можна купити цукерок на ту ж саму суму?

Розв'язання:

Нехай *х* грн. витратили на цукерки спочатку і це 100%. Тоді після знижки цукерок можна купити на *0,8х* грн. Нехай а – це відсотки цукерок, куплених після знижки на ту ж суму. Отже, можемо скласти пропорцію

$$0{,}8x\ грн - 100\%$$
$$x\ грн - a\%$$

$$a = \frac{x \cdot 100\%}{0,8x} = 125\%$$

$$125\% - 100\% = 25\%$$

Отже, цукерок можна придбати на 25% більше.

Відповідь. На 25% більше.

Задача 3. На скільки відсотків зменшиться площа квадрата, якщо його сторону зменшити на 10% ?

Розв'язання:

Нехай початкова сторона квадрата буде a, тоді $S = a \cdot a = a^2$. Після зменшення сторони на 10% матимемо площу $S = 0,9a \cdot 0,9a = 0,81a^2$. Очевидно, що площа зменшилася на $(1 - 0,81) \cdot 100\% = 19\%$.

Відповідь. Зменшиться на 19%.

2. Задачі, у яких відомо скільки відсотків одне число становить від іншого.

Задача 4. Одне з чисел на 60% більше другого. На скільки відсотків друге число менше за перше?

Розв'язання:

Нехай друге число a, тоді перше $1,6a$. Можемо скласти пропорцію

$$1,6a - 100\%$$

$$a - x\%$$

Звідси, $x = \frac{a \cdot 100\%}{1,6a} = 62,5\%$. Отже, друге число менше за перше на $100\% - 62,5\% = 37,5\%$.

Відповідь. На 37,5% менше.

Задача 5. Перше число становить 120% від другого, а відношення першого до третього дорівнює $\frac{12}{15}$. Знайти всі три числа, якщо різниця між третім і другим на 20 менша від числа, що становить 30% від суми першого і другого чисел.

Розв'язання:

Нехай друге число дорівнює x. Тоді перше число дорівнює $1,2x$, а третє - $1,2x \cdot \frac{15}{12} = 1,5x$. За умовою задачі можемо скласти рівняння:

$$1,5x - x = 0,3 \cdot (1,2x + x) - 20$$

$$0,5x = 0,3 \cdot 2,2x - 20$$

$$0,5x = 0,66x - 20$$

$$0,16x = 20$$

$$x = 125$$

Отже, друге число 125. Тоді

$1,2x = 1,2 \cdot 125 = 150$ – перше число;

$1,5x = 1,5 \cdot 125 = 187,5$ – третє число.

Відповідь. 150; 125; 187,5.

3. Задачі на розчини та суміші

Якщо m – маса розчину, n – маса розчиненої речовини, то відношення $n \div m$, подане у відсотках, називають *концентрацією розчину.*

Відсотковою концентрацією розчину називають виражене у відсотках відношення маси розчиненої речовини до маси всього розчину.

Задача 6. До 80% розчину кислоти масою 6 кг вливають воду, масою 4 кг. Яка стала концентрація утвореного розчину?

Розв'язання:

Знайдемо масу кислоти в 80% розчині. Для цього складемо пропорцію

$$6\,кг\ розчину - 100\%$$
$$x\,кг\ кислоти - 80\%$$

Звідси, $x = \frac{6 \cdot 80\%}{100\%} = 4{,}8\,кг$ кислоти в даному розчині. Якщо до цього розчину долили воду, то 6 кг + 4 кг = 10 кг – маса утвореного розчину. Оскільки маса кислоти в розчині залишилася тією ж самою, то можемо знайти її відсоткову концентрацію в новому розчині. Складемо пропорцію

$$10\,кг - 100\%$$
$$4{,}8\,кг - x\%$$

Звідси, $x = \frac{4{,}8 \cdot 100\%}{10} = 48\%$. Отже, концентрація нового розчину становить 48%.

Відповідь. 48%.

Задача 7. Вода містить 5% солі. Скільки треба долити до цього 30-кілограмового розчину води, щоб сіль у воді становила 1,5% ?

Розв'язання:

Щоб знайти скільки кг солі міститься у 5% розчині, складемо пропорцію

$$30\,кг - 100\%$$
$$x\,кг - 5\%$$

Звідси, $x = \frac{30 \cdot 5\%}{100\%} = 1{,}5\,кг$. Очевидно, що 1,5% розчин містить 1,5 кг солі. Знайдемо скільки кг води у цьому ж розчині

$$1{,}5\,кг - 1{,}5\%$$
$$x\,кг - 98{,}5\%$$
$$x = \frac{1{,}5 \cdot 98{,}5\%}{1{,}5\%} = 98{,}5\,кг$$

Отже, води в утвореному розчині 98,5 кг, а було 30 – 1,5=28,5 кг. Щоб знайти, скільки долили, потрібно 98,5 – 28,5 = 70 кг.

Відповідь. Долили 70 кг.

Задача 8. Змішали 60% - й розчин сірчаної кислоти з 25% - м її розчином і отримали 700 г 40% - го розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

Розв'язання:

Нехай 60% - го розчину взяли x г, тоді 25% - го взяли (700 – x) г.

У 700 г 40% - го розчину міститься $700 \cdot 0{,}4 = 280$ г сірчаної кислоти, в x г розчину 0,6 г кислоти, а в (700 – x) г кислоти буде $0{,}25(700 - x)$ г. Маємо рівняння:

$$0{,}6x + 0{,}25(700 - x) = 280,$$
$$0{,}6x + 175 - 0{,}25x = 280,$$
$$0{,}35x = 105,$$
$$x = 300.$$

Отже, взяли 300 г 60% - го розчину. Тоді 25% - го розчину взяли 700 – 300 = 400 (г).

Відповідь. 300 г, 400 г.

4. Задачі на сплави.

Задачі на сплави розв'язуються аналогічно до задач на змішування.

Задача 9. Сплав вагою 450 кг містить 40% цинку і 180 кг міді. Який відсотковий вміст домішок у цьому сплаві?

Розв'язання:

1) $450 \cdot 0{,}4 = 180$ (кг) – цинку у сплаві.

2) $450 - (180 + 180) = 90$ (кг) – домішок у сплаві.

3) $90 \div 450 = 0{,}2 = 20\%$ домішок.

Відповідь. 20%.

Задача 10. Сплав олова і свинцю масою 12 кг містить 45% свинцю. Скільки чистого олова потрібно додати до цього сплаву, щоб отримати новий сплав, який містить 40% свинцю?

Розв'язання:

Очевидно, що вміст олова у сплаві масою 12 кг становить 55%, а у новому сплаві – 60%. Якщо до сплаву додати x кг олова, то олова в ньому стане $(12 \cdot 0{,}55 + x)$ кг. А з іншої сторони, у новому сплаві $0{,}6(12 + x)$ кг олова.

Маємо рівняння:

$$12 \cdot 0{,}55 + x = 0{,}6(12 + x),$$
$$6{,}6 + x = 7{,}2 + 0{,}6x,$$
$$0{,}4x = 0{,}6,$$
$$x = 1{,}5$$

Отже, до сплаву треба додати 1,5 кг олова.

Відповідь. 1,5 кг.

Задача 11. Сталь двох видів містить нікель 5% - ий і 40% - ий. Скільки сталі кожного виду треба взяти, щоб отримати 140 т сталі, яка містить 30% нікелю?

Розв'язання:

Нехай візьмемо x т сталі, яка містить 5% нікелю, та y т сталі, яка містить 40% нікелю. Тоді нікелю у сплавах буде $0{,}05x$ та $0{,}4y$ т. У 140 т сталі нікелю буде $140 \cdot 0{,}3 = 42$ т. Отже, можемо скласти систему

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ 0{,}05x + 0{,}4y = 42 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ 5x + 40y = 4200 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=140 \\ 35y=3500 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=100 \\ x=40 \end{cases}.$$

Отже, потрібно взяти 40 т одного виду сталі і 100 т іншого.

Відповідь. 40 т, 100 т.

5. Інші задачі

Задача 12. Два туристи за два дня пройшли 72 км. Після того як перший турист збільшив швидкість на 15%, а другий – на 25%, то за наступні два дні вони пройшли 86 км. Скільки кілометрів пройшов кожен з них після збільшення швидкості?

Розв'язання:

Нехай перший турист пройшов x км шляху, а другий y км шляху. Після збільшення швидкості перший турист пройшов $x+0{,}15x=1{,}15x$ км, а другий - $y+0{,}25y=1{,}25y$ км. Отже, можемо скласти систему:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ 1{,}15x+1{,}25y=86 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=72-y \\ 1{,}15(72-y)+1{,}25y=86 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=72-y \\ 82{,}8-1{,}15y+1{,}25y=86 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=72-y \\ 0{,}1y=3{,}2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=40 \\ y=32 \end{cases}.$$

Отже, після збільшення швидкості маємо:

$1{,}15\cdot 40=46$ (км) пройшов перший турист;

$86-46=40$ (км) пройшов другий турист.

Відповідь. 46 км, 40 км.

Задача 13. Вологість свіжих яблук дорівнює 99%. Після того як їх підсушили, їх вологість стала 98%. Як змінилася маса яблук?

Розв'язання:

Нехай початкова вага яблук x кг, а підсушених y кг, тоді маємо:

яблука $x\,кг-100\%$,

вода $0{,}99x\,кг-99\%$,

суха речовина $0{,}01x\,кг-1\%$.

Для підсушених яблук маємо наступне:

яблука $y\,кг-100\%$,

вода $0{,}98\,кг-98\%$,

суха речовина $0{,}01x\,кг-2\%$, звідси $y=\dfrac{100\%\cdot 0{,}01x}{2\%}=\dfrac{1}{2}x$. Можемо зробити висновок, що маса яблук зменшиться у 2 рази.

Відповідь. Маса зменшилася у два рази.

Практичне заняття №12
Тема: Множина дійсних чисел. Обчислення виразів. Відсотки. Основні задачі на дроби

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.
5. Тестовий експрес-контроль з теми «Раціональні числа».

Зміст заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) Як утворилась множина дійсних чисел?
2) Що називається модулем дійсного числа?
3) Сформулюйте означення ірраціонального числа?
4) Сформулюйте означення суми (добутку) двох ірраціональних чисел
5) Сформулювати правила додавання, віднімання, множення, ділення дійсних чисел.
6) Які дроби називають нескоротними?
7) Які дроби називають десятковими?
8) Які періодичні десяткові дроби називають чистими? Мішаними?
9) Сформулюйте теорему про можливість подання будь-якого періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного.
10) Сформулюйте правило переведення чистого десяткового дробу у звичайний.
11) Сформулюйте правило переведення мішаного десяткового дробу у звичайний.
12) Назвіть три типи задач на дроби?
13) Сформулюйте алгоритми розв'язування задач на дроби.
14) Що називають відсотком?
15) Перечисліть основні задачі на відсотки та правила, за якими їх розв'язують.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Перетворити звичайні дроби у десяткоів (скінченні чи нескінченні переодичні) і результат перевірити, виконавши обернену операцію:

a) $\frac{5}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{13}, \frac{45}{65};$

b) $\frac{5}{6}, \frac{6}{35}, \frac{9}{26}, \frac{9}{65}.$

2. Знайти алгебраїчну суму:

a) $(2\sqrt{5}) + (-8\sqrt{20}) - (4\sqrt{5}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right);$

b) $\left(2-\sqrt{8}\right)+4-\left(-6\right)+8\sqrt{2}$.

3. Вказати знаки a і b в кожному прикладі:
   a) $(-a)\times(-b)>0$;
   b) $(-a)\div b)>0$;
   c) $a\times\left(-b\right)>0$;
   d) $\left(-5\right)\div\left(-2a\right)>0$;
   e) $a\times b\times(-6)<0$.
4. Розташуйте дроби у порядку зростання: $\frac{2}{6},\frac{12}{3},\frac{3}{12},\frac{10}{20}$.
5. Скільки двадцятих у $\frac{1}{4}$?
6. Скоротити дроби: $\frac{45+5}{45\cdot 5}$; $\frac{17\times 8-12\times 8}{15\times 16}$; $\frac{17\times 8-12\times 8}{80}$.
7. Порівняйте числа: $1\frac{1}{4}$ і 1,(25):
8. Знайдіть 2% від числа 1122; 15% від числа 6750.
9. 32% деякого числа дорівнює 20. Знайдіть це число.
10. Скільки відсотків становить другий доданок від першого, якщо перший доданок становить 60% їх суми?
11. Картопля містить 20 % крохмалю. Скільки крохмалю одержиться із 12 кг картоплі? Скільки картоплі потрібно для одержання 12 кг крохмалю?
12. Три групи школярів зібрали кілька кілограмів шипшини. Перша група зібрала $\frac{3}{10}$загальної кількості, друга – на 4 кг більше ніж третя, причому ця різниця становить $\frac{2}{25}$ усієї кількості зібраної шипшини. Скільки шипшини зібрала кожна група школярів?
13. Три трактори зорали 116 га землі. Скільки гектарів землі зорав кожний трактор, якщо відомо, що $\frac{3}{4}$ площі землі, зораної одним трактором, дорівнює $\frac{1}{2}$ площі землі, зораної другим трактором, і $\frac{2}{3}$ площі землі, зораної третім трактором?
14. У книжці 400 сторінок, 15% з них студент прочитав. Скільки сторінок прочитав студент?
15. Студент прочитав 60 сторінок, що становить 15 % усієї книжки. Скільки сторінок у книжці?
16. У книжці 400 сторінок, з них 60 студент прочитав. Скільки відсотків становлять сторінки, які прочитав студент від усіх сторінок книжки?
17. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені – 10 %. Скільки сушених грибів матимемо із 45 кг свіжих?
18. Початкова ціна товару зменшувалась в два рази: першого разу на 25 %, другого – на 20 %. На скільки відсотків знизилась початкова ціна товару? Чи залежить ця величина від порядку, в якому проводиться зниження?
19. Кавовий напій складається із 20 % кави, 30 % цикорію, 35 % – ячменю і решта – сої. На виготовлення напою використали на 3,5 кг більше ячменю, ніж цикорію. Скільки використали кави для виготовлення напою?

20. Вихід рисової каші становить 33 кг 600 г. Скільки було затрачено рису, якщо дохід становить 180 %?

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання:

1. Повторити теорію, підготуватися до тестового експрес-контролю з тем цілі та раціональні числа.
2. **Розв'язати вправи:**

№1 Перетворіть задані числа у нескоротний звичайний дріб: 0,003; 10,0018; 0,(23); 2, 14(3); 6,041(27).

№2 Між даними числами поставити один з трьох знаків: $<, =, >$:

a) 3,27689… і 3,27701…;

b) 12,04891… і 12,04791…;

c) 49,0110… і 49,00111…;

d) 0,666… і $\frac{2}{3}$.

№3 Розмістити в порядку зростання такі числа: 1,73128…; 1,7314…; 1,7313298…; 1,7311495….

№4 Маса соснової колоди 27,8 кг, а дубової – 45,5 кг. Маса 10 колод – 384,2 кг. Скільки серед колод соснових і скільки дубових?

№5 За літо один ховрашок знищує близько 0,12 ц хліба. Учні навесні знищили 1250 ховрашків. Скільки хліба зберегли учні для господарства?

№6 Троє учнів ремісничого училища мають 22,5 грн, причому $\frac{1}{2}$ суми грошей першого становить $\frac{2}{5}$ суми грошей другого або $\frac{1}{3}$ суми грошей третього. Скільки грошей має кожен учень?

№7 Кукурудза в середньому дає з 1 *га* посіву 665 *ц* зеленої маси, а соняшник – 97 % цієї кількості зеленої маси. Скільки зеленої маси дає соняшник з 1 га?

№8 Знайти число, якщо: 25 % його становлять 16; $33\frac{1}{3}$ % його становлять 120; 5 % його становлять 30; 42 % його становлять 7; 12 $\frac{1}{2}$% його становлять 48; 300 % його становлять 336.

№9 Скільки потрібно взяти молока, щоб отримати 504 кг масла, якщо відомо, що маса вершків становить 21 % маси молока, а маса масла становить 24 % маси вершків?

№ 10 Робітник спочатку витратив $\frac{5}{8}$ своїх грошей, потім $\frac{2}{3}$ остачі. Після цього у нього залишилось на 85 грн менше, ніж витрачено за обидва рази. На $\frac{1}{8}$ залишених грошей робітник купив літературу. Скільки він заплатив за літературу?

Додаткові завдання:

а) **знайдіть область визначення виразу:**

1) $\frac{x-1}{x+5}$; 2) $\frac{4x+13}{(x-3)(x-7)}$;

б) Ребро куба збільшили на 10%. На скільки відсотків збільшився його об'єм?

5. Тестовий експрес-контроль з теми «Раціональні числа».

Розділ 5. Рівняння. Нерівності. Функції

Вирази

Математична мова будується за певними правилами з математичних знаків, що становлять її алфавіт. Алфавіт математичної мови, мови штучної, яка виникла у зв'язку з необхідністю точних, стислих формулювань математичних законів, правил, доведень, які повинні бути зрозумілі однозначно, включає математичні знаки (символи), які можна поділити на 5 класів:

1) знаки об'єктів:
- цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (знаки нумерації для запису чисел у десятковій системі числення); I, V, X, L, X, D, M (знаки римської нумерації);
- букви латинського алфавіту: *A, B, C, ..., X, Y, Z; a, b, c, d, ..., x, y, z* (для позначення змінних, множин, елементів множин, висловлень, геометричних фігур, тощо);
- знаки операцій:
- знаки арифметичних дій: +, -, ×, : ;
- знаки піднесення до степеня і добування кореня: $a^x; \sqrt{a}$
- знаки перерізу і об'єднання множин: $\cup, \cap$; та інші;
- знаки відношень: $<, =, >; \leq; \geq; \vdots; \perp, \sim$ та інші;

2) знаки відображень:
- $f(x), \varphi(x)$ - позначення функції;
- S_l, S_0 - симетрія відносно прямої, відносно центра;

3) допоміжні знаки:
- дужки: { }, [ ], ( );
- кома: « , »; крапка з комою: « ; ».

Є ще багато інших математичних символів. Історично символіка математики створювалась віками завдяки працям видатних вчених.

Наприклад: Діофант (III ст.) ввів позначення змінних величин буквами; прописні букви латинського алфавіту ввів для позначень Р. Декарт (XVII ст.). Знак «дорівнює» (=) вперше ввів Р. Рекорд (XVI ст.), знаки «<», «>» – знаки нерівності, ввів англійський математик Гаріот, хоч самі поняття рівності і нерівності існували з далекої давнини.

Числові вирази. Значення числового виразу

Означення. *Записи, які конструюються з чисел, знаків дій і дужок, називаються **числовими виразами**.*

Кожне дійсне число є числовим виразом. Такі вирази називають елементарними. Якщо *A* і *B* є числові вирази, то *A + B, A – B, A ·B, A :B* також є числовими виразами.

Наприклад: записи 4 + 6, 45 ÷ 5, 72 – 34, 25 × 4 є числові вирази, які називаються відповідно сума, частка, різниця, добуток.

Якщо в числовому виразі виконати всі зазначені дії, то дістанемо число, яке називається значенням числового виразу.

Так, значення числового виразу 32 + 18 : 3 дорівнює 38.

Не будь-який числовий вираз має значення.

Наприклад: вираз $75:(12-4\cdot 3)$ не має числового значення, бо ділення на нуль неможливе. Про такі вирази говорять, що вони не мають смислу.

З числовими виразами учні ознайомлюються ще у 1 класі. У 2 класі ці знання систематизуються при вивчені теми «Числові вирази». Учні вчаться читати, записувати, порівнювати вирази, обчислювати їх значення, записувати розв'язання задачі виразом.

Наприклад, називання (читання) і запис деяких виразів подано в таблиці:

Сума двадцяти і п'яти	20 + 5
Різниця чисел 18 і 9	18 – 9
Добуток трьох чисел, кожне з яких 6	6 · 6 · 6
Частка від ділення суми чисел 24 і 12 на 4	(24 + 12) ÷ 4
Сума числа 16 з часткою чисел 8 і 2	16 + 8 ÷ 2
Зменшуване виражене сумою чисел 39 і 17, від'ємник 16.	(39 + 17) – 16
Сума добутків чисел 15 і 2 та чисел 20 і 2	15 × 2 + 20 × 2

Вирази зі змінною

Означення. Якщо записи складаються з чисел, знаків дій і букв, замість яких можна підставляти числа, то вони називаються виразами зі змінною. Буква у виразі, замість якої підставляються числа, називається змінною. Змінну можна позначити будь-якою буквою латинського алфавіту. Записи $5\cdot a, 81-c\cdot 6$ є виразами зі змінними. Якщо замість букви (змінної) підставляти числа, то будуть отримуватися різні числові вирази. ***Наприклад***, розглянемо вираз зі змінною: $3\cdot a+12$.

Якщо $a=4$, то маємо числовий вираз $3\cdot 4+12$;

якщо $a=10$, то числовий вираз буде $3\cdot 10+12$.

Отже, ***змінна*** – це знак (символ), який можна заміняти числами. Числа, які можна підставляти замість змінної, називаються значеннями змінної, а множина таких чисел називається областю визначення даного виразу. Можна підставляти замість змінної тільки такі її значення, при яких отримується числовий вираз, який має смисл. Так у вираз $\frac{4}{x-3}$ не можна підставити замість x число 3, бо числовий вираз не буде мати смислу. Тобто областю визначення даного виразу є множина $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.

В математиці розглядають вирази, які містять одну, дві, три і т.д. змінні. ***Наприклад:*** $5x+12y; 4c+6b-2a$ тощо.

Отже, числові вирази утворюються з чисел, знаків дій та дужок, а у виразах зі змінними є ще і букви. Числові вирази, вирази зі змінною – це математичні слова, з яких утворюються математичні речення.

Тотожні перетворення виразів

Якщо взяти два вирази 3(2*x* – 5) та (6*x* – 15), то при різних значеннях змінної *x* з множини значень *R* відповідні значення даних виразів будуть рівні. ***Наприклад:***

x	3(2*x* – 5)	6*x* – 15
2	-3	-3
5	15	15
0	-15	-15
0,5	-12	-12

Можна показати, що при будь-яких значеннях *x* з множини *R* відповідні значення виразів рівні. Застосуємо розподільний закон множення відносно додавання та розкриємо дужки: 3(2*x* – 5) = 6*x* – 5, тобто бачимо, що перший вираз зводиться до другого. У таких випадках кажуть, що вирази тотожно рівні на множині дійсних чисел.

Означення. *Два вирази називаються* ***тотожно рівними****, якщо при будь-яких значеннях змінної з області визначення виразів їх відповідні значення рівні.*

Рівність, яка правильна при будь-яких значеннях змінної, називається тотожністю.

Тотожностями є всі правильні числові рівності. Прикладами тотожностей є закони додавання, множення, правила віднімання, ділення: $a+b=b+a; a\cdot b=b\cdot a; a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c; (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c); (a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$ тощо. Тотожностями є правила дій з нулем і одиницею: $0\cdot a=0; 1\cdot a=a; a:a=1$ тощо. Прикладами тотожностей є відомі формули скороченого множення: $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b); (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ тощо.

Означення. Тотожними перетвореннями виразів *називається послідовний перехід від одного виразу до іншого, що тотожно дорівнює йому.*

Прикладами тотожних перетворень є:

а) розклад многочлена на множники різними способами – це винесення за дужки спільного множника, яке здійснюється на основі розподільного закону множення відносно додавання; групування, яке здійснюється на основі переставного і сполучного законів додавання; застосування формул скороченого множення тощо;

б) зведення подібних;

в) виконання дій з дробами; скорочення дробів або зведення дробів до спільного знаменника тощо.

В початковій школі виконують тотожні перетворення тільки числових виразів. Їх теоретичною основою є застосування законів множення, додавання, різних правил: додавання суми до числа чи числа до суми; віднімання суми від числа чи числа від суми та інших.

Наприклад: $27 \cdot 3 = (20 + 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 60 + 21 = 81$;

$64 : 16 = 64 : (8 \cdot 2) = (64 : 8) : 2 = 8 : 2 = 4.$

Числові рівності, властивості істинних числових рівностей

Означення. *Два числові вирази a і b, сполучені знаком «=» (дорівнює) називають **числовою рівністю** і позначають через a = b.*

Наприклад: 2 + 5 = 7; 24 : 6 + 1 = 3.

Кожна числова рівність – це висловлення, яке може бути істинним або хибним. Числова рівність є істинною, якщо числові значення виразів,що стоять в лівій і правій частинах, рівні.

Властивості істинних числових рівностей

Відношення «дорівнює» на множині R володіє властивостями:

1) рефлективності: $(\forall a)\ (a = a), a \in R$
2) симетричності: $(\forall a)\ (\forall b)\ (a = b) \Rightarrow (b = a), a, b \in R$
3) транзитивності: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a = b \wedge b = c) \Rightarrow (a = c), a, b, c \in R$

Отже, це відношення є відношенням еквівалентності.

5) монотонність множення : $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c), a, b, c \in R$

(Якщо обидві частини істинної числової рівності помножимо на один і той же числовий вираз, який має смисл, то отримаємо також істинну числову рівність).

Числові нерівності, властивості істинних числових нерівностей

Означення. *Два числові вирази a і b, сполучені знаками «>» (більше) або «<» (менше) називають **числовою нерівністю**: a > b або a < b – числові нерівності.*

Наприклад: 45 > 23 + 12; 5 · 7 < 5 · 8; 200 < 300 – 100.

Нерівності – це також висловлення, які можуть бути істинними або хибними.

Властивості істинних числових нерівностей

Відношення «менше» на множині R володіє властивостями:

1) антисиметричності: $(\forall a)\ (\forall b)\ (a < b) \Rightarrow \overline{b < a}$, $a, b \in R$;
2) транзитивності: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ \ (a < b \wedge b < c) \Rightarrow (a < c), a, b, c \in R$;
3) монотонність додавання: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ (a < b \Rightarrow a + c < b + c), a, b, c \in R$;

(Якщо до обох частин істинної числової нерівності додати один і той же числовий вираз, який має смисл, то отримаємо також істинну числову нерівність.)

4) монотонність множення: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c > 0)\ (a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c), a, b, c \in R$

(Якщо обидві частини істинної числової нерівності помножимо на один і той же числовий вираз, який має смисл і приймає додатні значення, то отримаємо також істинну числову нерівність).

5) монотонність множення: $(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c < 0)\ (a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c), a, b, c \in R$

(Якщо обидві частини істинної числової нерівності помножимо на один і той же числовий вираз, який має смисл і приймає від'ємні значення, то, щоб отримати істинну числову нерівність, необхідно знак нерівності змінити на протилежний).

Практичне заняття №13

Тема: Числові вирази. Числові рівності та нерівності. Вирази зі змінними. Тотожні перетворення виразів

План заняття

1. Аналіз результатів тестового експрес-контролю, постановка завдань для самокорекції.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. Аналіз результатів тестового експрес-контролю, постановка завдань для самокорекції.

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) Що розуміють у математиці під числовим виразом?
2) Як називаються числа числового виразу?
3) Який вираз називається виразом зі змінною?
4) Чим регулюється порядок операцій у числовому виразі?
5) За яких умов числовий вираз не має змісту?
6) Що називається числовим значенням числового виразу?
7) Які числові вирази називаються рівними?
8) Які числові вирази називають істинними?
9) Як визначаються більші (менші) числові вирази?
10) Що називається числовою рівністю?
11) Що називається числовою нерівністю?
12) Які відношення на множині числових рівностей є відношеннями строгого порядку?
13) Які нерівності називають нерівностями однакового смислу?
14) Назвіть властивості істинних числових нерівностей.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Які записи є числовими виразами:

1) 3 × 5 + 4;
2) $3x + 5$;
3) 6 + 8 – ;
4) 27;
5) 3+ 2 – 10;
6) : 1,5.

2. Обчисліть значення числового виразу:

1) $((36:2-14)\cdot(42\cdot 2-14)+20):2$;
2) $(72:12-(18-15)):(24:3-2\cdot 4)$;
3) $(16{,}583:7{,}21+54{,}68\cdot 853{,}2+28{,}82\cdot 0{,}1):1{,}6-1{,}02$;
4) $\left(5{,}05:\frac{1}{40}-2{,}8\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot 3+16\cdot 0{,}1875$;
5) $\left(1{,}75\cdot\frac{2}{5}+1{,}75:1\frac{1}{8}\right)\cdot 1\frac{5}{7}:\left(\left(\frac{17}{40}-0{,}325\right):\frac{1}{5}\cdot 0{,}4\right)$;
6) $(-2{,}09:1{,}1+4{,}5)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)-4{,}32-3{,}68$

3. Розставити дужки в запису 54 – 36 : 2 + 4 так, щоб отримані числові вирази мали значення:

1) 13; 2) 3; 3) 32; 4) 48; 5) 40.

4. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{x-1}{x+5}$;
2) $\frac{4x+13}{(x-3)(x-7)}$;
3) $\frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)}$;
4) $\sqrt{a+3}$;
5) $\frac{8}{\sqrt{y-4}}$;
6) $\frac{15x-8}{(2x+1)(x^3+1)}$;
7) $\frac{x+1}{4-x^2}$;
8) $\frac{5}{1-\lg x}$.

5. Спростити вирази:

1) $3(x+4)-3x$;
2) $6(2ab-3)+2a(6b-5)$;
3) $\frac{x^2-5x}{x+2}:\frac{x^2-25}{x^2-4}$;

4) $\frac{3-2m}{m-7n}+\frac{4-2m}{m^2-49n^2}$;

5) $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)$;

6) $\frac{5x^3-5}{x+2}\div\frac{(x+1)^3-x}{13x+26}$;

7) $\left(\frac{x-3}{x^2-3x+9}-\frac{6x-18}{x^3+27}\right)\div\frac{5x-15}{4x^3+108}$.

6. Знайдіть значення виразу раціональним способом:

1) $\frac{518^2-482^2}{360}$; 2) $\frac{87^2-39^2}{19^2-37^2}$; 3) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{75}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{45}\right)^2$.

7. Довести тотожності:

1) $(x-y)\times(x+y)^3=x(x-2y)^3+y(2x-y)^3$.

2) $x\times(y+z)^2+y\times(z+x)^2+z\times(x+y)^2-4xyz=(x=y)\times(y+z)\times(x+z)$

.

8. Розв'язати задачі, склавши числові вирази:

1) На виготовлення 32 столових і 60 чайних ложок пішло 3 кг 400 г срібла. Маса однієї столової ложки на 20 г більша від маси однієї чайної. Яка маса всіх столових ложок?

2) На одне поле привезли для сівби 45 мішків пшениці, а на друге – 69 мішків, причому відомо, що на друге поле привезли на 1 т 920 кг збіжжя більше. Знайти масу пшениці, яку привезли на обидва поля разом.

3) Два поїзди вийшли одночасно назустріч один одному. Перший поїзд рухався із швидкістю 65 км/год., а другий – 70 км/год. і пройшов до зустрічі 280 км. Яка відстань була між поїздами до початку руху?

4) За зміну робітник виготовив 18 деталей виду А і 20 деталей виду В, на які пішло 4 кг 800 г металу. Маса деталі виду В на 50 г більша від маси деталі виду А. Яка маса виготовлених деталей виду А?

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал.
2. Підготуватися з теоретичних питань по темі «**Рівняння й нерівності з однією та двома змінними та їх системи**».
3. **Розв'язати вправи.**

№1 Пропливши на човні 9 км проти течії річки, турист вернувся назад на плоті. Скільки часу він затратив на всю мандрівку, якщо відомо, що швидкість човна в стоячій воді дорівнює 6 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год?

№2 Є запас сіна, який складено в 10 копиць, по 450 $м^3$ кожний, і в 15 копиць – по 540 $м^3$. Маса 1 $м^3$ сіна становить 52 кг. На яку кількість корів вистачить цього сіна, якщо денна норма для однієї корови становить 10 кг сіна, а період годівлі сіном – 180 днів?

№3 Знайти значення числових виразів у множині дійсних чисел:

a) $\frac{(6{,}25-3{,}75)\times0{,}8}{(4-2{,}75)\div6{,}26}$;

b) $\frac{(2{,}5+0{,}75)\div3{,}75}{(40-38{,}8)\times5}$;

c) $\left((2{,}37+3{,}03):0{,}09+12\frac{3}{5}:\frac{2}{11}-\left(57{,}9+\frac{13}{20}\right)\right):0{,}5$.

№4 Знайти область визначення виразів:

a) $\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}$;

b) $\sqrt[3]{8-x^3}$;

c) $\frac{x-1}{x+5}$.

№5 Перевірити істинність нерівностей:

a) $\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{14}\right)\times2{,}5-6\frac{1}{5}\div\left(1-\frac{2}{5}\right)<\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\right)\times1{,}8+12\frac{3}{4}\div2\frac{1}{8}$;

b) $1{,}25+3{,}839-0{,}001>5\div(3{,}753\div3-0{,}1251\times2\times5)$;

c) $1982>(1+9+8+2)\times(1^2+9^2+8^2+2^2)$.

№6 Спростити вираз: $2x\times(2x+3)^2-(2x-3)\times(4x^2+6x+9)$.

Рівняння й нерівності та їх системи. Рівняння лінії, кола, прямої

Рівняння з однією змінною

Якщо взяти два вирази зі змінними $2x+3$ і $5x-9$ і з'єднати їх знаком «=», то отримаємо речення $2x+3=5x-9$. Воно містить змінну *x*. Якщо замість змінної *x* підставити певні значення, то речення перетвориться у висловлення, які можуть бути істинними або хибними. Так, якщо *x* = 4, то висловлення $2\cdot4+3=5\cdot4-9$ істинне; якщо *x* = 3, то висловлення $2\cdot3+3=5\cdot3-9$ хибне. Тому речення $2x+3=5x-9$ є висловлювальна форма.

Означення. Нехай *F (x)* і *G (x)* – два вирази зі змінною *x* і областю визначення *X*. Тоді висловлювальна форма виду *F (x)* = *G (x)* називається ***рівнянням з однією змінною,*** *а множина X* ***– його областю визначення.***

Вирази *F (x)* і *G (x)* називають відповідно лівою і правою частинами рівняння. (Термін «рівняння» тут і далі в даній частині означає «рівняння з однією змінною»).

Значення змінної *x* із множини *X*, при якому рівняння перетворюється у істинну числову рівність, називається ***коренем*** або ***розв'язком рівняння***.

Розв'язати рівняння – значить знайти множину розв'язків (коренів) рівняння.

Щоб розв'язати рівняння, його перетворюють, використовуючи теореми про рівносильність рівнянь або тотожні перетворення виразів. Цей процес продовжують доти, поки не дістануть рівняння. Розв'язки якого можна знайти відомим способом. Проте щоб ці розв'язки були розв'язками заданого рівняння, необхідно, щоб в процесі перетворення діставали так звані рівносильні рівняння.

Рівносильність рівнянь з однією змінною

Означення. Два рівняння називаються ***рівносильними*** (або говорять, що одне з них рівносильне другому), *якщо області визначення збігаються і множини розв'язків їх рівні між собою*.

Наприклад:

1. рівняння $2(x-1)=2x+1$ і $x+1=(2x-2)\div 2$ – рівносильні, оскільки для кожного з них областю визначенння є множина *R*, а множиною розв'язків є $\varnothing$.
2. рівняння $7x-3=4$ і $7x-1=6$ рівносильні на множині *R*, бо множина коренів першого рівняння $\{1\}$ і множина коренів другого рівняння$\{1\}$, тобто множини коренів рівні.

Теорема 1. Нехай рівняння *F (x) = G (x)* задано на множині *X* і *H (x)* – вираз, який визначений на тій же множині *X*. Тоді рівняння $F(x)+H(x)=G(x)+H(x)$ і дане рівняння *F (x) = G (x)* рівносильні.

Доведення. Нехай T_1 множина розв'язків рівняння (1), а T_2 множина розв'язків рівняння (2). Покажемо, що множини коренів рівні.

Нехай число *a* є коренем рівняння (1). Тоді $a\in T_1$ і при підстановці у рівняння (1) обертає його у істинну числову рівність: *F (a) = G (a)*, а вираз *H (x)* у числовий вираз $H(a)$. Додамо до обох частин рівності *F (a)* = G *(a)* вираз $H(a)$. Отримаємо істинну числову рівність $F(a)+H(a)=G(a)+H(a)$, а це означає, що *a* є коренем рівняння (2). Отже, кожен корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2). Аналогічно можна показати, що кожен корінь $b\in T_2$ рівняння (2) є коренем рівняння (1). За доведенням ,$T_1=T_2$ і дані рівняння рівносильні.

Теорема 2. Нехай рівняння *F (x) = G (x)* задано на множині *X* і *H (x)* – вираз, який визначений на тій же множині *X* і який не перетворюється на нуль ні при яких значеннях *x* із множини *X*. Тоді рівняння $F(x)\cdot H(x)=G(x)\cdot H(x)$ і дане рівняння $F(x)=G(x)$ рівносильні.

Доведення аналогічне до доведення першої теореми.

При розв'язуванні рівнянь частіше використовуються не самі теореми, а наслідки з них.

Наслідки з теорем про рівносильність рівнянь

До теореми 1

1. Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

До теореми 2

3. Якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на одне і те саме число, відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад: Розв'язати рівняння: $\frac{7x+4}{2}-\frac{3x-2}{3}=x$

1. Зведемо до спільного знаменника вираз у лівій частині рівняння. Це тотожне перетворення виразу. Дістанемо рівняння, рівносильне даному:

$\frac{21x+12-6x+4}{6}=x$.

2. Зведемо подібні доданки. Це тотожне перетворення виразу. Дістанемо рівняння, рівносильне даному: $\frac{15x+16}{6}=x$.

3. За наслідком (3) з теорем про рівносильність рівнянь помножимо обидві частини рівняння на 6. Дістанемо рівняння, рівносильне даному:

$15x+16=6x$.

4. За наслідком (1) з теорем про рівносильність рівнянь перенесемо вираз $6x$ з правої частини рівняння в ліву, а число 16 – з лівої частини рівняння в праву, змінивши їх знаки на протилежні. Дістанемо рівняння, рівносильне даному:

$15x-6x=-16$.

5. Зведемо подібні в лівій частині рівняння. Це тотожне перетворення, тому дістанемо рівняння, рівносильне даному: $9x=16$.

6. Поділимо ліву і праву частини рівняння на 9. За наслідком (3) дістанемо рівняння рівносильне даному: $x=\frac{16}{9}$; $x=1\frac{7}{9}$.

Отже, множина розв'язків рівняння складається з одного числа $1\frac{7}{9}$, тобто $\{1\frac{7}{9}\}$.

В початковому курсі математики розглядаються найпростіші рівняння виду: $x+a=b$; $x-a=b$; $a-x=b$; $x:a=b$; $a:x=b$, де a і b – цілі невід'ємні числа, x – змінна та рівняння на дві дії. Поняття рівняння вводиться неявно, через текст, тобто контекстуально. Розв'язуються такі рівняння в початковій школі на основі знань учнів залежностей між компонентами і результатом дій.

Наприклад: Розв'язати рівняння: $(x+4):3=12$.

Невідоме знаходиться у діленому.

Щоб знайти ділене, треба частку помножити на дільник. Дістанемо рівняння: $x+4=36$.

Невідомий перший доданок; щоб його знайти, треба від суми відняти другий доданок. $x=36-4$; $x=32$.

Отже, розв'язком рівняння є число 32.

Нерівності з однією змінною

Означення. *Нехай F (x) і G (x) – два вирази зі змінною x і областю визначення X. Тоді висловлювальні форми виду F (x) > G (x) або F (x) < G (x) називаються* ***нерівностями з однією змінною****.*

Значення змінної x із множини X, при якому нерівність перетворюється у істинну числову нерівність називається ***розв'язком нерівності.***

Розв'язати нерівність – означає знайти множину розв'язків даної нерівності.

В основі розв'язання нерівностей першого степеня з однією змінною лежать теореми про рівносильність нерівностей.

Рівносильність нерівностей з однією змінною

Означення. Дві нерівності *називаються* ***рівносильними****, якщо їх множини розв'язків рівні.*

Наприклад, нерівності $3x-4>5$ і $3x>9$ рівносильні, бо їх множини розв'язків рівні і є числовим проміжком $(3;+\infty)$.

Теореми про рівносильність нерівностей схожі з теоремами про рівносильність рівнянь, і доведення їх аналогічне до доведення теореми 1 рівносильності рівнянь.

Теорема 3. Нехай нерівність $F(x) > G(x)$ задана на множині X і $H(x)$ – вираз, який визначений на тій же множині X. Тоді нерівність $F(x)+H(x)>G(x)+H(x)$ і дана нерівність $F(x) > G(x)$ рівносильні.

Теорема 4. Нехай нерівність $F(x) > G(x)$ задана на множині X і $H(x)$ – вираз, який визначений на тій же множині X і для всіх значень x з множини X $h(x)>0$. Тоді нерівність $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ і дана нерівність $f(x)>g(x)$ рівносильні на множині X.

Теорема 5. Нехай нерівність $f(x) > g(x)$ задана на множині X і $h(x)$ – вираз, який визначений на тій же множині X і для всіх значень x з множини X $H(x)<0$. Тоді нерівність $F(x)\cdot H(x)<G(x)\cdot H(x)$ і дана нерівність $F(x)>G(x)$ рівносильні на множині X.

При розв'язуванні нерівностей з однією змінною першого степеня використовують наслідки з теорем про рівносильність нерівностей.

Наслідки з теорем про рівносильність нерівностей

До теореми 3

1. Якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.
2. Якщо в нерівності перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

До теореми 4

Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне і те саме додатне число, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

До теореми 5

Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне і те саме від'ємне число і знак нерівності змінити на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

Наприклад:

1. Розв'яжемо нерівність: $5+4x>2x+11$.

а) Перенесемо доданок $2x$ у ліву частину нерівності, а доданок 5 у праву, змінивши їх знаки на протилежні: $4x-2x>11-5$.

За наслідком 2 з теореми 3 дістанемо нерівність, рівносильну даній.

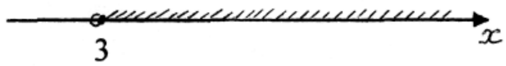
б) Виконаємо тотожне перетворення – зведемо подібні: $2x>6$.

Дістали нерівність, рівносильну попередній, а отже і даній.

в) Поділимо ліву і праву частини нерівності на число 2: $x > 3$

За наслідком з теореми 4 дістанемо нерівність, рівносильну попередній, отже і даній.

Отже, розв'язком нерівності є проміжок $(3; \infty)$.



2. Розв'яжемо нерівність: $6(2x-3)-3(5x+8) \ge 10x-3$

Розв'язання.

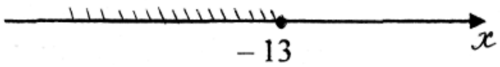
$12x-18-15x-24 \ge 10x-3$

$12x-15x-10x \ge -3+24+18$

$-13x \ge 39$

$x \le -13$

Отже, множиною розв'язків нерівності є проміжок $(-\infty; -13]$



У початкових класах розглядаються лише найпростіші нерівності. Вони розв'язуються такими способами: методом підбору; на основі залежностей між компонентами та результатом дій; зведенням нерівності до рівності.

Наприклад: При яких значеннях букви *a* правильна нерівність $a+64<90$.

Міркуємо так: зводимо до рівності, рівняння $a+64=90$ перетворюється у правильну рівність при $a=26$ $(90-64=26)$. Щоб сума $a+64$ була менше 90, потрібно взяти $a<26$ (якщо один доданок сталий, а другий зменшити, то і сума зменшиться).

Отже, на множині цілих невід'ємних чисел множиною розв'язків нерівності є множина $A=\{0,1,2,3,...,25\}$.

Рівняння з двома змінними. Рівняння лінії та кола

Якщо група туристів йшла пішки *x* год зі швидкістю 5 км/год, а друга група туристів йшла пішки *y* год зі швидкістю 4 км/год, то разом вони пройшли $5x + 4y$ км. Якщо в задачі сказано, що шлях, пройдений обома групами, дорівнює 46 км, то можна записати $5x + 4y = 46$.

Дістали рівняння з двома змінними. Однозначно знайти з цього рівняння *x* і *y* не можна. Так, якщо $x = 4$, то $y = 6{,}5$, а якщо $x = 5$, то $y = 5{,}25$ і т. д.

Рівняння з двома змінними *x* і *y* є двомісною висловлювальною формою. Кортеж (*a*, *b*), що складається з дійсних чисел, називають *розв'язком цього рівняння,* якщо при заміні *x* на *a* і *y* на *b* дістають істинну числову рівність.

Кожному рівнянню відповідає певна множина розв'язків, тобто множина, яка складається з його розв'язків.

Упорядковану пару чисел (*a; b)* можна зобразити на координатній площині точкою *M,* що має координати *a* і *b,* тобто М = М (*a*; *b).*

Означення. *Зображення множини розв'язків рівняння є деякою підмножиною координатної площини. її називають* ***графіком рівняння****.*

Як правило, множина розв’язків рівняння з двома змінними є множиною потужності континуум. Тому, виходячи з неможливості побудови всіх точок графіка цього рівняння, застосовують геометричний спосіб його опису.

Наприклад:

1. Графіком рівняння $x–y=0$ є бісектриса першого і третього координатних кутів.

Справді, множина розв’язків цього рівняння складається з тих пар дійсних чисел $(a; b)$, в яких $a = b$, тобто з пар виду $(a;a)$, $a \in R$. Їх зображають ті і тільки ті точки координатної площини, які належать бісектрисі першого й третього координатних кутів (рис. 1). Отже, ця лінія і є графіком заданого рівняння.

2. Графіком рівняння $x + y = 0$ в бісектриса другого й четвертого координатних кутів (рис. 2).

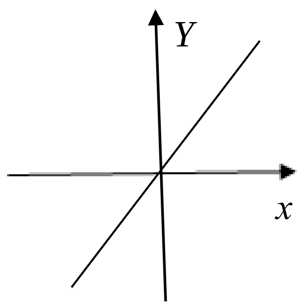


Рис. 1

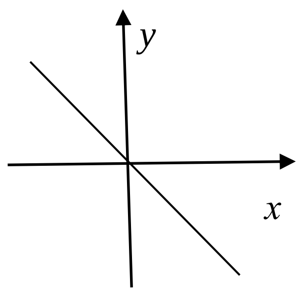


Рис. 2

3. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 0$ є єдина точка O (0; 0).

Про рівняння такого типу говорять, що воно має єдиний розв’язок, або що множиною його розв’язків е одноелементна множина (вона складається з єдиного кортежу (0; 0)).

4. Рівняння $x^2 + y^2 +1 = 0$ ніякого геометричного образу на координатній площині не має.

Про рівняння такого типу говорять, що воно не має розв’язків, або що множиною його розв’язків є $\varnothing$.

Означення. *Два рівняння, що мають однакові множини розв’язків, або однакові графіки, називаються* ***рівносильними****.*

Так, рівняння $x – y = 0$ і $5x = 5y$ рівносильні.

Теореми про рівносильність рівнянь з однією змінною та наслідки з них переносяться й на рівняння з двома змінними. Пропонуємо сформулювати ці теореми самостійно.

Рівнянням лінії, що лежить на координатній площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, графіком якого є ця лінія.

Так, рівнянням бісектриси першого й третього координатних кутів є рівняння $y = x$, а рівнянням бісектриси другого й четвертого координатних кутів є рівняння $y = – x$.

Теорема 6. Графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ в якому a, b, R – деякі числа і $R > 0$, є коло з центром $C (a;b)$ і радіусом R. Навпаки, рівнянням кола з центром $C (a;b)$ і радіусом R є рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Лема 1. Квадрат відстані d між точками $M_1\ (x_1;\ y_1)$ і $M_2\ (x_2;\ y_2)$ визначається рівністю $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Наприклад:

1. Записати рівняння кола з центром С (–2; 3) і радіусом $R = 5$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 14.6, шуканим рівнянням є рівняння

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Це рівняння можна записати інакше, розкривши дужки і звівши подібні члени $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 5$.

Отриманні рівняння рівносильні.

2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$ є рівнянням кола. Знайти центр і радіус цього кола.

Розв'язання. Щоб застосувати останню теорему, треба задане рівняння перетворити до рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Виконаємо це перетворення методом виділення повних квадратів. Оскільки $x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 16) - 16 = (x - 4)^2 - 16$ і $y^2 + 10y = (y^2 + 10y + 25) - 25 = (y + 5)^2 - 25$, то $(x - 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 + 5 = 0$.

Звідси $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 6^2$.

Останнє рівняння, згідно за теоремою 14.6 і означенням рівняння лінії, є рівнянням кола з центром C (4; –5) і радіусом $R = 6$. Тому задане рівняння є рівнянням цього кола.

Рівняння прямої

Нехай на координатній площині xy задано деяку пряму l. Щоб говорити про рівняння цієї прямої, треба задати умови, які визначають положення l відносно осей x і y.

Введемо поняття *кутового коефіцієнта* прямої, що є однією з величин, які визначають положення прямої на площині.

Означення. Кутом нахилу *прямої l до осі* x *називають той найменший невід'ємний кут α, на який треба повернути вісь* x, *щоб вона збіглася з прямою l або стала паралельною їй.* Зрозуміло, що $0 < \alpha < \pi$.

Величину k, що визначається рівністю $k = \mathrm{tg}\alpha$, називають ***кутовим коефіцієнтом прямої l.***

Кутовий коефіцієнт k характеризує напрямок прямої l (тут не розрізняємо двох протилежних напрямків прямої). Якщо $k = 0$, то пряма l паралельна осі x, при $k > 0$ α кут – гострий (рис. 3), а при $k < 0$ кут α – тупий (рис. 4). Зауважимо, що коли пряма l перпендикулярна до осі x, то вона не має кутового коефіцієнта (тангенс кута – не існує).

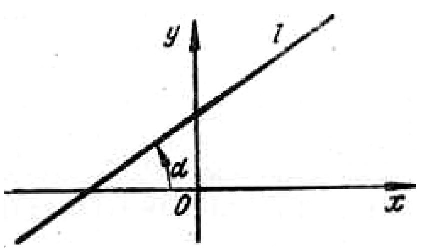


Рис. 3

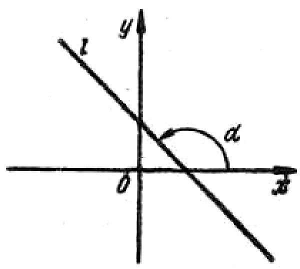


Рис. 4

Введемо тепер поняття *початкової ординати* прямої, що є також однією з величин, які визначають положення прямої на площині.

Якщо пряма l відмінна від прямих, перпендикулярних до осі x, то вона перетинає вісь y в єдиній точці, яку позначимо через B (0; b) (рис. 5):

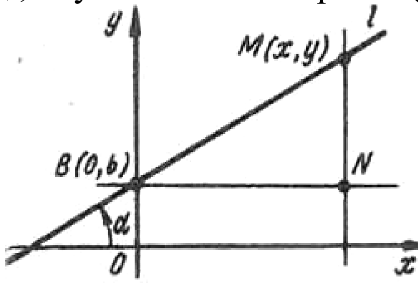


Рис. 5

Число b *називають* початковою ординатою прямої l.

Отже, якщо пряма l відмінна від прямих, перпендикулярних до осі x, то її положення на площині однозначно визначається її кутовим коефіцієнтом k і початковою ординатою b.

Теорема 7. Графіком рівняння $y=kx+b$, де k і b – деякі числа, є пряма з кутовим коефіцієнтом k і початковою ординатою b. Навпаки, рівнянням прямої, кутовий коефіцієнт і початкова ордината якої дорівнює відповідно k і b, є рівняння $y=kx+b$.

Доведення. Доведемо спочатку першу частину теореми. Нехай l – пряма з кутовим коефіцієнтом k і початковою ординатою b; M $(x; y)$ – довільна точка цієї прямої серед тих її точок, які відмінні від точки B (0; b) – точки перетину прямої l з віссю y; нехай а – кут нахилу прямої l до осі x (кутовий коефіцієнт прямої однозначно визначає її кут нахилу до осі x).

Якщо $k\neq 0$ (пряма l не паралельна осі x), то через точку B проведемо пряму, паралельну осі x, а через точку M – пряму, паралельну осі y. Позначимо через N точку перетину їх (рис. 5). Тоді з прямокутного трикутника BMN дістаємо

$$\frac{y-b}{x}=\operatorname{tg}\alpha .$$

Доведіть це самостійно, розглянувши всі можливі випадки, що визначаються знаком числа k, взаємним розміщенням точок 0 і B на осі y та взаємним розміщенням точок B і M на прямій l. Оскільки, згідно з умовою, $k=\operatorname{tg}\alpha$, то $y=kx+b$.

Якщо $k = 0$ (пряма l паралельна осі x або збігається з нею), то точки прямої l мають однакові ординати, які дорівнюють b. Тому й для точки M маємо $y = b$, або $y = 0 \times x + b$

Рівності $y=kx+b$ і $y=0\times x+b$ показують, що точка M $(x; y)$ належить графіку рівняння $y=kx+b$. Зрозуміло, що й точка B (0; b) також належить графіку рівняння $y=kx+b$. Отже, всі точки прямої l належать графіку рівняння $y=kx+b$.

Нехай тепер M $(x; y)$ – деяка точка графіка рівняння $y=kx+b$. Тоді $y = kx + b$ є істинна числова рівність. Покажемо, що точка M належить і прямій l. Справді, на цій прямій є точка M_1 з абсцисою x. Ордината y_1 цієї точки дорівнює, як було показано вище, $kx + b$. Тоді $y = y_1$ і точки M і M_1 збігаються, а це означає, що точка M належить прямій l. Отже, всі точки графіка рівняння $y=kx+b$ належать прямій l.

Таким чином, справедливість першої частини теореми доведено.

Справедливість другої частини теореми випливає з її першої частини та означення рівняння лінії.

Теорему доведено.

Говорять, що дана лінія описується (задається) якимось рівнянням, якщо останнє є рівнянням цієї лінії.

Рівняння прямої $y=kx+b$ називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.* Рівняннями такого типу описуються, як було показано вище, прямі, що не перпендикулярні до осі абсцис.

Наприклад:

1. Скласти рівняння прямої, що має кут нахилу $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і початкову ординату $b= -1$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт k даної прямої дорівнює l. Оскільки початкова ордината цієї прямої дорівнює –1, то, згідно з теоремою 14.7, її рівнянням є$y = x - 1$.

2. Довести, що рівняння $2x - 4y - 3 = 0$ є рівнянням прямої, яка не перпендикулярна до осі x. Знайти кутовий коефіцієнт і початкову ординату цієї прямої.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до виду $y = kx + b$:

$$2x - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Це рівняння, згідно з теоремою 14.7 і означенням рівняння лінії, є рівнянням прямої, кутовий коефіцієнт і початкова ордината якої дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}$ і $-\frac{3}{4}$. Ця пряма не перпендикулярна до осі x. Задане рівняння є також рівнянням вказаної прямої.

Теорема 8. Графіком рівняння $x = a$, в якому a – деяке число, є пряма, перпендикулярна до осі x, абсциса точки перетину якої з віссю x дорівнює a; і навпаки, рівнянням прямої, що перпендикулярна до осі x і перетинає вісь x в точці з абсцисою a, є рівняння $x = a$.

Доведення теореми пропонуємо виконати самостійно.

Як бачимо, рівняннями типу $x = a$ описуються прямі, що перпендикулярні до осі абсцис.

Рівняння виду $Ax+By+C=0$, в якому A, B і C – довільні числа, називається *загальним лінійним рівнянням.* У цьому рівнянні числа A і B називають *коефіцієнтами при змінних*, а число *C – вільним членом.*

Лінійне рівняння, в якому принаймні один з коефіцієнтів при змінних відмінний від нуля, називають *рівнянням першого степеня.*

Твердження: лінійне рівняння $Ax+By+C=0$ при $A = B = 0$ і $C \neq 0$ ніякого геометричного образу на площині не має, а при A = В = С = 0 має графіком всю площину.

Розглянемо тепер рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай дано рівняння $Ax+By+C=0$, в якому $A \times B \times C \neq 0$ (коефіцієнти при невідомих і вільний член відмінні від нуля). Таке рівняння можна звести до деякого спеціального вигляду, який дає змогу легко побудувати пряму, задану цим рівнянням.

Перенісши вільний член C в праву частину рівняння, дістаємо

$Ax + By = –C.$

Розділимо обидві частини рівняння на –С:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

або

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Введемо позначення: $a=-\frac{C}{A}$ і $b=-\frac{C}{B}$. Тоді дістанемо $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Це рівняння називають ***рівнянням у відрізках на осях.***

Наприклад: Дано пряму $3x + 2y + 6 = 0$. Скласти для цієї прямої рівняння у відрізках на осях і побудувати пряму.

Розв’язання. Рівняння у відрізках на осях має вигляд

$$\frac{x}{-2}+\frac{7}{-3}=1$$

Зображення її дістанемо, якщо побудуємо точки K (–2; 0) і L (0; –3) і проведемо через них пряму (рис. 6):

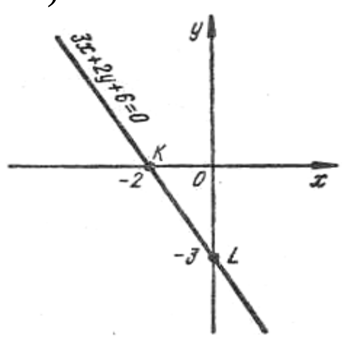


Рис. 6

Системи рівнянь з двома змінними та графічний спосіб розв’язування їх

Рівняння вигляду $5x + 4y = 46$ і $x – y=2$ є двомісною висловлювальною формою. Характеристичні множини (області істинності) цих висловлювальних форм нескінченні. Проте треба знайти такі значення x і y, які задовольняли б обидва рівняння, тобто кон’юнкцію висловлювальних форм $5x + 4y = 46$ і $x – y= 2$: $5x + 4y = 46 \wedge x – y = 2$.

У шкільному курсі математики цю кон'юнкцію записують у вигляді

$$\begin{cases} 5x + 4y = 46 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

і називають системою рівнянь $5x + 4y = 46$ і $x - y = 2$.

Взагалі, системою рівнянь $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$ називають кон'юнкцію цих рівнянь $F_1(x, y) = 0 \wedge F_2(x, y) = 0$,

або $\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$

Будь-яке рівняння з двома змінними x і y рівносильне деякому рівнянню виду $F(x, y) = 0$.

Кортеж (a, b), що складається з дійсних чисел, називають розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$, якщо при заміні x на a і y на b дістанемо істинні числові рівності: $F_1(a, b) = 0$ *і* $F_2(a, b) = 0$.

Означення. ***Розв'язати систему рівнянь*** *означає знайти множину розв'язків цієї системи* $\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$

Як відомо, характеристична множина кон'юнкції двох висловлювальних форм є перерізом характеристичних множин самих висловлювальних форм. Тому множиною розв'язків системи рівнянь є переріз характеристичних множин рівняння $F_1(x, y) = 0$ і рівняння $F_2(x, y) = 0$. Геометрично цю множину можна знайти так. Будуємо графіки рівнянь $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$ і розглядаємо питання про точки їх перетину. Якщо такі точки існують, то координати кожної з них і є розв'язком системи рівнянь. Якщо таких точок не існує, то система рівнянь розв'язків не має. Тоді говорять, що множиною її розв'язків є *0*. Описаний спосіб розв'язування системи рівнянь називають *графічним.*

Наприклад:

1. Розв'язати графічним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Графіками обох рівнянь заданої системи є прямі. Зобразимо ці прямі на координатній площині, звівши спочатку їхні рівняння до рівнянь прямих у відрізках на осях:

$\frac{x}{5} + \frac{y}{2{,}5} = 1$ і $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$ (рис. 7). Побудовані прямі перетинаються в єдиній точці P, координати якої є $x \approx 1$, $y \approx 2$. Підставивши ці значення в задану систему, бачимо, що (1; 2) є її розв'язком. Згідно з рисунком, цей розв'язок – єдиний.

Отже, задана система має єдиний розв'язок (1; 2),

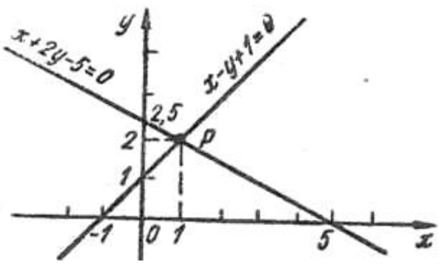


Рис. 7

Системи й сукупності нерівностей з однією змінною

Нерівності з однією змінною є висловлювальними формами, тому можна говорити про кон'юнкції і диз'юнкції їх.

Означення. Системою нерівностей *називають будь-яку кон'юнкцію їх. Термін «нерівність» у цьому пункті означає «нерівність з однією змінною».*

Дійсне число *а* називають *розв'язком* якоїсь системи нерівностей, якщо при заміні змінної в усіх нерівностях цієї системи на *а* дістають лише істинні числові нерівності.

Означення. Розв'язати систему нерівностей *– означає знайти множину розв'язків цієї системи.*

Зрозуміло, що множиною розв'язків системи нерівностей є переріз множин розв'язків усіх нерівностей, що входять у цю систему.

Наприклад:

1. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 5x-4<3x+2 \\ 3(x-2)>x-4 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$5x-4<3x+2 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3$$

і

$$3(x-2)>x-4 \Leftrightarrow 3x-6>x-4 \Leftrightarrow x>1.$$

Рис. 8

Позначимо на координатній прямій множину чисел, що задовольняють нерівність $x < 3$, імножину чисел, що задовольняють нерівність $x > 1$ (рис. 8). Спільними розв'язками обох нерівностей *є* такі значення *х,* що $1 < x < 3$. Отже, множиною розв'язків даної системи нерівностей е проміжок (1; 3).

2. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 5-2x\langle 8x+7 \\ 6(2x-3)-3(5x+8)\rangle 10x-3 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$5-2x\langle 8x+7 \Leftrightarrow x\rangle -\frac{1}{5}$$

і $6(2x-3)-3(5x+8)\rangle 10x-3 \Leftrightarrow x\langle -3$

На координатній прямій (рис. 9) зображено множини чисел, що задовольняють нерівності.

Ці множини не мають спільних елементів, тому задана система нерівновтей розв'язків не має, тобто множиною розв'язків їх є Ø.

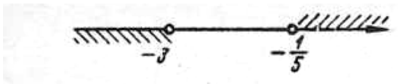


Рис.9

3. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x-1\rangle x+1 \\ 10-3x\langle -5 \\ \dfrac{3x-1}{5}\rangle 4 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$2x-1\rangle x+1 \Leftrightarrow x\rangle 2$

$10-3x\langle -5 \Leftrightarrow 3x\rangle 15 \Leftrightarrow x\rangle 5$

Позначимо на координатній прямій (рис. 10) множини чисел, що задовольняють нерівності $x > 2$, $x > 5$ і $x > 7$. Спільними' розв'язками усіх трьох нерівностей системи є такі значення, що задовольняють умову $x > 7$. Отже, множиною розв'язків даної системи нерівностей є проміжок (7; $+\infty$).

Рис.10

Сукупністю нерівностей називають будь-яку диз'юнкцію їх.

Означення. *Дійсне число* а *називають* ***розв'язком сукупності нерівностей****, якщо при заміні змінної в усіх нерівностях цієї сукупності на* а *дістають принаймні одну істинну числову нерівність.*

Розв'язати сукупність нерівностей – означає знайти множину розв'язків цієї сукупності.

Як відомо, характеристична множина диз'юнкції довільної скінченної кількості висловлювальних форм є об'єднанням всіх характеристичних множин самих висловлювальних форм. Тому множиною розв'язків сукупності нерівностей є об'єднання множин розв'язків усіх нерівностей, що входять у цю сукупність.

Наприклад:

1. Розв'язати сукупність нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-4\langle 3x+2 \\ 3(x-2)\rangle x-4 \end{array}\right.$$

Розв'язання. Множини розв'язків обох нерівностей було знайдено вище (див. рис. 8). Отже, об'єднанням множин розв'язків,нерівностей розглядуваної сукупності є множина *R*. Множиною розв'язків заданої сукупності нерівностей є множина *R*.

2. Розв'язати сукупність нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x-3\rangle 3-2x \\ \dfrac{x-7}{8}\rangle \dfrac{17-2x}{2} \\ \dfrac{x-12}{4}\rangle 12-x \end{array}\right.$$

Розв'язання. Маємо:

$$x-3\rangle 3-2x \Leftrightarrow 3x\rangle 6 \Leftrightarrow x\rangle$$

$$\frac{x-7}{8}\rangle \frac{17-2x}{2} \Leftrightarrow x-7\rangle 4(17-2x) \Leftrightarrow x-7\rangle 68-8x \Leftrightarrow 9x\rangle 75 \Leftrightarrow x\rangle 8\frac{1}{3}$$

і

$$\frac{x-12}{4}\rangle 12-x \Leftrightarrow x-12\rangle 48-4x \Leftrightarrow 5x\rangle 60 \Leftrightarrow x\rangle 12$$

Позначивши на координатній прямій множини чисел *x,* що задовольняють нерівності $x > 2$, $x > 8\frac{1}{3}$ і $x > 12$ (рис. 11), бачимо, що множиною розв'язків заданої сукупності нерівностей є проміжок $(2; +\infty)$.

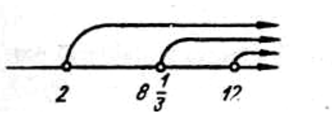


Рис. 11

Нерівності та системи нерівностей з двома змінними. Графічний спосіб розв'язування їх

Відношення між числами *x* і *y* можна виразити не тільки за допопомогою рівнянь, а й за допомогою нерівностей. Прикладами нерівностей з двома змінними є: $x - 2y + 1 < 0$, $x^2 - 4x > 3 - y^2$.

Нерівність з двома змінними *x* і *y* є двомісною висловлювальною формою. Кортеж *(a, b),* що складається з дійсних чисел, називають *розв'язком* цієї нерівності, якщо при заміні *x* на *a* і *y* на *b* дістають істинну числову нерівність.

Кожній нерівності відповідає певна множина розв'язків, тобто множина, яка складається з її розв'язків.

Термін «нерівність» у цьому пункті означає «нерівність з двома змінними».

Множина розв'язків нерівності, зображена на координатній площині, дає деяку її підмножину. її називають *графіком* нерівності. Будуючи графік нерівності, як і у випадку рівнянь з двома змінними, вдаються до геометричного способу його описування.

Дві нерівності, що мають однакові множини розв'язків, або однакові графіки, називають *рівносильними.*

Теореми про рівносильність нерівностей з однією змінною та їх наслідки переносяться й на нерівності з двома змінними. .

Можна показати, що справедливі такі **твердження**.

1. Графіком нерівності $y < kx + b$, $y > kx + b$ є нижня (верхня) півплощина серед півплощин, на які пряма $y = kx + b$ розбиває площину.

2. Графіком нерівності $x < a$ $(x > a)$ є ліва (права) півплощина серед півплощин, на які пряма $x = a$ розбиває площину.

3. Графіком нерівності $(x – a^2) + (y – b)^2 < R^2$ $((x – a)^3 + (y – b)^2 > R^2)$, в якій $R > 0$, є внутрішність (зовнішність) з центром C $(a; в)$ і радіусом R.

Наприклад:

1. Побудувати графік нерівності $2x – 2y – 3 > 0$.

Розв'язання. Маємо:

$2x – 2y – 3 > 0 \leftrightarrow 2x – 8 > 2y \leftrightarrow y < x - \frac{3}{2}$.

Будуємо пряму $y = x - \frac{3}{2}$ (кут її нахилу до осі x є $\alpha = \frac{\pi}{4}$, а початкова ордината $b = -\frac{3}{2}$). Згідно з твердженням 1, а з двох півплощин, на які ця пряма **розбиває** площину, вибираємо нижню (рис. 12). Тут пряма зображена штриховою, оскільки будь-яка точка цієї прямої не належить графіку розглядуваної нерівності.

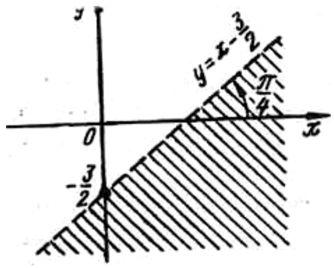


Рис. 12

Практичне заняття №14

Тема: Рівняння й нерівності з однією та двома змінними, їх системи. Рівняння лінії та кола. Рівняння прямої

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.
5. Тестовий експрес-контроль з теми «Рівняння, нерівності».

Зміст заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1. Що називається рівнянням з однією змінною, розв’язком рівняння?
2. Що називається множиною коренів і коренем рівняння?
3. Який предикат називається рівнянням з двома змінними?
4. Які рівняння називаються рівносильними?
5. Охарактеризуйте зв’язок між рівносильними рівняннями (кожне з них є логічним наслідком іншого).
6. Що називається числовою рівністю?
7. Що називається числовою нерівністю?
8. Які нерівності називаються рівносильними?
9. Сформулюйте властивості істинних числових рівностей і нерівностей?
10. Сформулюйте теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них.
11. Що називається нерівністю з однією змінною, розв’язком нерівності?
12. Що означає «розв’язати нерівність»? Яким прийомом користуються при розв’язуванні нерівності з однією змінною?
13. Сформулюйте теореми про рівносильність нерівностей та наслідки з них.
14. Яке рівняння називається рівнянням з двома змінними?
15. Поясніть та запишіть рівняння лінії та кола.
16. Запишіть рівняння прямої з двома змінними.
17. Що розуміють під системою рівнянь з двома змінними? У чому полягає графічний спосіб їх розв’язування.
18. Що розуміють під системою (сукупністю) нерівностей з однією змінною? Що означає розв’язати систему (сукупність) нерівностей з однією змінною?
19. У чому полягає графічний спосіб розв’язування нерівностей з двома змінними, їх систем і сукупностей?
20. Яку множину точок на площині називають графіком нерівності з двома змінними?

3. Розв’язування системи тренувальних вправ.

1. Розв’яжіть рівняння використовуючи теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них:

1) $\frac{7x+4}{2}-x=\frac{3x-5}{2}$;

2) $x-\frac{3x-2}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$;

3) $(2-x)^2-x(x+1{,}5)=4$;

4) $\frac{x-3}{2}=\frac{8-x}{3}$;

5) $\frac{2}{x-5} - \frac{3}{x+5} = \frac{2(10-x)}{25-x^2}$;

6) $\frac{3x+15}{x} - \frac{4x+20}{1-x} = \frac{25-x^2}{x^2-x}$.

2. Чи є рівносильними такі рівняння:

1) $(x+3)(x-1)=0$ і $x^2 - 2x - = 0$;

2) $\frac{5x-1}{x^2+4} = \frac{3x+4}{x^2+4}$ і $5x-1 = x+4$.

3. Розв’яжіть рівняння, використовуючи залежність між компонентами і результатами дій:

1) $(x+70)\cdot 4 = 328$; 2) $560 : (x+9) = 56$;

3) $(85\cdot x + 765) : 170 = 98$; 4) $(x-13581) : 709 = 36$.

4. Розв’яжіть нерівності, використовуючи теореми про рівносильність нерівностей та наслідки з них:

1) $6(2x-3) - 3(5x+8) > 10x - 3$;

2) $5(x+2) - (2x-1) < 3(x+15) - 5$;

3) $5(x-8) + 36 > 3(x-1) + 2(x+1)$;

4) $x^2 - 6x \succ 0$;

5) $\frac{x-5}{x+2} \prec 0$; $\frac{x+4}{x-3} \succ 0$;

6) $(x-3)(x+2) \le 0$; $(x-1)(x+3) \ge 0$;

7) $x^2 + 17x - 8 > (x-1)(x-2)$;

8) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x^3-1} > \frac{5x}{x^2+x+1}$;

9) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+2x-8} \ge 0$;

10) $2x^2 + 6x - 6 \ge 3x^2 - 2x + 6$;

11) $\frac{7x-6}{3x-4} < 2$.

5. Розв’язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами операцій:

1) $12 - (30 - 8{,}5 \div (2{,}75 - 0{,}6x)) \times \frac{27}{56} = 3$;

2) $3\frac{2}{15} \div \left((2{,}7x + 4{,}2) \div 21\frac{3}{7}\right) \times 1\frac{1}{8} = 5\frac{7}{8}$.

6. Розв’язати системи й сукупності нерівностей:

1) $\begin{cases} -3x > 9 \\ 4x < 1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 7x - 3 \ge 2(x-6) \\ x + 5 \ge 3x - 11 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 0{,}2(x-4) \le 0{,}3x+2 \\ 3(x+1) > x+5 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 5x+6 < 3(x+2)+2(x-1) \\ x(x-8)-2 > (x+7)(x-2) \end{cases}$;

5) $\left[\begin{array}{l} 8x+5 > 3-2x, \\ 6(3x-4)-2x-7 > 2x+7; \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} 2x-5 < 2(x+1), \\ 17x-3 > 18x+4, \\ x-4 < 2x-13. \end{array}\right.$

7. Розв’язати системи рівнянь з двома змінними:

2) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x - y = 8 \\ x \times y = 20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

8. Розв’язати графічним способом системи рівнянь з двома змінними:

1) $\begin{cases} x+y-8=0, \\ 3x-2y+6=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+2x+y^2-2y+1=0, \\ x^2-4x+y^2-2y+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0, \\ x^2-4x+y^2-4y+4=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4y=3x. \end{cases}$

9. Знайдіть область визначення функції: y = $\sqrt{3x^2 - 10x + 3.}$

10. Розв’язати графічним способом системи нерівностей:

a) $\begin{cases} x+2y > 0, \\ 2x-y < 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y < 0, \\ 3x-y > 0, \\ 4x+5y-20 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2 < 25 \\ x-2y < 0, \\ 2x-y > 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3y+19 > 22x \\ 2y+x^2 \le 4x-6. \end{cases}$

11. Тонка мотузка на 12 м довша за товсту. Коли від кожної із них відрізали по 16 м, тонкої мотузки 104 залишилось в 3 рази більше, ніж товстої. Скільки метрів тонкої мотузки залишилось?

12. В одній бочці на 5л бензину більше, ніж в другій. Коли в першу долити 10л, а в другу – 35л, то в другій стане в два рази більше бензину, ніж в першій. Скільки бензину було в двох бочках?

13. Розв'язати задачі:

а) Два автомобілі, легковий і вантажний, виїжджають одночасно із одного міста в інше. Легковий автомобіль проходить на 15 км/год більше, ніж вантажний і встигає приїхати на 1 год раніше, ніж вантажний. Відстань між містами 180 км. Скільки кілометрів за годину проїзджає кожний автомобіль?

б) Із міст А і В, відстань між якими 180 км, відправляються назустріч один одному два поїзди. Після зустрічі поїзд, який вийшов із А, прибув до В через 2 години, а другий прибув до А через $4\frac{1}{2}$ год. Знайти швидкість кожного з поїздів.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал з теми «**Рівняння й нерівності з однією та двома змінними, їх системи. Рівняння лінії та кола. Рівняння прямої**».
2. Підготуватися для опитування з теоретичних питань тема: «**Функції**».
3. **Розв'язати вправи:**

1. Чи є рівносильними такі рівняння:

1) $(x+3)(x-1) = 7x + 21$ і $x - 1 = 7;$

2) $3x - 2 + \frac{x}{x+2} = 4 + \frac{x}{x+2}$ і $3x - 2 = 4.$

2. Розв'яжіть рівняння використовуючи теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них:

1) $\frac{3x-2}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x^2+1}{x^2-2x};$

2) $x^2 - 25 = 5(x+5);$

3) $\frac{x+4}{x^3-64} + \frac{2}{x^2-8x+16} = \frac{2}{x^2-4x+16}.$

3. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами операцій:

$((6{,}2 \div 0{,}31 - \frac{5}{6} \times x) \times 0{,}2 + 0{,}15) \div 0{,}02 = 200.$

4. Розв'яжіть нерівності, використовуючи теореми про рівносильність нерівностей та наслідки з них:

1) $3\tilde{o} - 8 \succ 4(2\tilde{o} - 3);$

2) $\frac{2\tilde{o}+3}{3} - \frac{\tilde{o}+1}{4} \prec -1;$

3) $7\tilde{o} - 4 \succ 6(3\tilde{o} - 2);$

4) $\frac{2\tilde{o}-1}{4} - \frac{\tilde{o}+3}{8} \prec -4;$

5) $-2{,}4 \le 4x + 0{,}8 \le 4;$

6) $-2{,}6 < 5x - 2 < 3;$

7) $\frac{9x+14}{x+5} \geq 4;$

8) $x^2 - 5x + 11 < 2x^2 - 7x + 3;$

9) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+10} < 0;$

10) $-\frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3} \leq 0.$

5. . Розв’яжіть системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ x^2 + xy = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - y = 6, \\ 4x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - 5y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x^2 + 2xy + 5y^2 = 6. \end{cases}$

6. Розв’язати системи й сукупності нерівностей:

1) $\begin{cases} -5x > 15 \\ 3x < 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x - 13 < 2x + 7 \\ 4 - x > 6 - 3x \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(3x-4) > 6(x+1) - 20 \\ 0{,}4(5-x) \leq 3(x+1{,}4) + 1{,}2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(3x+1) < 6(x-2) - 1 \\ 3 - \frac{4x-5}{9} < 7x \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4\tilde{o} + 19 \succ 3 \\ 3\tilde{o} + 8 \leq 23 \end{cases}.$

6) $\begin{cases} 5 - 4\tilde{o} \prec 17 \\ 5\tilde{o} \prec 20 \end{cases}$

7) $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2+1}{x} > x + 1 \\ (x-1)(x-2) < 0 \\ x - 2 > \frac{x^2-1}{x}. \end{array}\right.$

7. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}.$

8. При яких значеннях *x* має зміст вираз:

1) $\sqrt{7 - 4\tilde{o}} + \frac{5}{\sqrt{\tilde{o} + 11}};$

2) $\sqrt{12 - 3\tilde{o}} + \frac{12}{\sqrt{4\tilde{o} + 10}}?$

9. Розв’язати графічно систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x + 5y > 6 \\ 21 - 5y \geq x^2 + 4x \end{cases};$

2) $\begin{cases} 3x + 5y \le 64; \\ x^2 + y^2 + 6y \le 23 + 4x \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 4x + 3 \ge 5y \\ y + 4x > x^2 - 5 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16 - 6x \\ 7y + 14 > 3x. \end{cases}$

10. Розв'язати задачі алгебраїчним методом:

1) Члени шкільного гуртка натуралістів відправилися на катері для збирання лікарських рослин. Пропливши за течією 35 км, вони зробили зупинку на 3 год, після чого повернулися назад. Знайти швидкість катера в стоячій воді, якщо вся подорож тривала 7 год, а швидкість течії річки 3 км/год.

2) Бак для води наповнюється двома трубами за 2 год 55 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна з труб окремо може наповнити бак?

3) Два робітники повинні виконати деяку роботу за 12 днів. Після 8 днів спільної роботи один із них дістав нове завдання, а тому другий робітник закінчив виконання частини роботи, що залишилася, за 7 днів. За скільки днів кожний із робітників може виконати роботу, працюючи окремо?

11. Підберіть з підручників математики початкової школи завдання на обчислення значень числових виразів, виразів зі змінною.

12. У підручниках початкової школи знайдіть вправи на розв'язання нерівностей.

13. Використовуючи підручники Математика 3 клас, 4 клас знайдіть вправи на розв'язання найпростіших рівнянь і рівнянь на дві дії та способи їх розв'язування.

5. Тестовий експрес-контроль з теми «Рівняння, нерівності».

Функції

Означення. Якщо кожному елементу x числової множини X за правилом f відповідає єдине число y, то говорять, що на множині X задано числову функцію $f(x)$, і пишуть: $y = f(x), x \in X$. При цьому x називають аргументом, а y – значенням функції. Множину X називають областю визначення функції, а множину значень, які функція набуває, – її множиною значень; останню позначають через $f(X)$.

Для області визначення і множини значень функції f застосовують також відповідно позначення $D(f)$ і $E(f)$.

Функцію $f(x)$ можна вважати заданою, якщо задано її область визначення X і правило f, за яким для довільного x з області визначення X можна знайти (обчислити) відповідне йому значення y, $y = f(x)$.

Останнє правило можна задавати по-різному, що й визначає способи задання функції. Найпоширеніші способи задання функцій такі: аналітичний, табличний та графічний.

Аналітичний спосіб означає задання функції формулою, що показує кількість і послідовність операцій над аргументом x, які необхідні для того, щоб дістати значення $y = f(x)$ цієї функції. Якщо при цьому не зазначається область визначення функції, то під останньою розуміють множину допустимих значень аргументу, тобто множину тих значень аргументу, для яких за формулою можна знайти відповідні значення функції.

Табличний спосіб задання функції полягає в написанні таблиці відповідних значень аргументу та функції. Цей спосіб задання функції часто застосовують в експериментальних дослідженнях, а також у математиці: таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці значень тригонометричних функцій та ін.

Щоб розглянути графічний спосіб задання функції, розглянемо спочатку поняття графіка функції.

Означення. Графіком функції $y = f(x), x \in X$, називають множину точок $(x; y)$ координатної площини, де $x \in X$, а $y = f(x)$.

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що вихідною інформацією про цю функцію є її графік. При цьому для довільного значення x з області визначення X можна знайти відповідне значення y функції. Прикладом графічного способу задання функції є електрокардіограми, за якими медики аналізують роботу серця (рис. 1):

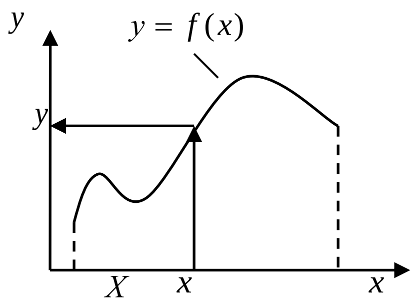


Рис. 1

У математиці графічне зображення функцій використовують і тоді, коли функція задана аналітичним чи табличним способом. Якщо треба з’ясувати загальний характер поведінки функції та її особливості на деяких підмножинах області визначення, графік, завдяки його наочності є дуже корисним.

Найчастіше графіком функції є деяка лінія координатної площини. Проте не кожна лінія є графіком функції. Справа в тому, що при заданому значенні аргументу x існує лише одне відповідне йому значення функції y. Тому на кожній прямій, паралельній осі ординат, може лежати не більше однієї точки графіка функції.

Наприклад, лінія, зображена нижче не є графіком функції (рис.2):

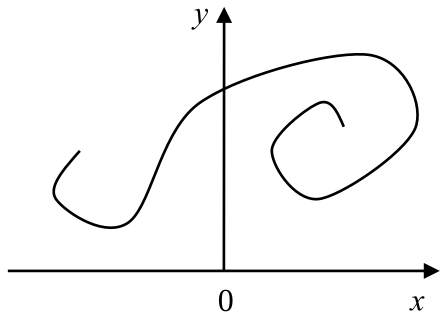


Рис. 2

Означення. Лінійною функцією *називають функцію виду* $y = kx + b$, де k і b – *деякі числа*.

Якщо, зокрема, $k = 0$, то дістають функцію $y = b$, яку називають сталою.

Областю визначення лінійної функції є множина R.

Графіком лінійної функції є пряма з кутовим коефіцієнтом k і початковою ординатою b.

На рис. 3 зображено графіки лінійних функцій відповідно для $k > 0$ і $k < 0$.

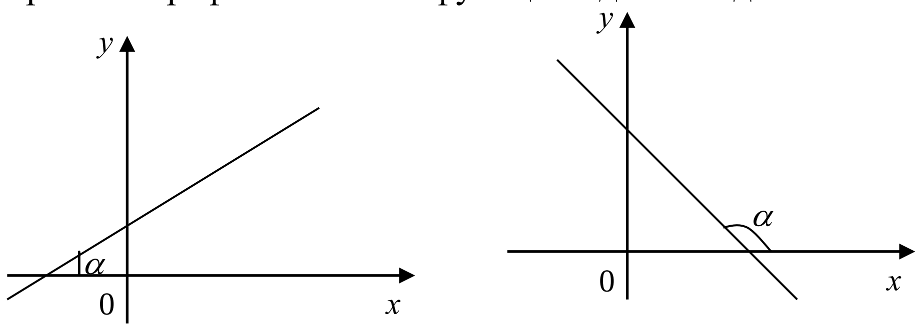


Рис. 3

Якщо $k > 0$, то функція зростаюча, якщо $k < 0$, то функція спадна.

Наприклад: Задано функцію $y = (6x - 5) - 3(3x - 2)$. Яка це функція? Знайти її область визначення. Чи є вона зростаючою на якій-небудь множині?

Розв'язання. Оскільки $(6x - 5) - 3(3x - 2) = -3x + 1$, то задану функцію можна записати у вигляді: $y = -3x + 1$; $k = -3; k < 0$.

Отже, задана функція є лінійною. Її областю визначення як лінійної функції є множина *R*. Оскільки ця функція спадна на *R*, то вона не може бути зростаючою на будь-якій множині *P*.

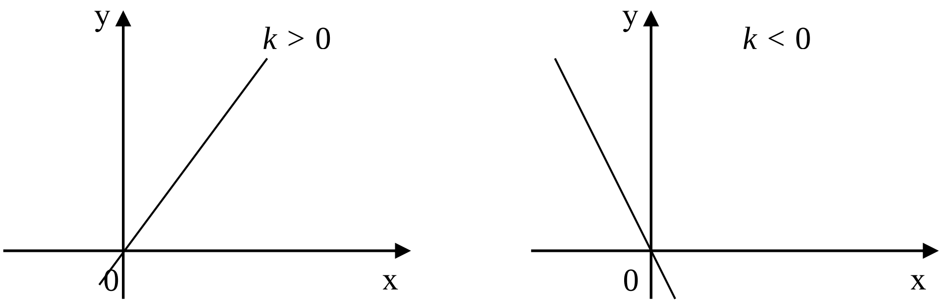
Означення. Прямою пропорційністю *називають функцію виду* $y = kx$, *де* k *– деяке число, що не дорівнює нулю.*

Число k у формулі називають коефіцієнтом пропорційності.

Пряма пропорційність – це окремий випадок лінійної функції при $k \neq 0$, а $b = 0$. Тому справедливі такі твердження:

1. Областю визначення прямої пропорційності є множина *R*.
2. Пряма пропорційність з додатним (від'ємним) коефіцієнтом пропорційності є зростаючою (спадною) функцією на всій області визначення.

3. Графіком прямої пропорційності є пряма з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює коефіцієнту пропорційності, і початковою ординатою, що дорівнює нулю. На рис. зображено графіки прямої пропорційності для $k > 0; k < 0$.



4. Для прямої пропорційності відношення двох довільних значень аргументу, що існує, дорівнює відношенню відповідних значень функції: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Для прямої пропорційності з додатним коефіцієнтом із збільшенням (зменшенням) значення аргументу в кілька разів відбувається збільшення (зменшення) значення функції у стільки ж разів.

Наприклад: Точка (2;4) належить графіку прямої пропорційності. Записати формулу цієї залежності.

Розв'язання. Згідно з означенням прямої пропорційності, шукана формула має вигляд $y = kx$, де k – деяке число, відмінне від нуля. Оскільки точка (2; 4) належить графіку розглядуваної функції, то $4 = 2k$, звідки $k = 2$.

Отже, шуканою формулою є $y = 2x$.

Означення. Оберненою пропорційністю *називається функція виду* $y = \frac{k}{x}$, *де k – деяке число, що не дорівнює нулю.*

Число k у формулі називають коефіцієнтом оберненої пропорційності.

Областю визначення оберненої пропорційності є множина R \ {0}.

Графіком оберненої пропорційності є гіпербола. На рис. 4 зображено графіки оберненої пропорційності для $k > 0; k < 0$.

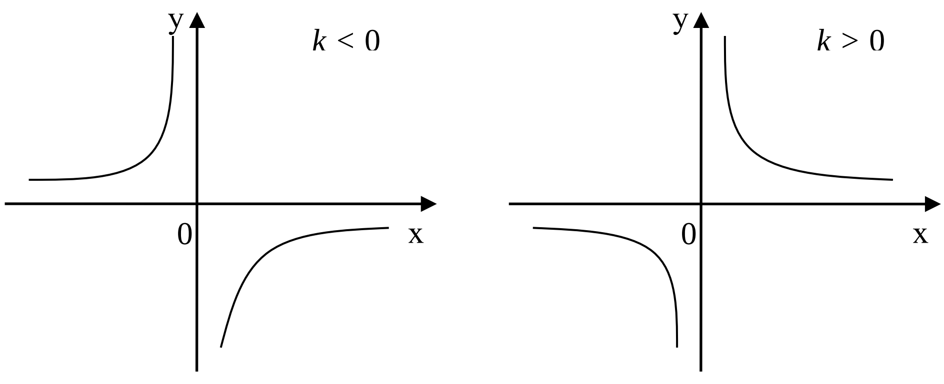


Рис. 4

Для оберненої пропорційності відношення двох довільних значень аргументу дорівнює оберненому відношенню відповідних значень функції: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Для оберненої пропорційності з додатним коефіцієнтом збільшенню (зменшенню) аргументу в кілька разів відповідає зменшення (збільшення) значення функції у стільки ж разів.

Наприклад: Знайти формулу оберненої пропорційності, якщо при значенні аргументу $x = 2$ функція набуває значення $y = -2$.

Розв’язання. За означенням оберненої пропорційності шуканою формулою є $y = \frac{k}{x}$, де k – деяке число, відмінне від нуля. Оскільки за умовою $x = 2$ і $y = -2$ задовольняють цю формулу, то маємо $-2 = \frac{k}{2}$. Звідси $k = -4$.

Отже, шуканою формулою є $y = \frac{-4}{x}$.

Квадратична функція, її графік і властивості

Означення. *Функцію, яку можна задати формулою виду* $y = ax^2 + bx + c$, *де* a, b *і* c *— деякі числа, причому* a ¹ 0, x *— незалежна змінна, називають* ***квадратичною.***

Покажемо, як графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$.

Виділимо квадрат двочлена. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введемо позначення $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Тоді формулу $y = ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді:

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Отже, схема побудови шуканого графіка є такою:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ од.}]{\text{управо або вліво}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ од.}]{\text{угору або вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці (x_0; y_0), де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, яка дорівнює параболі $y = ax^2$.

Зрозуміло, що вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ направлені так само, як і параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи направлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи направлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи і напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому, не використовуючи зсувів, можна побудувати графік квадратичної функції за такою схемою:

1) знайти абсцису вершини параболи за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) за формулою $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$, де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, знайти ординату вершини параболи і позначити на координатній площині вершину;

(примітка. Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково. Достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$);

3) визначити напрям віток параболи;

4) знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку (зокрема, координати точки перетину параболи з віссю y та нулі функції, якщо вони існують);

5) позначити на координатній площині знайдені точки і сполучити їх плавною лінією.

У таблиці наведено деякі властивості квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$\left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$
Зростає на проміжку	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$
Спадає на проміжку	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Наприклад:

Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Користуючись графіком функції, знайдіть область значень функції, проміжки зростання і спадання, проміжки знакосталості, найменше і найбільше значення функції.

Розв'язання.

Дана функція є квадратичною функцією $y = ax^2 + bx + c$,

$a = 1$, $b = 4$, $c = -5$.

Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору ($a > 0$).

Абсциса вершини параболи $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$,

ордината вершини $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Отже, точка (–2; –9) — вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

$x^2 + 4x - 5 = 0$;

$x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Отже, парабола перетинає вісь абсцис у точках (–5; 0) і (1; 0).

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ординат: $f(0) = -5$.

Парабола перетинає вісь ординат у точці (0; –5).

Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині (рис. 5)

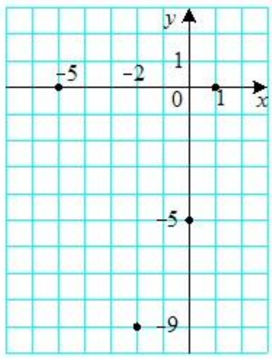


Рис. 5

Тепер зрозуміло, що зручно знайти значення даної функції в точках –1, –3, – 4 і, позначивши відповідні точки на координатній площині, провести через усі знайдені точки графік даної функції.

Маємо: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Шуканий графік зображено на рис. 6:

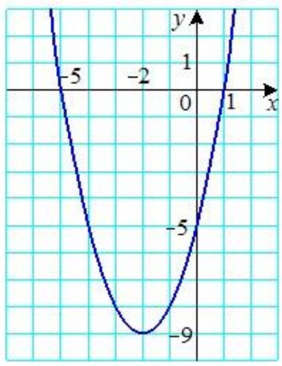


Рис. 6

Область значень функції $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; -2]$.

$f(x) > 0$ при $x < -5$ або $x > 1$; $f(x) < 0$ при $-5 < x < 1$.

Найменше значення функції дорівнює –9, найбільшого значення не існує.

Перетворення графіків функцій

1. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + a)$, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць: вправо, якщо a<0; вліво, якщо a>0, (рис.7):

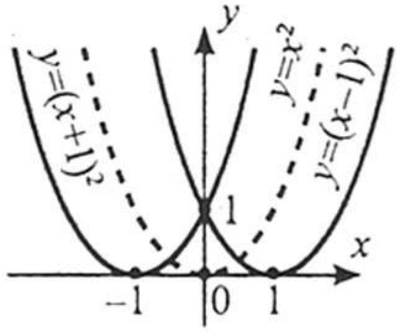


Рис. 7

2. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + b)$, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць: вверх, якщо b<0; вниз, якщо b>0 (рис. 8):

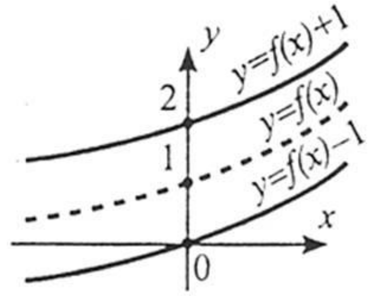


Рис. 8

3. Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, слід графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно осі абсцис (рис. 9):

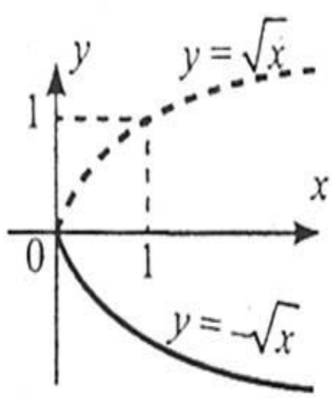


Рис. 9

4. Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, слід графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно осі ординат (рис. 10):

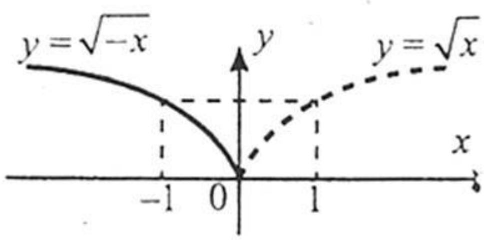


Рис. 10

5. Щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, слід частину графіка функції $y = f(x)$ у верхній півплощині і на осі абсцис залишити без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі О*x* (рис. 11):

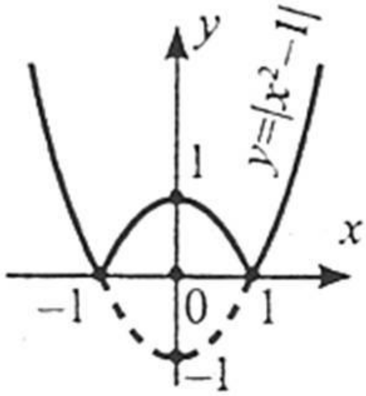


Рис. 11

6. Щоб побудувати графік функції $y = f(|x|)$, слід частину графіка
функції $y = f(x)$ у правій півплощині і на осі ординат залишити без змін, а
замість частини графіка в лівій півплощині побудувати симетричну їй частину
відносно осі О*y* (рис. 12):

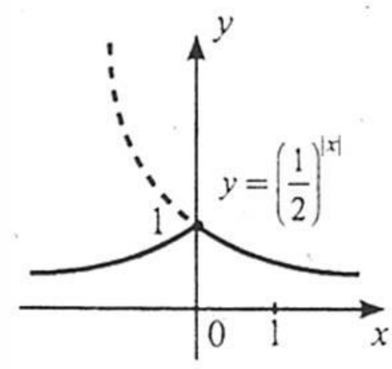


Рис. 12

7. Щоб побудувати графік функції $y = f(kx), k > 0$, слід:

1) при *k*>1 стиснути графік функції $y = f(x)$ до точки (0;0) уздовж осі абсцис
у *k* разів (рис. 13):

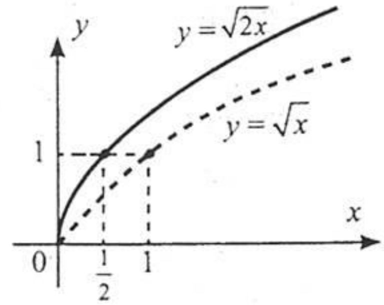


Рис. 13

2) при 0<*k*<1 розтягнути від точки (0;0) графік функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів (рис. 14):

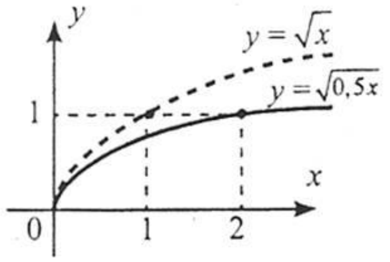


Рис. 14

8. Щоб побудувати графік функції $y = kf(x), k > 0$, слід:

1) при *k*>1 розтягнути графік функції $y = f(x)$ до точки (0;0) уздовж осі ординат у k разів (рис. 15):

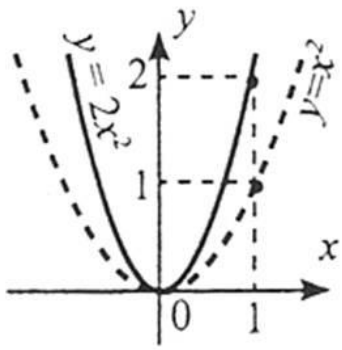


Рис. 15

2) при 0<*k*<1 стиснути від точки (0;0) графік функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат у $\frac{1}{k}$ разів (рис. 16):

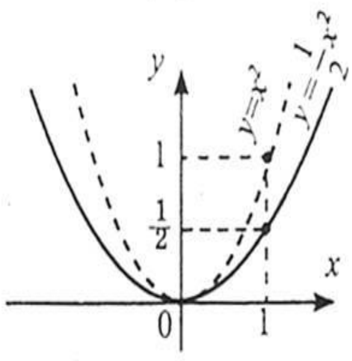


Рис. 16

Практичне заняття №15

Тема: Функції. Операції над функціями та графіками.

План заняття

1. Аналіз результатів тестового експрес-контролю, постановка завдань для самокорекції.
2. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
3. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
4. Розв'язування системи тренувальних вправ.
5. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. **Аналіз результатів тестового експрес-контролю, постановка завдань для самокорекції.**
2. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
3. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Сформулюйте означення функції, графіка функції.
   2) Які існують способи задання функції?
   3) Що називається областю визначеня функції?
   4) Що називається областю значень функції?
   5) Яка функція називається лінійною? Її графік та властивості.
   6) Яка функція називається прямою пропорційністю? Її графік та властивості.
   7) Яка функція називається оберненою пропорційністю? Її графік та властивості.
   8) Сформулюйте властивості оберненої пропорційністі.
   9) Яка функція називається квадратичною? Її графік.
   10) Сформулюйте властивості квадратичної функції.
   11) Назвіть та сформулюйте основні правила перетворення графіків функцій?
   12) На прикладах поясніть і покажіть перетворення графіків функцій?
4. **Розв'язування системи тренувальних вправ.**
   1. Кожному $x \geq 0$ відповідає таке число y, що
   а) $y = x^2$; б) $y^2 = x$; в) $y = x^3$; г) $y^3 = x$.
   2. Які з наведених нижче величин знаходяться в прямо пропорціональній або обернено пропорційній залежності:
   1) кількість товару і його вартість при постійній ціні;
   2) час і пройдена відстань при постійній швидкості в умовах рівномірного прямолінійного руху;

3) швидкість рівномірного прямолінійного руху і часу, необхідного для проходження певної відстані;

4) швидкість рівномірного руху і пройденого шляху за певний проміжок часу;

5) довжина сторони квадрата і його площа;

6) довжина і ширина прямокутника при заданій площі;

7) діаметр кола і його довжина;

8) довжина сторони квадрата і його периметр.

3. Знайти область визначення функцій:

a) $y = \frac{6}{x-1}$;

b) $y = \sqrt{x-2}$;

c) $y = \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$;

d) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$;

e) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-5}$;

f) $y = \frac{x-1}{x+5}$;

g) $\frac{4x+13}{(x-3)(x-7)}$;

h) $\frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)}$;

i) $\sqrt{a+3}$;

j) $\frac{8}{\sqrt{y-4}}$;

k) $y = x - |x|$;

l) $y = \lg\left(x - \sqrt{x+1}\right)$;

m) $y = x^2 + 3|x| + 2$;

n) $y = \lg(-x)$.

4. Знайти лінійну функцію, якщо її графік містить точку (15;– 12), а $k = -\frac{5}{2}$.

5. Сторона квадарата x см. Записати вирази для обчислення його площі периметра. Чи задають ці вирази функції?

6. При якому значенні а графік функції $y = ax^2$ проходить через точку N(– 2;7)?

7. В одній системі координат побудувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = -x$. Користуючись графіками, розв'язати рівняння $x^2 = -x$ і нерівність $x^2 < -x$.

8. Побудувати графіки функцій:

a) $y = \frac{1}{x+2}$;

b) $y = \frac{1}{2}|x^3| + 4$;

c) 3) $y = |x^2 - 5x + 6|$;

d) 4) $y = 2 - \sqrt{-x}$;

e) $y = -2|x-5| - 4$;

f) $y = \frac{-2x-7}{x+2}$;

g) $y = -2\left|\frac{1}{3}x - 3\right| + 2$;

h) $y = |-x^2 - 2x - 3|$;

i) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$;

j) $y = \frac{2x+5}{x+3}$;

k) $y = |x-4|$.

9. Побудувати графіки функцій $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = x^2 + 4x + 4$ на одній координатній площині.

10. Довести і показати графічно, що функції, задані формулами $y = 2 + \frac{1}{x}$ і $y = \frac{1}{x-2}$, взаємно обернені.

11. Розв'язати задачу.

Одна майстерня повинна пошити 810 костюмів, друга за цей же термін – 900 костюмів. Перша закінчила виконання замовлення за 3 дні, а друга – за 6 днів до терміну. По скільки костюмів у день шила кожна майстерня, якщо друга шила в день на 4 костюми більше, ніж перша?

12. Розв'язати задачу алгебраїчним методом.

Члени шкільного гуртка натуралістів відправилися на катері для збирання лікарських рослин. Пропливши за течією 35 км, вони зробили зупинку на 3 год, після чого 114 повернулися назад. Знайти швидкість катера в стоячій воді, якщо вся подорож тривала 7 год, а швидкість течії річки 3 км/год.

5. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал з тем: рівняння, нерівності, функції та підготуватися до самостійної роботи.
2. Підготуватися для перевірки теоретичних питань по темі **«Основні елементи геометрії»**.
3. **Розв'язати вправи:**

1. Які з наведених нижче відповідностей у множині цілих чисел є функціями?

a) *x* ділиться на *y*;
b) $x + 2y = 0$;
c) $|x| + |y| = 1$;
d) y дорівнює сумі всіх натуральних дільників *x*;
e) $x^2 = y^2$;
f) $|y| = |x|$.

2. Не будуючи графіка, з'ясувати, чи належать точки A (5;– 5), B (6,4; 8,2) і C (–1,5; 0,45) графіку функції $y =- 0{,}2x^2$.

3. Знайти область визначення функцій:

a) $y = \frac{6}{x-6}$;
b) $y = \frac{x-2x}{3x-12}$;
c) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
d) $y = \sqrt{x+5} + \frac{1}{x}$;
e) $y = \frac{2x}{x-1}$;
f) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$;
g) $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$;
h) $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-x+2}}$;
i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-12}}$;
j) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x^2-4}}$;
k) $y = \lg(x+3)$;
l) $y = x^2 + 3x + 2$;
m) $y = \lg(-x + 3x)$.

4. При якому значенні а графік функції $y = ax^2$ проходить через точку N (– 5; 10)?
5. Побудувати графіки функцій в одній системі координат: $y = 3x, y = 3x + 4, y = 3x - 4$. Що є перерізом цих графіків?
6. Побудувати графіки функцій:
   a) $y = 3|x| - 2x$;
   b) $y = \frac{x-1}{x-3}$;
   c) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
   d) $y = -x^2 + 3x - 2$;
   e) $y = \frac{1}{2}|6 - 3x| - 2$;
   f) $y = -x^2 - 2x - 3$;
   g) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$;
   h) $y = |x - 2|$.
7. З 28 кг молока одержується 4 кг вершків. Із 16 кг вершків одержується 4 кг вершкового масла, а з 18 кг вершкового масла одержується 12 кг топленого масла. Скільки кілограмів топленого масла можна одержати з 3000 кг молока?
8. Чи існує обернена пропорійність, графіку якої належить точки (1; 5) і (–1; 5)?
9. **Розв’язати задачу алгебраїчним методом.**

Два робітника повинні виконати певну роботу за 12 днів. Після 8 днів спільної роботи один із них дістав нове завдання, а тому другий робітник закінчив виконання частини роботи, що залишилася, за 7 днів. За скільки днів кожен із робітників може виконати роботу, працюючи окремо?

10. Використовуючи підручники Математика 3 клас, 4 клас знайдіть текстові задачі, які формують уявлення про функціональну залежність (пряму пропорційність, обернену пропорційність, лінійну функцію).

Розділ 6. Елементи геометрії

Основні елементи геометрії

Точка, пряма, їх властивості

Слово «точка» від латинського слова «punqo», що означає «доторкаюсь».

Слово «лінія» є перекладом від латинського слова «linea», що означає «льон», «льняна нитка», іноді це слово розуміють як «пряма лінія», і звідси походить слово «лінійка».

Точка – поняття, що не має означення. Уявлення про точку дає слід на аркуші паперу, зроблений добре загостреним олівцем, ручкою або крейдою на дошці.

•A •B Позначаються точки великими латинськими буквами: *A, B, C*...

•C

Пряма – поняття, що не визначається. Уявлення про пряму дають такі речі: туго натягнута нитка; промінь світла, який проходить крізь вузький отвір.

Позначається маленькою латинською літерою або двома великими латинськими буквами.

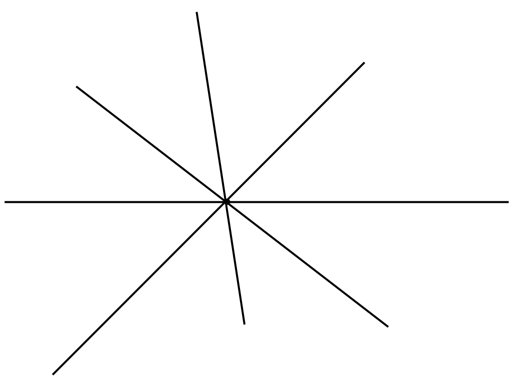
a A . . B

Пряма нескінчена.

На малюнку точки і прямі наносяться добре загостреним олівцем. Для побудови прямих користуються лінійкою.

Властивості:

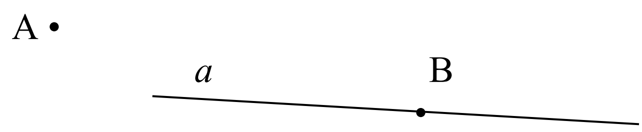
1. Через одну точку можна провести безліч прямих.



2. Через будь – які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

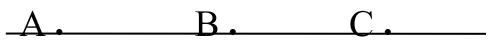
A B a

3. Яка б не була пряма, існують точки , що належать цій прямій і точки, що не належать їй.



B є a , A $\notin$ a.

4. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.



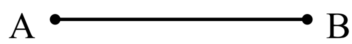
5. Дві різні прямі або перетинаються в одній точці, або не перетинаються.

Відрізок

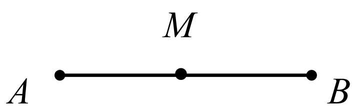
Означення. Відрізок *– частина прямої, обмежена двома точками, включаючи ці точки.*

Відрізок позначається точками, що є його кінцями.

Позначення відрізка двома буквами, які відповідають його кінцям, запровадили ще стародавні греки.



Рівні відрізки — відрізки, які співпадають при накладанні.

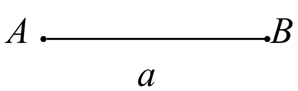


Середина відрізка – точка, яка ділить відрізок навпіл.

М – середина відрізка АВ, $AM = MB$.

Властивості:

1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

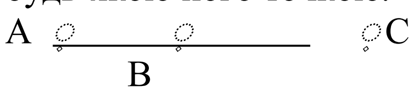


$AB = a, \quad a > 0$

2. Відстань між різними точками – довжина відрізка з кінцями в даних точках.

3. Відстань між точками, що співпадають, дорівнює 0.

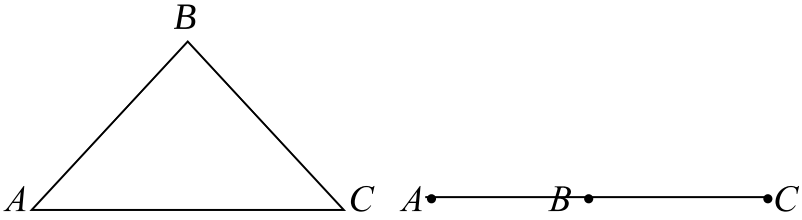
4. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.



AC = AB + BC

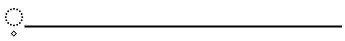
5. Рівні відрізки мають рівні довжини. Якщо відрізки мають рівні довжини, то вони рівні.

6. Для будь-яких трьох точок відстань між двома з них не більша суми двох інших відстаней.

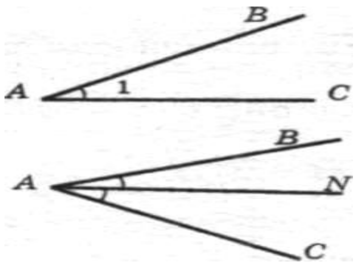


$AC \leq AB + BC$

Кут

1. Півпряма A 

Означення. Частина прямої а, яка складається з усіх її точок, називається ***півпрямою*** *або* ***променем***.



Означеня кута.

Кут — фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки **(вершини).**

Кут позначають його вершиною або сторонами, або записують три точки: вершину і дві точки, що лежать на сторонах кута. Слово «кут» іноді замінюють знаком $\angle$

$$\angle BAC = \angle A = \angle 1$$

Рівні кути — кути, які співпадають при накладанні. $\angle \boldsymbol{BAN} = \angle \boldsymbol{CAN}$

Одиниці вимірювання кутів:

Градус – величина (градусна міра) кута, яка дорівнює $\frac{1}{180}$ частині розгорнутого кута.

Хвилина – $\frac{1}{60}$ частина градуса.

Секунда – $\frac{1}{60}$ частина хвилини.

$1° = 60´$, $1´ = 60´´$, $1´ = \frac{1}{60}\ 1°$

Властивості вимірювання кутів.

1. Якщо два кути мають рівні градусні міри, то вони рівні. Рівні кути мають рівні градусні міри

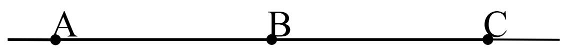
2.Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля

3.Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

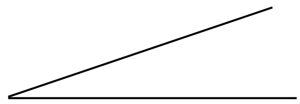
4. Від будь-якого променя в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Види кутів:

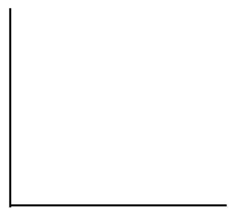
Кут називається ***розгорнутим***, якщо його градусна міра дорівнює 180^0.



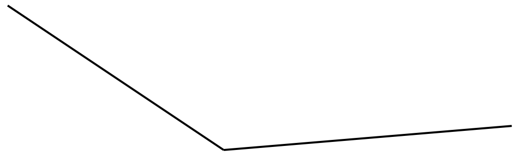
Кут називається ***гострим***, якщо його градусна міра менше, ніж 90^0.



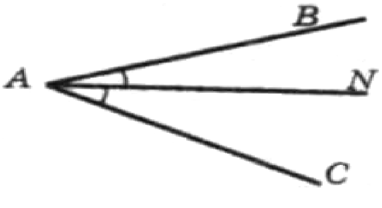
Кут називається ***прямим***, якщо його градусна міра 90^0.



Кут називається ***тупим***, якщо його градусна міра більше 90^0, але менше 180^0.



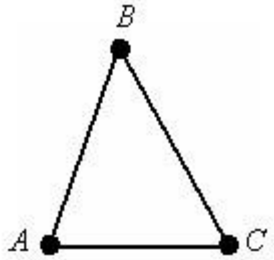
Бісектриса – промінь, який виходить із вершини кута й ділить його навпіл.



AN – бісектриса $\angle BAC$, $\angle BAN = \angle CAN$

Трикутники

Означення. Трикутником *називається фігура, що складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що сполучають ці точки попарно. Точки називаються вершинами, а відрізки – сторонами трикутника.*



Вершини трикутника позначають великими латинськими літерами A, B, C, кути при відповідних вершинах грецькими літерами α, β, γ, а довжини протилежних сторін – маленькими латинськими літерами *a, b, c.*

Сума внутрішніх кутів трикутника – 180°: $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$.

Зовнішній кут трикутника (кут, суміжний до внутрішнього кута) завжди дорівнює сумі двох інших внутрішніх кутів трикутника.

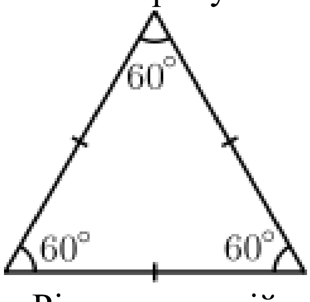
Сума довжин двох будь-яких сторін трикутника завжди перевищує довжину третьої сторони. Це є нерівність трикутника або аксіома трикутника.

Трикутники можна класифікувати в залежності від відносної довжини його сторін:

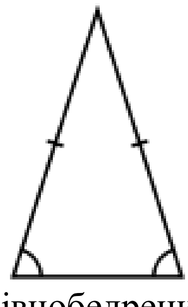
У ***рівносторонньому*** трикутнику всі сторони мають однакову довжину. Всі кути рівностороннього трикутника також рівні і дорівнюють 60°. Рівносторонній трикутник також називають ***правильним.***

У ***рівнобедреному*** трикутнику дві сторони мають однакову довжину, третя сторона при цьому називається основою трикутника. Рівнобедрений трикутник також має рівні кути, які знаходяться при його основі.

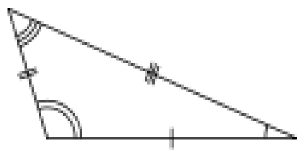
Різносторонній трикутник має сторони різної довжини. Внутрішні кути різностороннього трикутника також різні.



Рівносторонній



Рівнобедрений



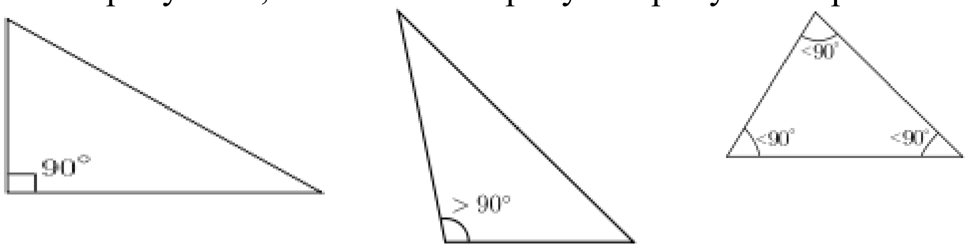
Різносторонній

Також трикутники можна класифікувати відповідно до їх внутрішніх кутів:

Прямокутний трикутник має один внутрішній кут рівний 90° (прямий кут). Сторона, протилежна до прямого кута, називається ***гіпотенузою.*** Інші дві сторони називаються ***катетами*** прямокутного трикутника.

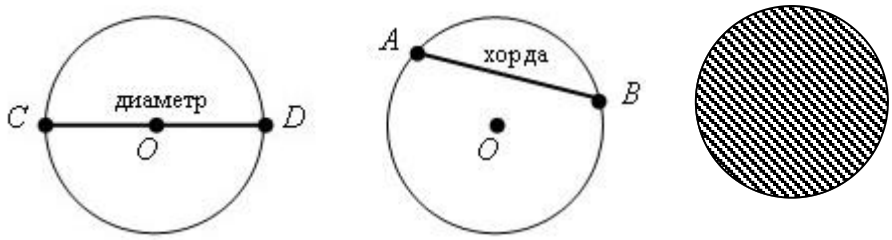
Тупокутний трикутник має один внутрішній кут більший, ніж 90°.

В *гострокутному* трикутнику всі кути менше за 90°. рівносторонній трикутник є гострокутним, але не всі гострокутні трикутники рівносторонні.



Прямокутний Тупокутний Гострокутний

Коло, круг



Коло – множина точок площини, відстань яких від даної точки (центра кола) дорівнює даній відстані (радіусу кола).

Радіус кола – відстань від центра кола до точки кола (відрізок, що з'єднує центр кола з точкою кола). OD – радіус.

Хорда кола – відрізок, що з'єднує дві точки кола. AB – хорда.

Діаметр кола – хорда, яка проходить через центр кола. CD – діаметр, CD = 2OD.

Круг – множина точок площини, відстань яких від даної точки (центра круга) не перевищує даної відстані (радіуса круга).

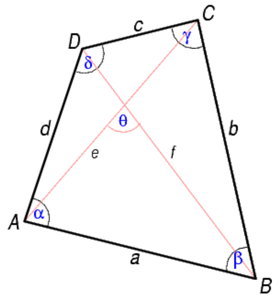
Радіус, хорда, діаметр кола, яке обмежує даний круг, називають радіусом круга, хордою круга, діаметром круга.

Многокутники

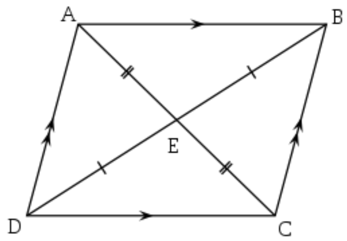
Чотирикутник – це частина площини, обмежена замкненою ламаною, яка містить чотири ланки. Вона складається з чотирьох вершин (точок) і чотирьох сторін (відрізків), що послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій. Вершини називаються сусідніми, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Несусідні вершини називаються протилежними. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються діагоналями.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°: $\angle \mathbf{A} + \angle \boldsymbol{B} + \angle \boldsymbol{C} + \angle \mathbf{D} = \mathbf{360°}$.

Кожна сторона чотирикутника менша за суму усіх його інших сторін: ***AB < AD + BC + CB.***



Паралелограм **–** це чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.



Існує декілька окремих видів паралелограмів:

Прямокутник – паралелограм, всі кути якого прямі;

Ромб – паралелограм, всі чотири сторони якого рівні;

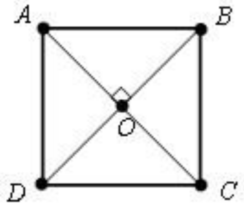
Квадрат – рівносторонній прямокутник або прямокутний ромб.

Властивості паралелограма.

1. Протилежні сторони паралелограма рівні, тобто AB = DC та AD = BC.
2. Протилежні кути паралелограма рівні, тобто ∠A = ∠C та ∠B = ∠D.
3. Діагоналі паралелограма перетинаються та в точці перетину діляться навпіл.
4. Сума сусідніх кутів дорівнює 180°, загальна сума кутів паралелограма дорівнює 360°.
5. Сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів його сторін.

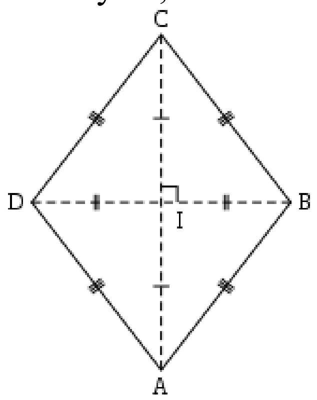
Властивості квадрата.

1. У квадрат завжди можна вписати коло.
2. Навколо квадрату завжди можна описати коло.

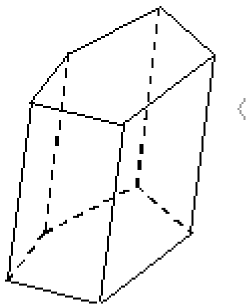


Властивості ромба.

1. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.
2. Діагоналі ромба є бісектрисами кутів, з яких вони проведені.



Многогранники і тіла обертання



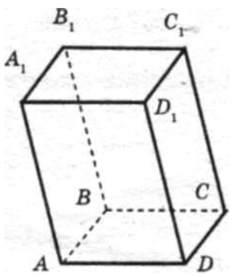
Означення. *n-кутна призма –* ***многогранник****, дві грані якого n-кутники, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, а інші n граней – паралелограми.*

n-кутники називають ***основами*** *призми, а паралелограми – бічними гранями призми.*

Сторони основ називають ***ребрами основ***, інші ребра називають ***бічними ребрами***.

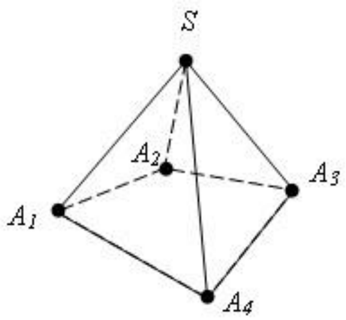
Висота призми – відстань між площинами її основ.

Діагональ призми – відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані.



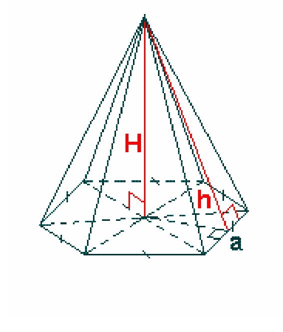
Означення. Паралелепіпед *– призма, основа якої паралелограм. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед.*

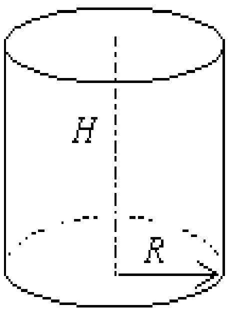
Протилежні грані паралелепіпеда – грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин



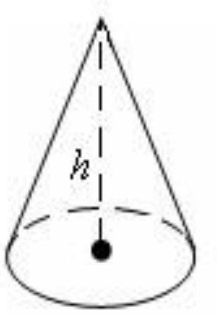
Означення. *n-кутна* ***піраміда*** *– многогранник, у якого одна грань – довільний n-кутник, а останні n граней – трикутники, що мають спільну вершину, n-кутник називають основою, трикутники – бічними гранями, а спільну вершину бічних граней – вершиною піраміди.*

$SA_1A_2A_3A_4$– піраміда, $A_1A_2A_3A_4$ – основа; SA_1A_2, SA_2A_3, SA_3A_4, SA_1A_4 – бічні грані; S – вершина піраміди. *Висота* – перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи.

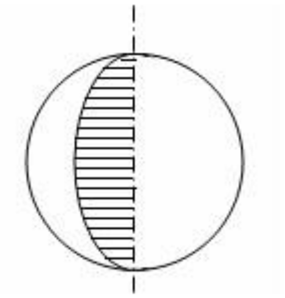




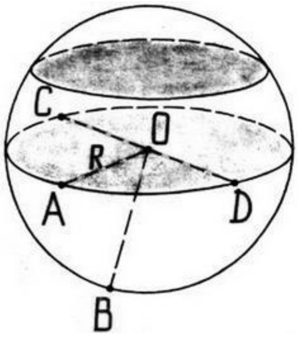
***Означення. Циліндром** називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів. Круги називаються основами циліндра, а відрізки, що сполучають точки кіл кругів, – твірними циліндра. Відстань між площинами основ називається висотою циліндра.*



***Означення. Конусом** називається тіло, яке складається з круга – основи конуса, точки, яка не лежить у площині цього круга – вершини конуса і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками кола основи. Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються **твірними конуса**.*
***Висота** – перпендикуляр, опущений з вершини конуса на площину основи.*



***Означення. Кулею** називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану. Ця точка називається **центром кулі**, а дана відстань радіусом кулі.*
Куля є тілом обертання. Вона утворюється під час обертання півкруга навколо його діаметра як осі.
*Межа кулі називається **кульовою поверхнею** або **сферою**.*



Практичне заняття №16

Тема: Основні поняття геометрії. Многогранки. Тіла обертання

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання та аналіз самостійної роботи.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв'язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

Зміст заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання та аналіз самостійної роботи.

2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).

1) Короткі історичні відомості про виникнення геометрії.
2) Система геометричних понять шкільного курсу математики.
3) Сформулюйте означення прямої, відрізка, променя, кута. Як вони позначаються?
4) Назвіть види кутів і сформулюйте означення.
5) Якими одиницями вимірюються довжина відрізка, величина кута? Поясніть співвідношення між одиницями вимірювання.
6) Що називається многокутником? Назвіть його складові частини і сформулюйте означення.
7) Сформулюйте означення трикутника. Що називається висотою, медіаною трикутника і бісектрисами його кутів?
8) Назвіть види трикутників і їх властивості.
9) Що називається чотирикутником? Назвіть його складові.
10) сформулюйте означення прямокутника, паралелограма, ромба, квадрата. Назвіть спільне і відмінне цих фігур.
11) Сформулюйте властивості прямокутника, паралелограма, ромба, квадрата.
12) Що називається кругом і колом? В чому їх відмінність? Назвіть елементи і властивості цих фігур.
13) Що називається призмою? Назвіть складові елементи призми.
14) Що називається паралелепіпедом? Порівняйте паралелепіпед з призмою.
15) Що називається пірамідою? Назвіть складові елементи піраміди.
16) Назвіть відомі вам тіла обертання і дайте їм означення?

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Що можна сказати про розміщення точок A, B і C, для яких AB + AC = CB?

2. Як розміщені точки A, B і C , якщо:

a) AB = 11см, BC = 8 см і AC = 19 см;
b) AB = 11см, BC = 5 см і AC = 6 см;
c) AB = 11см, AC = 7 см і BC = 18 см;
d) AB = 11см, BC = 8 см і AC = 20 см;
e) AB = 11см, BC = 8 см і AC = 15 см?

3. Відрізок AB поділено точками K, C, N, E на рівні відрізки. Скільки утворилося відрізків?

4. Скільки прямих можуть перетинати відрізок у точці C під прямим кутом?

5. Побудувати трикутник за стороною, кутом, прилеглим до неї, і бісектрисою даного кута.

6. Побудувати прямокутний трикутник за медіаною та висотою, проведеними до гіпотенузи.

7. Побудувати прямокутний трикутник за медіаною, проведеною до гіпотенузи, та сумою катета і

8. гіпотенузи.

9. Зовнішній кут трикутника 140°, один із внутрішніх кутів дорівнює 55°. Знайти інші кути трикутника.

10. Висота, проведена до гіпотенузи, поділила її на відрізки, що дорівнюють 2 дм і 8 дм. Знайти катети трикутника.

11. Катет дорівнює радіусу описаного кола навколо даного трикутника і становить 6 см. Знайти

12. другий катет.

13. Кут між діагоналями рівнобедреної трапеції дорівнює 120°. Висота трапеції – 10 м. Знайти

14. діагоналі трапеції.

15. У рівнобедреній трапеції проведено бісектриси кутів, прилеглих до більшої основи трапеції.

16. Бісектриси перетинаються під кутом 135°. Бічні сторони трапеції продовжено до їх перетину. Під яким кутом перетинаються продовження бічних сторін?

17. Діагоналі ромба рівні 12 м і 18 м. Знайти сторони і висоти ромба.

18. Сформулюйте означення прямого кута. Знайдіть у підручнику математики для початкових класів вправу, в якій учні знайомляться з прямим кутом. Порівняйте означення.

19. Знайдіть у підручнику математики для початкових класів вправу, де учні знайомляться з кругом і колом. На що треба звернути увагу учнів, що вони не плутали ці поняття?

20. Сформулюйте означення паралелограма і прямокутника. Вкажіть родове поняття і видову відмінність у кожному з означень і порівняйте їх.

21. Знайдіть у підручнику математики для початкових класів вправи, в яких розглядаються просторові тіла. Назвіть їх.

22. Побудуйте різні прямокутники, в кожному з яких периметр дорівнює 20 см (довжини сторін – натуральні числа). Скільки розв’язків має задача?

23. У підручнику математики для початкових класів знайдіть вправи, в яких геометричні фігури використовуються як об'єкти для перелічування.

24. Побудуйте чотирикутник і відрізком розбийте його на частини, щоб утворились: а) два трикутника, б) трикутник і чотирикутник, в) два чотирикутника, г) трикутник і п'ятикутник.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Підготуватися для перевірки теоретичних питань з теми «**Поняття величини. Площа фігури. Об'єм тіла**».
2. **Розв'язати вправи:**

1. Дано 5 точок, три з яких лежать по один бік від прямої, а дві інші – по інший бік. Дві довільні точки з'єднуються відрізком. Скільки всього є відрізків? Скільки серед них перетинають пряму?
2. Незамкненою ламаною лінією сполучено 7 точок. Скільки ланок має ламана?
3. Як потрібно розмістити три прямі на площині, щоб при їх перетині утворилося найбільша кількість відрізків?
4. Точка А належить прямій *а.* Чи може ця точка належати іншим прямим площини?
5. Чи будуть істинними твердження:
   1) через будь-які дві різні точки площини завжди можна провести пряму і тільки одну;
   2) через будь-які дві різні точки площини завжди можна провести лише одну ламану;
   3) через будь-які дві різні точки площини можна провести безліч ліній?
6. Один із суміжних кутів дорівнює 60°. Яка величина кута, що доповнює його до прямого?
7. Схил даху 30°, ширина будівлі 6 м. Яка висота даху?
8. Довести, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника.
9. Побудувати квадрат, площа якого була б удвоє більша за площу даного квадрата.

Розділ 7. Величини та їх вимірювання

Поняття величини. Довжина відрізка. Площа фігури. Об'єм тіла та його вимірювання

Поняття величини, та їх властивості

Величини відображають різноманітні властивості реального світу. У математиці поняття величини виникло в результаті абстрагування від якісних особливостей, властивостей реальних об'єктів, щоб виділити тільки кількісні відношення.

Поняття величини тісно зв'язане з поняттям вимірювання. Результат вимірювання виражається числовим значенням величини при певній одиниці вимірювання – ***мірою величини***. Вимірювання є одним з шляхів пізнання природи людиною, який поєднує теорію з практикою. Ще в давній давнині вимірюванням було знайдено багато емпіричних фактів про загальні властивості величин, які є відображенням властивостей дійсного світу.

Роль і значення вимірювань у процесі розвитку природничих і технічних наук безперервно зростає, бо зростає число і якість вимірюваних величин.

З поняттям величин доводиться часто мати справу в курсі математики, фізики, хімії тощо. Довжина відрізка, площа фігури, об'єм геометричного тіла, маса фізичного тіла, його температура, міцність мінералу, час, вартість, швидкість та прискорення тіла – все це величини різних родів.

Поняття величини вперше з'явилося у філософській літературі і пов'язувалося з дійсним числом. Число з'явилось генетично в процесі рахунку предметів і вимірювання величин (довжин, площ, об'ємів і ін.). На цю обставину вказував ще Арістотель (IV ст. до н. е.).

Предметом вивчення математики до XVII ст., як відомо, були сталі величини. Пізніше, коли виникла задача математичного описування процесів і рухів у фізиці та астрономії, були введені змінні величини. До середини минулого століття математика мала справу з величинами, але вивчала не конкретні властивості окремих величин, а загальні властивості та відношення об'єктів математичної природи, абстраговані від якісного змісту.

Проте, як у філософській, так і в математичній літературі того часу, означення поняття величини в більшості випадків мали описовий характер. Наприклад, Л. Ейлер називав величиною все те, що має здатність збільшуватись або зменшуватись. Аналогічно описує поняття величини і А. Лебег. Французький енциклопедист д'Аламбер (XVIII ст.) визначав математику як науку, що вивчає властивості величин, оскільки вони перелічуються і вимірюються.

У процесі свого розвитку поняття величини уточнялося, узагальнювалося. Ще Евклід у «Початках» дав перше узагальнення таких конкретних понять, як «довжина відрізка», «площа», «об'єм», та інших у вигляді аксіом. Ці аксіоми неявно визначають поняття додатної скалярної величини. Розширення цього поняття привело потім до понять скалярної, векторної і тензорної величин.

Поняття величини є одним з основних понять, яке використовується у різних науках і навчальних предметах. Загальне поняття величини не підлягає строгому означенню, але величину можна уявити як особливу властивість реальних об'єктів або явищ.

Усю сукупність величин за певними характеристичними властивостями поділяють на такі величини: скалярні, векторні, тензорні, неархімедові та ін. В елементарній математиці й фізиці розглядають *скалярні* й *векторні* величини.

Скалярними величинами *називають такі величини, які повністю характеризуються числовим значенням – числом.* Це, наприклад, довжина, площа, об'єм, маса, густина та ін. Термін «скалярні» походить від латинського слова scala – «східці, шкала», яку дістають при зображенні чисел на координатній осі.

Векторними величинами *називають такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрямок дії.* Такими є, зокрема, фізичні величини: швидкість, прискорення, сила та ін. Геометрично векторні величини зображують напрямленими відрізками, які називають векторами. Латинське слово vector означає «тягти у певному напрямку».

Отже, величини можуть бути:

- одного роду – ті, що виражають одну і ту ж властивість об'єктів деякої множини;
- різного роду (довжина і площа, об'єм і маса) – ті, що виражають різні властивості об'єктів;
- скалярні (довжина, площа, об'єм, маса) – ті, що виражені тільки числовим значенням;
- векторні (сила, прискорення) – ті, що виражені не тільки числовим значенням, але й напрямком.

Величини мають певні властивості:

- будь-які дві величини одного роду *можна порівнювати*: вони або рівні, або одна менше іншої, тобто для них має місце відношення «дорівнює», «менше» або «більше» і для будь-яких величин a і b характерне одне і тільки одне відношення: $a = b$, $a < b$, $a > b$;
- величини одного роду *можна додавати*, в результаті додавання отримується величина того ж самого роду, тобто для будь-яких двох величин a і b однозначно визначена величина $a+b$, яку називають сумою величин a і b;
- величину можна *множити на дійсне число*, в результаті отримується величина того ж роду, тобто для будь-якої величини a і будь-якого невід'ємного дійсного числа x однозначно визначена величина $b = x \cdot a$, яку називають добутком величини a на число x;
- величини одного роду можна *віднімати,* тобто визначати різницю величин через суму: різницею величин a і b називають таку величину c, що $a = b + c$;
- величини одного роду можна *ділити*, тобто визначати частку через добуток величини на число: часткою величин a і b називається таке невід'ємне

дійсне число x, що $a = x \cdot b$ або x називають відношенням величин a і b і позначають $x = \frac{a}{b}$.

Поняття про вимірювання величин. Основні властивості числових значень додатніх скалярних величин

Щоб дати означення й сформулювати властивості скалярних величин, необхідно ввести поняття однорідних величин. *Однорідними величинами* називають величини, які характеризують ту саму якість об'єктів. Наприклад, однорідними величинами є всі довжини відрізків, усі площі фігур, усі маси тіл і т. д.

Для будь-якої системи однорідних величин повинно бути встановлено поняття рівності *($a = b$)* і нерівності *($a < b$ або $b > a$).* Довжини відрізків, наприклад, можна порівнювати за допомогою накладання, маси тіл – за допомогою терезів тощо.

Якщо в системі однорідних скалярних величин визначена операція додавання однорідних величин, яка дає змогу замінити дві однорідні величини a і b їхньою сумою $a + b$, то така система величин називається системою *адитивно-скалярних величин.* Суму n однакових доданків $a + a + a + a\ldots + a$ позначатимемо через na.

Надалі розглядатимемо лише адитивно-скалярні величини, застосовуючи термін «величини». Одним з важливих завдань при вивченні величин є завдання вимірювання величин.

Відомо, що число можна дістати внаслідок або переліку елементів множини, або вимірювання величини. Перелік елементів скінченних множин дає натуральні числа і нуль; вісім столів, двадцять чотири стільці, жодного яблука (нуль яблук) у кошику тощо.

Результат вимірювання величин характеризує інші сторони елементів множин: їхні розміри, масу, площу і т. д. Вимірювання різних величин може виконуватись різноманітними інструментами і різними способами. Доводиться вимірювати відстані між точками, довжини прямолінійних відрізків, довжини дуг кривої, площі фігур, проміжки часу, температуру, густину тіла тощо. Спільним при вимірюванні будь-яких величин є те, що вимірювання завжди є порівняння величини даного роду з певною величиною цього ж роду, взятою за одиницю вимірювання, і вираження результату порівняння числом. Наприклад, довжини відрізків, відстані між точками вимірюються в сантиметрах, кілометрах; площі фігур – у квадратних сантиметрах, квадратних метрах, арах, гектарах; величини кутів виражаються в секундах, градусах, радіанах; тривалість часу – у годинах, хвилинах, днях, роках; температура – в градусах і т. д.

Безпосередньо порівнюючи величини, можна встановити їх рівність або нерівність. Але щоб отримати більш точний результат порівняння (дізнатись на скільки більше або на скільки менше) необхідно виміряти величини.

Виміряти якусь величину – означає порівняти її з іншою величиною цього самого роду, прийнятою за одиницю. Процес порівняння для різних величин різний, але в результаті вимірювання величина отримує певне числове значення при взятій одиниці.

Якщо дана величина a та вибрана одиниця величини e, то в результаті вимірювання величини a знайдеться таке дійсне число x, що $a = x \times e$. Це число x називають ***числовим значенням величини*** a при одиниці величини e і позначають: $x = m_e(a)$. За означенням будь-яку величину можна представити як добуток деякого числа та одиниці цієї величини.

Наприклад:

15дм = 15 × 1дм; 152т = 152 × 1т; 1723м^2 = 1723 × 1м^2.

Вимірювання величин дозволяє звести їх порівняння до порівняння чисел, операцій над величинами – до відповідних операцій над числами, що базуються на **основних властивостях числових значень додатних скалярних величин:**

- якщо величини a і b виміряли за допомогою одиниці величини e, то відношення між a і b будуть такими ж, як і відношення між їх числовими значеннями, і навпаки:

1. $a = b \iff m_e(a) = m_e(b)$,
2. $a < b \iff m_e(a) < m_e(b)$,
3. $a > b \iff m_e(a) > m_e(b)$;

- якщо величини a і b виміряли за допомогою одиниці величини e, то для того, щоб знайти числове значення суми $a + b$, достатньо додати числові значення величин a і b: $a + b = c \iff m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$;
- якщо величини a і b такі, що $b = x \times a$, де x – додатне дійсне число, величину a виміряли за допомогою одиниці величини e, то для того, щоб знайти числове значення величини b при одиниці e, достатньо число x помножити на число $m_e(a)$: $b = x \times a \iff b = x \times m_e(a)$.

Приклади:

1. якщо a = 15 кг, b = 28 кг, то маса a менше маси b, бо 15 < 28;
2. якщо a = 110 км, b = 54 км, то $a + b$ = 110 км + 54 км = (110 + 54) км = 164 км;
3. якщо площа b у 5 разів більша площі a, тобто $b = 5 \cdot a$ та a = 32 м^2 , то $b = 5 \cdot a = 5 \cdot (32$ м$^2) = (5 \cdot 32)$ м^2 = 160 м^2.

Величини, що вивчаються в курсі математики I – IV класів

Згідно з вимогами Державного стандарту повної початкової освіти та Програми з математики 1 – 4 класів учні початкової школи ознайомлюються з такими величинами, як довжина, маса, місткість, час, площа, швидкість, вартість. Всі ці величини вивчаються в тісному зв’язку з формуванням поняття натурального числа, з вивченням арифметичних дій над числами, з формуванням поняття геометричної фігури. Молодші школярі набувають деяких практичних навичок вимірювання величин, вчаться використовувати співвідношення між величинами під час розв’язування задач.

Довжина відрізка, його властивості і вимірювання

Властивість предметів мати протяжність називається ***довжиною.*** А також ***довжиною відрізка*** називається додатна величина, яка визначається для кожного відрізка так, що:

1) рівні відрізки мають рівні довжини;

2) якщо відрізок складається із кінченої кількості відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків;

3) існує відрізок, довжина якого дорівнює одиниці.

Наведені умови, яким повинна задовольняти довжина відрізка, називаються *властивостями* або *аксіомами* довжини. Неважко впевнитися, що визначена таким чином довжина відрізка задовольняє властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності. Завдання вимірювання довжини (міри) відрізка полягає у послідовному відкладанні одиничного відрізка і його частин на даному відрізку, довжину якого треба виміряти.

Розглянемо процес вимірювання довжин відрізків. З множини відрізків вибирають будь-який відрізок e і приймають його за одиницю довжини. На відрізку a від одного його кінця відкладають послідовно відрізки, що дорівнюють e до тих пір, поки це можливо. Якщо відрізки, що дорівнюють e, відкладаються n раз і кінець останнього співпав з кінцем відрізка a, то кажуть, що значення довжини відрізка a – це натуральне число n і пишуть: $a = ne$.

Якщо ж відрізки, що дорівнюють e відклалися n раз і ще залишилась остача, яка менша e, то на ній відкладають відрізки, що дорівнюють

$$e_1 = \frac{1}{10}e.$$

Якщо вони відклалися точно n_1 раз, тоді $a = n,n_1e$ і значення довжини відрізка a – це скінчений десятковий дріб.

Якщо відрізок e_1 відклали n_1 раз і залишилась остача, яка менша e_1, то на ній відкладають відрізки, що дорівнюють

$$e_2 = \frac{1}{100}e.$$

Якщо цей процес продовжувати далі, то отримаємо, що значення довжини відрізка a – це нескінченний десятковий дріб.

Отже, при вибраній одиниці довжина будь-якого відрізка виражена додатнім дійсним числом.

Правильне і обернене твердження:
якщо дано додатне число $n,n_1n_2\ldots$, то при побудові відрізка його числове значення довжини буде рівне дробу $n,n_1n_2\ldots$

Отже, маємо **основну властивість довжин відрізків:**
при вибраній одиниці довжини довжина будь-якого відрізка виражена додатнім дійсним числом і, навпаки, для кожного додатного дійсного числа існує відрізок, довжина якого виражена цим числом.

Зауважимо, що коли в результаті вимірювання маємо нескінчений десятковий дріб, то значення довжини відрізка вважається наближеним.

Сформулюємо інші **властивості довжин відрізків:**

1. Якщо два відрізка рівні, то числові значення їх довжин теж рівні і, навпаки, якщо числові значення довжин двох відрізків рівні, то і рівні самі відрізки, тобто

$$a = b \iff m_e(a) = m_e(b).$$

2. Якщо даний відрізок – це сума декількох відрізків, то числове значення його довжини дорівнює сумі числових значень довжин відрізків-доданків і, навпаки, якщо числове значення довжини відрізка дорівнює сумі числових значень декількох відрізків, то і сам відрізок дорівнює сумі цих відрізків, тобто

$$c = a + b \iff m_e(c) = m_e(a) + m_e(b).$$

3. Якщо довжини відрізків a і b такі, що $b = x \cdot a$, де x – додатне дійсне число і довжина відрізка a виміряна за допомогою одиниці e, то для того, щоб знайти числове значення довжини відрізка b при одиниці e, достатньо число x помножити на числове значення довжини відрізка a при одиниці e, тобто

$$b = x \cdot a \iff m_e(b) = x \cdot m_e(a).$$

4. При зміні одиниці довжини числове значення довжини збільшиться (або зменшиться) в стільки ж разів, в скільки збільшиться (або зменшиться) нова одиниця відносно старої.

З даних властивостей маємо:

5. $a < b \iff m_e(a) < m_e(b)$,

$a > b \iff m_e(a) > m_e(b)$;

6. $c = a - b \iff m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$;

7. $x = a : b \iff x = m_e(a) : m_e(b)$.

Розглянуті властивості дозволяють порівнювати довжини відрізків та дії над ними зводити до порівняння та дій над відповідними числовими значеннями довжин цих відрізків.

Приклади:

1) 15м < 15, 1м, бо 15 < 15, 1;
2) 6, 5см + 4, 8см = (6, 5 + 4, 8) см = 11, 3см;
3) 14 × 2 дм = (14 × 2) дм = 28дм.

Стандартні одиниці довжини

Основою встановлення системи вимірювання довжин відрізків, як і інших величин, є вибір зручних, чітко визначених одиниць вимірювання та точність виготовлення еталонів цих одиниць. З розвитком науки й техніки виготовлення еталонів одиниць довжини вдосконалювалось, точність виготовлення їх підвищувалась, а разом з цим підвищувалася точність вимірювання.

Процес розвитку й удосконалення одиниць довжини має свою історію. Найдавнішим є період, коли одиниці довжини ототожнювалися з назвами частин людського тіла. Наприклад, за одиницю довжини брали ширину чотирьох пальців, довжину ліктя (лікоть), довжини ступні (фут), довжину суглоба великого пальця (дюйм), довжину фаланги вказівного пальця (вершок) та інші.

У XV–XVI ст. у ряді країн було введено одиниці, взаємозв'язані між собою. В Росії, наприклад, одиницями довжини були: миля верства, сажень і аршин: 1 миля = 7 верств, верства = 500 сажнів, сажень = 3 аршина. У метричних одиницях аршин ≈ $71{,}12$ см.

У різних країнах були різні одиниці величин, а це стримувало спілкування між країнами, гальмувало розвиток торгівлі і т. д

Основою для міжнародної системи мір стала нова система одиниць вимірювання величин, створена у Франції у XVIII ст. За основну одиницю довжини в цій системі мір було взято метр – одна сорокамільйонна частина довжини земного меридіана, який проходить через Париж. Були введені також десяткові кратні й частки одиниці довжини, які утворюються за допомогою префіксів кіло (10^3), д< (10^{-1}), санти (10~^{2}), мілі (10^{-3}): кілометр = 1000 м, дециметр = 0,1 м, сантиметр = 0,01 м, міліметр = 0,001 м. Усі введені с ниці вимірювання величин були тісно зв'язані з одиницею довжині метром. Тому нову систему мір назвали *метричною.* Був виготовлений прототип метра із сплаву платини та іридію (90 % Pt, 10 % Ir) у вигляді лінійки з нанесеними на одному боці штрихами – еталон метра, він зберігається в Міжнародному бюро міри і ваги Національного архіву Франції. За цим еталоном і звіряють час від часу довжину метра.

Метрична система мір не одразу дістала визнання: у 1875 р. нею користувались 17 держав, а зараз – 60. У Росії ця система почала використовуватись з 1899 р., а в Україні – з 1925 р.

З розвитком науки і техніки вносяться доповнення у метрі систему мір новими одиницями вимірювання. У 1960 р. XI Генер на конференція мір прийняла нову, єдину універсальну систему ниць величин – Міжнародну систему одиниць (SI). У цій системі введено нове означення метра, він розглядається як відстань, яку ходить у вакуумі плоска електромагнітна хвиля за $\frac{1}{299792458}$ долей секунди. Таке означення одиниці довжини дає більшу точність, воно не залежить від природних умов її визначення.

Наведемо вираження деяких неметричних одиниць довжини метричними.

Миля – одиниця довжини, що мала широке застосування в національних неметричних системах одиниць довжини, вона використовується і тепер здебільшого у морській справі. Стара російська миля дорівнювала 7,468 км; англійська морська миля становить 1,853 км, американська сухопутна миля – 1,609 км; російська миля – 7 верств.

Верства — російська дометрична міра довжини, вона складається з 500 сажнів, що становить 1,0668 км. Крім цього, до XVIII ст. у Росії була межова верства як відстань між населеними пунктами, вона дорівнює 2,1336 км.

Сажень – російська дометрична міра довжини. Один сажень дорівнює 3 аршинам або 7 футам, що дорівнює 2,13.36 м. Існували також маховий сажень, який дорівнює 1,76 м, і косий сажень — 2,48 м.

Аршин – російська дометрична міра довжини, він дорівнює 16 вершкам або 71,12 см.

Фут – одиниця довжини в російській і англійській дометричній системі, дорівнює 12 дюймам або 0,3048 м.

Дюйм – часткова одиниця довжини в російській і англійській дометричній системі мір, дорівнює 1/12 фута або 2,54 см.

Вершок – російська дометрична міра довжини, дорівнює 1 дюйма або 4,45 см.

При сучасних вимірюваннях довжин використовують такі одиниці як міліметр (мм), сантиметр (см), дециметр (дм), метр (м), кілометр (км), між якими існують відповідні співвідношення:

1м = 100см	1км = 1000м
1м = 10дм	1 дм = 10см
1м = 1000мм	1см = 10мм

Площа фігури, її властивості і вимірювання

Задача вимірювання площі – одна з найдавніших задач практики. Люди у давнину вимірювали площі земельних ділянок, з кожної одиниці площі вони платили податки. У стародавньому Єгипті після весняного розливу Нілу і спаду води потрібно було відновлювати межі ділянок, а для цього необхідно було вміти вимірювати їх площі. В стародавні часи одиницями площі були: колодязь – площа, яку можна полити з одного колодязя, соха або плуг – середня площа, що оброблена за день сохою чи плугом. (Слово «геометрія» – грецьке, у перекладі означає «землемірство»).

Площею фігури називається додатна величина, яка визначена для кожної фігури так, що:

1) рівні фігури мають рівні площі;

2) якщо фігура складається із скінченої кількості фігур, то її площа дорівнює сумі їх площ.

Якщо порівняти дане означення з означенням довжини відрізка, то маємо, що для площі характерні ті ж самі властивості, що і для довжини, але задані вони на різних множинах: довжина – на множині відрізків, а площа – на множині плоских фігур.

За одиницю площі приймають площу квадрата, довжина сторони якого дорівнює одній лінійній одиниці: 1 м^2 (площа квадрата із стороною 1 м), 1 см^2, 1 мм^2.

Якщо довжину лінійної одиниці позначено через e, то відповідну їй одиницю площі зручно позначити через e^2.

Вимірювання площі полягає в кратному порівнянні площі даної фігури F з площею одиничного квадрата e^2. Результатом порівняння буде число n таке, що

$S_ф = n \cdot e^2 \Rightarrow m_e(F) = n$, де n – числове значення площі.

Властивості площі:

1. Якщо фігури рівні, то рівні і числові значення їх площ (при однаковій одиниці площі).

Фігури, площі яких рівні, називаються рівновеликими.

2. Якщо фігура F складається з фігур F_1, F_2, ..., F_n, то числове значення площі фігури F дорівнює сумі числових значень площ фігур F_1, F_2, …, F_n (при однаковій одиниці площі).

3. При заміні одиниці площі числове значення площі збільшується (зменшується) у стільки ж разів, у скільки ж нова одиниця менша (більша) від старої.

Щоб на практиці вимірювати площу використовують палетку – сітку квадратів на прозорому матеріалі. Для вимірювання палетку накладають на фігуру, площу якої знаходять. Якщо виміри прямокутника – цілі числа, палетка накладається так, щоб її лінії сумістились із сторонами прямокутника. Далі підраховують число квадратів, що вміщуються в прямокутнику.

Якщо фігура складніша, то є два способи визначення площі за допомогою палетки.

<u>І спосіб.</u> Спочатку порахувати кількість цілих квадратів, що знаходяться у середині фігури F. Їх кількість m. А потім порахувати кількість нецілих квадратів, тобто число n. Тоді площа фігури F буде обчислена за формулою:

$$S\ (F) \approx (m + n : 2) \cdot e^{2}.$$

<u>ІІ спосіб.</u> Також полічити кількість цілих квадратів у середині фігури, їх m. Потім полічити найбільшу кількість квадратів, що містять у собі фігуру, нехай їх k, тоді

$$m \cdot e^{2} < S\ (F) < k \cdot e^{2}.$$

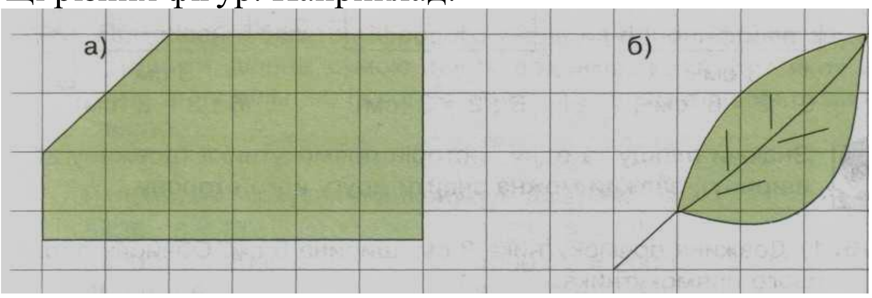
Тобто значення S буде десь посередині між числами m і k. Тому треба знайти середнє арифметичне

$$S \approx \frac{m+k}{2} \cdot e^{2}.$$

В обох способах значення площі будуть співпадати: $k = m + n$

$$S \approx \left(\frac{m+m+n}{2}\right) \cdot e^{2} = \frac{2m+n}{2} \cdot e^{2} = (\mathrm{m} + \frac{n}{2}) \cdot e^{2}.$$

У підручниках з математики початкових класів за допомогою палетки учні знаходять площі різних фігур. Наприклад:



У даній таблиці подано одиниці вимірювання площі, які застосовуються найчастіше:

1мм^2 – площа квадрата, сторона якого 1мм
1см^2 – площа квадрата, сторона якого 1см
1дм^2 – площа квадрата, сторона якого 1дм
1м^2 – площа квадрата, сторона якого 1м
Ар (а) – площа квадрата, сторона якого 10м (сотка)
Гектар (га) – площа квадрата, сторона якого 100м
1км^2 – площа квадрата, сторона якого 1км

Між одиницями площі існують наступні співвідношення:

1см^2 = 100мм^2 1 дм^2 = 100см^2

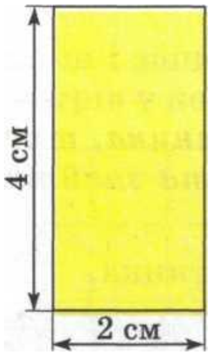
1м^2 = 100дм^2 1 а = 100м^2

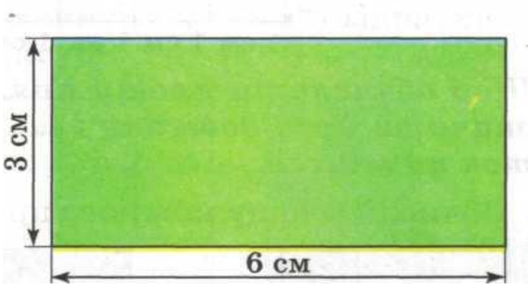
1га = 10000м^2 1 км^2 = 1000000м^2

За Програмою початкових класів у 4 класі учні знайомляться з правилом обчислення площі прямокутника: ***щоб обчислити площу прямокутника, треба визначити його довжину і ширину та знайти добуток цих чисел.***

Приклади:

1) $4 \times 2 = 8$ (см ^{2}) 2) $3 \times 6 = 18$ (см ^{2})





Рівновеликість і рівноскладеність многокутників. Формули площі деяких многокутників.

Властивості площ фігур дають змогу вивести формули для обчислення площ деяких многокутників. При цьому використовуються поняття рівновеликості та рівноскладеності многокутників та їхні властивості.

Означення. *Два многокутники, які мають рівні площі, називаються* ***рівновеликими.***

Зауважимо, що рівновеликі многокутники можуть бути й не рівними. Наприклад, два прямокутники із суміжними сторонами $a = 4$ см, $b = 6$ см та $a_1 = 2$ см, $b_1 = 12$ см не рівні, але рівновеликі бо мають рівні площі $S = 24$ см^2. Геометричним еквівалентом поняття рівновеликості, який дає змогу перетворювати многокутники так, щоб установити рівновеликість їх, є поняття рівноскладеності многокутників.

Означення. *Два многокутники називаються* ***рівноскладеними****, якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників.*

Іншими словами, два многокутники називаються рівноскладеними, якщо, розрізавши певним способом один з них на скінченне число частин, можна, розміщуючи ці частини інакше, скласти другий многокутник. Безпосередньо з означення маємо такі **властивості рівноскладеності многокутників**:

1. Кожний многокутник рівноскладений сам собі (властивість рефлексивності).
2. Якщо многокутник Р рівноскладений з многокутником P_1, то й многокутник P_1 рівноскладений з многокутником P (властивість симетричності).
3. Два многокутники, рівноскладені з одним і тим самим третім многокутником, рівноскладені між собою (властивість транзитивності).

Звідси відношення рівноскладеності многокутників е *бінарне відношення еквівалентності.*

Розглянемо деякі твердження про рівновеликість і рівноскладеність многокутників.

Теорема 1. Будь-які два рівноскладені многокутники рівновеликі.

Доведення. Нехай многокутники P і Q — рівноскладені. Тоді за означенням рівноскладеності ці два многокутники можна розкласти на однакове число попарно рівних частин P_i і Q_i тобто

$P=\sum_{i=1}^{n}P_i$ і $Q=\sum_{i=1}^{n}Q_i$, причому $P_i=Q_i$, i= 1, 2, 3, …, n. Тоді

$S(P)=\sum_{i=1}^{n}S(P_i)$ і $S(Q)=\sum_{i=1}^{n}S(Q_i)$

Оскільки Pi = Qi, то $S(P$i$)$ = S (Qi) і S (P) = S (Q).

Теорему доведено.

Теорема 2. Кожний паралелограм рівноскладений з прямокутником, одна із сторін якого дорівнює стороні паралелограма, а друга — висоті паралелограма, проведеній до даної сторони.

З цієї теореми маємо, що площа паралелограма дорівнює добутку довжини його однієї сторони і довжини висоти, проведеної до цієї сторони.

Теорема 3. Кожний трикутник рівноскладений з паралелограмом, одна із сторін якого дорівнює одній із сторін трикутника, а висота, проведена до цієї сторони паралелограма, дорівнює половині висоти трикутника, проведеної до цієї ж сторони.

Звідси маємо, що площа трикутника дорівнює половині добутку довжини його сторони і довжини висоти, проведеної до цієї сторони:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}ah_a.$$

Теорема 4. Кожний ромб рівноскладений з прямокутником, одна із сторін якого дорівнює одній з діагоналей ромба, а друга – половині другої діагоналі ромба.

Звідси маємо, що площа ромба дорівнює половині добутку довжин його діагоналей:

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2.$$

Теорема 5. Кожна трапеція рівноскладена з паралелограмом, одна із сторін якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота, проведена до цієї сторони, дорівнює висоті трапеції.

Наслідок 1. Площа кожної трапеції дорівнює добутку довжини її середньої лінії (або півсумі довжин основ) на довжину висоти трапеції:

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

Сформулюємо без доведення таку теорему.

Теорема 6. Будь-які два рівновеликі многокутники рівноскладені.

Пропонуємо тепер самостійно сформулювати необхідну й достатню умову рівновеликості двох многокутників.

Наведемо деякі формули для обчислення площ плоских фігур.

Площа трикутника:

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ **;**

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ***(формула Герона).***

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ **;**

$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$ **;**

$S_\Delta = pr$ **.**

Тут *a, b, c* – сторони трикутника, h_a, h_b, h_c – висоти, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — півпериметр, *R* – радіус кола, описаного навколо трикутника, *r* – радіус кола, вписаного в трикутник.

Площа паралелограма

$S = ah_a = ab\sin\alpha$.

Тут *a, b* – сторони паралелограма, h_a – висота проведена до сторони, α – кут між сторонами *a* і *b*.

Площа ромба

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

Тут d_1 і d_2 – діагоналі ромба.

Площа правильного n-кутника

$S_n = \frac{1}{2}P_nr = \frac{1}{2}R^2n\sin\frac{360^0}{n}$

Тут *R* і *r* – радіуси описаного і вписаного кіл, P_n – периметр, *n* – число сторін правильного *n*-кутника.

Площа круга радіуса *R*: $S = \pi R^2$.

Площа сектора з кутовою величиною дуги α^0: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$ **.**

Площа сегмента обчислюється як різниця площі сектора, обмеженого радіусами *OA* і *OB,* і площі трикутника *AOB.*

Площі поверхонь тіл

Означення. Площею поверхні многогранника *називають суму площ усіх його граней.*

Площею бічної поверхні призми й піраміди називають суму площ всіх їх бічних граней.

Теорема 7. Площа бічної поверхні довільної призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на її бічне ребро.

Наслідок 2. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра.

Щоб знайти площу бічної поверхні піраміди, треба обчислити площу кожної її бічної грані і знайти суму їх. Якщо ж піраміда правильна, то площу її бічної поверхні можна обчислити на основі такої теореми.

Теорема 8. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи на довжину апофеми.

Прямий круговий циліндр можна розглядати як тіло, яке утворюється при обертанні прямокутника навколо однієї з його сторін. Поверхня, яку описує сторона прямокутника, називається *бічною поверхнею циліндра.* Якщо до бічної поверхні додати ще два круги, що є основами циліндра, то дістанемо повну поверхню (або просто поверхню) циліндра.

Як площу бічної поверхні циліндра наближено беруть площу бічної поверхні правильної призми, вписаної в циліндр. При збільшенні числа бічних граней такої призми її бічна поверхня все більше наближається до поверхні циліндра, а площа бічної поверхні призми наближається до деякої певної границі, яку вважають площею бічної поверхні циліндра.

Площа бічної поверхні правильної призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра, яке є висотою призми і висотою циліндра. При цьому периметр основи призми наближається до певної границі, яка є довжиною кола основи циліндра, тобто до $2\pi R$, де R – радіус основи циліндра. Тому площа бічної поверхні вписаної призми при необмеженому збільшенні числа її бічних граней має границею величину $2\pi RH$, де H – висота циліндра.

Теорема 9. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює добутку довжини кола його основи на висоту, тобто $S_{б.ц.} = 2\pi RH$.

Додавши до площі бічної поверхні циліндра площі двох його основ, дістанемо

$$S_{п.ц.} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R),$$

тобто площу поверхні циліндра.

Прямий круговий конус можна розглядати як тіло, утворене при обертанні прямокутного трикутника навколо одного з катетів. Поверхня, яку описує при цьому гіпотенуза прямокутного трикутника, називається бічною поверхнею конуса. Повна поверхня конуса складається з бічної поверхні конуса та його основи (круга).

Як площу бічної поверхні конуса наближено беруть площу бічної поверхні правильної піраміди, вписаної в конус. При необмеженому збільшенні числа бічних граней вписаної піраміди її бічна поверхня наближається до бічної поверхні конуса, а площа бічної поверхні піраміди наближається до деякої певної границі, яку називають площею бічної поверхні конуса. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи на довжину апофеми. При необмеженому збільшенні числа сторін основи, піраміди її периметр збільшується і наближається до границі, яка дорівнює довжині кола основи конуса, тобто до $2\pi R$, де R – радіус основи конуса. Апофема вписаної піраміди має границею твірну конуса. Звідси дістаємо таку теорему.

Теорема 10. Площа бічної поверхні конуса дорівнює половині добутку довжини кола його основи на довжину твірної, тобто

$S_{б.к} = \pi Rl$, де l – довжина твірної конуса.

Додавши до площі бічної поверхні конуса площу його основи, дістанемо площу поверхні конуса

$$S_{п.к} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

Поверхня, утворена обертанням півкола навколо його діаметра, *називається кульовою поверхнею* або *сферичною поверхнею* або просто *сферою.*

Теорема 11. Площа поверхні кулі дорівнює почетвернній площі її великого круга: $S_{кулі} = 4\pi R^2$.

Об'єм тіла, його властивості і вимірювання

Теорія вимірювання об'ємів ґрунтується на аксіомах, подібних аксіомам площі, та на поняттях рівновеликості і рівноскладеності просторових фігур.

Означення. Об'ємом геометричного тіла *називається величина обмеженої частини простору, яку займає тіло.*

З геометричної точки зору:

кожному многограннику можна поставити у відповідність додатну скалярну величину, що називається *об'ємом* так, що:

1) рівні многогранники мають рівні об'єми;

2) об'єм многогранника, що є об'єднанням двох многогранників, які не мають внутрішніх спільних точок, дорівнює сумі об'ємів цих многогранників;

3) числове значення об'єму куба з довжиною ребра, що дорівнює одиниці довжини e, дорівнює одиниці об'єму e^3.

З фізичної точки зору ***об'єм*** – це здатність тіла займати якийсь простір.

Для величини об'єму виконуються всі вище зазначені властивості величин (об'єми можна додавати, віднімати і в результаті отримувати об'єм, можна множити на число, ділити на число і ділити на об'єм).

У стародавні часи об'єми рідких тіл вимірювалися такими одиницями, як бочка – 40 відер, відро – 10 штоф, штоф – 2 пляшки, пляшка – 2 сороковки, сороковка – 2,5 сотки, сотка – 2 шкалики.

За одиницю вимірювання об'єму приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює. одиниці довжини. Міжнародна система одиниць для вимірювання об'ємів пропонує такі одиниці: 1 м^3 = 1000 дм^3; 1 дм^3 = 1000 см^3; 1 см^3 = 1000мм^3. При вимірюванні об'ємів рідких тіл за одиницю об'єму беруть один літр, причому 1 л = 1 дм^3.

Означення. *Два тіла називаються* ***рівноскладеними****, якщо з усіх частин одного тіла можна скласти друге тіло. З властивостей об'єму тіла випливає, що рівноскладені тіла мають рівні об'єми.*

Тіла, що мають рівні об'єми, називаються *рівновеликими.* Отже, рівноскладені тіла є водночас і рівновеликими. Обернене твердження не виконується: не кожні два рівновеликі тіла складаються з відповідно рівних частин.

Поняття рівноскладеності тіл використовується при виведенні формул для обчислення об'ємів деяких тіл.

За Програмою початкової школи з математики у 1 класі розв'язують задачі на обчислення об'ємів рідини у літрах.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Теорема 12. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.

$\boldsymbol{V_{\text{пар.}} = abc}$, де a,b,c – виміри прямокутного паралелпіпеда.

Наслідок 3. Об'єм куба дорівнює кубу його ребра.

Наслідок 4. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на висоту.

Наслідок 5. У прямокутного паралелепіпеда будь-яку грань можна прийняти за основу.

Задача 1. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда 7 см, 8 см і 9 см. Знайти об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай у паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі AC = 9 см, AB_1 = 8 см і BC_1 = 7 см. Оскільки у прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники, то $AB^2 + BC^2 = 9^2$; $AB^2 + BB_1^2 = 8^2$, $BC^2 + BB_1^2 = 7^2$. Визначивши з першої рівності AB^2, а з другої BB_1^2 і підставивши значення BB_1^2 у третю рівність, дістанемо: $9^2 - BC^2 + 7^2 - BC^2 = 8^2$, звідси $BC^2 = 33$, $BC = \sqrt{33}$. З перших двох рівностей знайдемо $AB^2 = 48$, $AB = 4\sqrt{3}$; $BB_1^2 = 16$; $BB_1 = 4$.

Об'єм паралелепіпеда $V = AB \cdot BC \cdot BB_1 = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{33} \cdot 4 = 48\sqrt{11}\left(см^3\right)$.

Об'єми многогранників

Використовуючи властивості об'єму тіла, поняття рівновеликості та теорему про об'єм прямокутного паралелепіпеда, можна довести такі теореми і наслідки про об'єми призм і пірамід.

Теорема 13. Об'єм прямої трикутної призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Наслідок 6. Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Наслідок 7. Об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Наслідок 8. Призми, які мають рівновеликі основи й рівні висоти – рівновеликі.

Теорема 14. Об'єм будь-якої трикутної піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.

Наслідок 9. Об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

Задача 2. Знайти об'єм правильного октаедра з ребром *a*.

Розв'язання. Правильний октаедр складається з двох правильних чотирикутних пірамід, спільною основою яких є квадрат зі стороною *a*. Площа основи піраміди дорівнює a^2. Діагональ основи $a\sqrt{2}$. Тоді висота піраміди $H=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Об'єм піраміди , а об'єм правильного октаедра $V=2\frac{a^3\sqrt{2}}{6}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Об'єм тіл обертання

Об'ємом циліндра з радіусом основи *R* і висотою *H* вважають границю об'єму правильної вписаної в нього призми при необмеженому збільшенні числа її граней.

Об'єм правильної призми дорівнює добутку площі основи *S* на висоту Н. При цьому площа основи призми має границею площу круга основи циліндра, тобто πR^2. Тому границею для об'єму вписаної призми є величина $\pi R^2 H$.

Теорема 15. Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту: $V_ц=\pi R^2 H$

За об'єм конуса з радіусом основи *R* і висотою *H* беруть границю об'єму вписаної в конус *n*-кутної правильної піраміди. Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи *S* на висоту *H*.

Границею площі основи піраміди є площа круга основи конуса, тобто величина πR^2. Тому об'єм конуса $V_k=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Теорема 16. Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.

Аналогічними міркуваннями можна довести справедливість такої теореми.

Теорема 17. Об'єм кулі дорівнює добутку однієї третини поверхні кулі на її радіус: $V_{кулі}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Наслідок 10. Об'єми куль відносяться як куби їхніх радіусів.

Задача 3. З дерев'яного рівностороннього циліндра виточили кулю найбільш можливого розміру. Скільки процентів матеріалу пішло у відходи?

Розв'язання. Радіуси основи циліндра і кулі дорівнюють *R*, висота циліндра дорівнює діаметру кулі *H* = 2*R*. Тому об'єм циліндра $К_ц = 2лR^3$, а об'єм виготовленої кулі $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$. Відходами є різниця $V_ц - V_k = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$

або

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot 100\%}{2\pi R^3} = 33\frac{1}{3}\%$$

Задача 4. Скільки кульок діаметра 1 см можна вилити з куска свинцю масою 1 кг? Питома вага свинцю 11,4 г/см^3.

Розв'язання. Об'єм кулі діаметра 1 см

$$V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi(0{,}5)^3 \approx 0{,}52(см^3)$$

.

Маса такої кульки $P = 11{,}4 \cdot 0{,}52 \approx 5{,}9$ г. З одного кілограма свинцю можна вилити $1000 : 5{,}9 \approx 169$ кульок.

Інші величини, що розглядаються в початковому курсі математики.

Маса тіла і її вимірювання

З математичної точки зору ***маса тіла*** – це така додатна величина, яка має властивості:

1) маса однакова у тіл, які врівноважують один одного на терезах;

2) маса додається, коли тіла з'єднуються разом; маса декількох тіл, взятих разом, дорівнює сумі їх мас.

З курсу фізики відомо, що кожне тіло має властивість зберігати свій механічний стан доти, поки якась сила не виведе його з цього стану (І закон Ньютона). Ця властивість як міра інерції тіла називається його ***масою*** (***інертність*** – це стан спокою). Саме цією властивістю пояснюється те, що наприклад, зрушити з місця порожній візок легше, ніж навантажений, легше підняти маленьку кулю, ніж велику з того самого матеріалу.

За ІІ законом Ньютона маса тіла пов'язана з такими величинами, як сила F і прискорення *a*, яке дістає тіло маси *m* під дією даної сили, тобто

F = *m·a*.

На підставі цього закону можна встановити і інші залежності:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \text{ або } \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

тобто маси двох тіл обернено пропорційні прискоренням або миттєвим швидкостям, які вони дістають в результаті взаємодії.

Перше уявлення про те, що тіла мають різну масу, діти дістають з досвіду у ранньому віці, беручи в руки предмети різного розміру і різної маси. Щоб допомогти учням початкових класів виділити масу серед інших властивостей тіл, доцільно пропонувати їм оцінити «на руку», який з предметів (одного розміру, але з різних матеріалів) має більшу масу, наприклад куб або брусок металевий і дерев'яний, гумовий м'яч і металева або дерев'яна куля Потім, навпаки, запропонувати різні предмети за розміром, але однакової маси – спочатку масою 1 кілограм (1 клас). Пізніше (3 клас) учні ознайомлюються з новими одиницями маси – тонною, грамом, центнером. В процесі розв'язування практичних задач учні засвоюють співвідношення між одиницями маси:

1кг = 1000г   1 ц = 100кг
1 т = 10ц   1 т = 1000кг

В історії людства у зв'язку з розвитком обміну продуктами виникла потреба вимірювати масу тіла. Який народ і коли саме винайшов терези – невідомо. До нас дійшло зображення важільних терезів у древніх пам'ятниках Єгипту II тис. до н. е. Мірою маси були гран (маса зерна) та карат (маса насіння одного з видів бобів). Одиниця маси гран використовується донині в аптекарській справі, а карат – при вимірюванні маси дорогоцінних металів і каменів (1 карат ≈ 0, 2г). Пізніше за одиницю маси почали брати масу води, що наповнює певний посуд. Російською одиницею маси була гривня, яку пізніше почали називати фунтом. Одиницею маси також був пуд – 40 фунтів і золотник.

У Міжнародній системі одиниць 1грам – це маса одного кубічного сантиметра чистої дистильованої води при 4^0 С, 1кілограм – це маса одного кубічного дециметра води або 1літра, 1т – маса одного кубічного метра води. В Національному архіві Франції зберігається «архівний кілограм» – циліндрична платинова гиря.

Основною одиницею вимірювання маси є грам, коротке позначення – г. При значенні інших одиниць маси використовуються префікси мілі і кіло.

1г = 1000мг чи 1мг = 0,001г, 1кг = 1000г чи 1г = 0,001кг,
1кг = 1000000мг чи 1 мг = 0,000001кг.

Великі за масою величини вимірюють у тоннах (т) і центнерах (ц):

1т = 10ц = 1000кг = 1000000г чи 1ц = 0,1т, 1кг = 0,001т, 1г = 0,000001т,
1ц = 100кг = 100 000г чи 1кг = 0,01ц, 1г = 0,00001ц.

Час та його вимірювання

Час – це більш складна для сприймання величина, бо її не можна побачити як довжину або площу, не можна відчути як масу.

Час – це те, що відокремлює одну подію від іншої.

У математиці й фізиці час розглядають як скалярну величину, тому можуть виконувати всі властивості і дії над часом: додавати, віднімати, множити на число, ділити на число.

За одиницю вимірювання часу взято такий процес, що регулярно повторюється. Це є секунда, доба, рік, тощо.

Усі події у житті відбуваються у часі. З вимірюванням часу пов'язана більшість хімічних, фізичних і технічних процесів. Якщо міри довжини, маси, площі, об'єму тривалий час були різними у різних народів і лише поступово були замінені єдиними мірами метричної системи, то для вимірювання часу здавна встановилась одна одиниця міри – доба. Але спочатку день і ніч здавались людині чимось протилежними і вони лічили окремо дні і ночі, а потім об'єднали їх в добу. Доба – це час, протягом якого земна куля обертається навколо своєї осі.

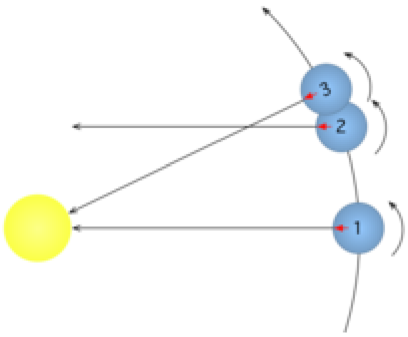
Також для вимірювання часу люди використовували фази Місяця. Оскільки кожна фаза займає приблизно 7 діб, то це дало людині нову міру часу – тиждень. Древні вавілоняни обожнювали небесні світила Сонце, Місяць і планети – Венеру, Марс, Меркурій, Юпітер, Сатурн. Кожному з них вони присвятили один день тижня. У Франції, Англії і тепер дні тижня мають назви планет: неділя – день Сонця, і т.д.

Число 7 у давнину мало магічний смисл: мешканці Афін кожен рік богу Мінотавру посилали дань – 7 юнаків або 7 дівчат, визнавали 7 чудес світу, вважали, що Рим побудований на 7 горбах.

Проміжок часу від молодого Місяця до іншого молодого Місяця назвали місяцем. Спочатку одиниці часу «рік» не було (він дуже великий), але потім він з'явився, бо ним почали позначати час, протягом якого Земля робить повний оберт навколо Сонця – 365 діб 5 годин 48 хвилин 46 секунд.

У різних народів рік починався у різні пори року: у римлян – з березня, у єгиптян – то влітку, то взимку, то навесні.

Доба – позасистемна одиниця вимірювання часу, приблизно рівна періоду обертання Землі навколо своєї осі. Доба дорівнює 24 годинам (або 1440 хвилинам, або 86400 секундам).



На малюнку можна побачити порівняння тривалості зоряної (2) і сонячної (3) доби при збігу напрямків орбітального й власного обертання.

Розрізняються сонячну добу і зоряну добу.

Сонячна доба – це проміжок часу між двома послідовними нижніми кульмінаціями середнього сонця (це фіктивна точка, що рівномірно рухається вздовж небесного екватора), вона триває 24 години.

Зоряна доба – проміжок часу між двома послідовними кульмінаціями зірки (найвищим положенням її над горизонтом) через меридіан точки спостереження. За зоряну добу Земля робить повний оберт навколо своєї осі. Вона дорівнює 23 год 56 хв 4 с. Вони не рівні через те, що завдяки обертанню Землі навколо Сонця для спостерігача, що перебуває на Землі, Сонце зміщується на тлі нерухомих зірок.

Секунда – одиниця виміру часу в Міжнародній системі одиниць. Еталон секунди визначається, як 9 192 631 770 періодів випромінювання атома цезію-133 при переході між двома рівнями основного стану, розщепленими в магнітному полі ядра, при сталій довжині хвилі, нульовій температурі й відсутності зовнішнього магнітного поля. Секунда дорівнює 1/60 хвилини, 1/3600 години, або 1/86400 доби. Визначення секунди через тривалість доби незадовільне для наукових цілей, бо довжина дня не постійна, а змінна. Тому виникла потреба в перевизначені еталону часу. У 1956 році фахівці надали секунді значення 1/31 556 925,9747 тривалості тропічного року (тобто часу, потрібного видимому з Землі Сонцю, щоб повернутися на таке саме положення відносно інших космічних світил) для 1900 року. У 1967 році було встановлено новий еталон, що опирається на спектроскопію.

Виміряти проміжок часу можливо лише порівнявши його з тривалістю іншої події, яка вважається регулярною. Так, можливо сказати, що місяць січень триває 31 день. У цьому випадку період часу між початком і кінцем місяця порівнюється з регулярною подією – сходом Сонця.

Прилади, призначені для вимірювання коротких проміжків часу, називаються годинниками і хронометрами. Уже в давнину були відомі сонячні годинники. Проте потреби дедалі точнішого визначення проміжків часу потребувало розробки нових приладів, в основі яких лежали б коротші процеси з коротшими періодами. В епоху Відродження таким базовим процесом для вимірювання часу стали коливання маятника. Коливання маятника і інші типи механічних коливань, лежать в основі більшості механічних годинників. Електронні теж використовують коливні процеси, але вони можуть мати немеханічну природу.

Юліанський календар введено, починаючи із 1 січня 45 р. до н. е. Юлієм Цезарем у кінці 46 р. до н. е. Спираючись на поради грецького астронома Созігена (Sosigenes) та з метою добитися того, щоб певні астрономічні події на зразок весняного та осіннього рівнодення відбувалися щороку в певний цілком визначений день, Цезар узгодив тривалість року із сонячним календарем, тобто встановив її рівною 365 дням із чвертю дня. Чверті дня враховувалися наступним чином: кожного четвертого року до календаря додавався ще один день і тривалість місяця лютого ставала не 29, а 30 днів. Свого часу Гай Юлій Цезар пожартував: «Римляни завжди перемагають, але ніколи не знають коли це трапилося». Ім’я Цезаря вшановано у латинській назві сьомого місяця (тодішнього п’ятого) — *Julius*. Пізніше Октавіан Август виправив конструкцію високосного року і восьмий місяць на його честь був названий *Augustus*. А щоб не осоромитися перед імператором – попередником, місяць серпень *Augustus* також отримав 31-й день, який взяли з кінця року — 29/30 лютого. Таким чином лютий вкоротився й став тривати 28 днів звичайного року й 29 високосного. Але юліанський рік тривалістю в 365 днів і 6 годин довший за істинний сонячний рік (365 днів 5 годин 49 хвилин і 46 секунд) на 14 хвилин 11 секунд. Різниця складає близько 0, 0078 дня за рік або близько одного дня за 128 років. За півтора тисячоліття календар знову відставав на десять днів. Що й стало причиною введення в 1582 році Григоріанського календаря.

Григоріанський календар – календар, уведений у вжиток 4 жовтня 1582 року Папою Римським Григорієм XIII. Реформа календаря мала за мету ліквідувати помилку в обчисленні дат: з моменту введення юліанського календаря до XVI століття «набігла» різниця в 10 днів порівняно з астрономічною датою. Згідно з нововведенням папи, одразу ж після 4 жовтня 1582 року настало 15 жовтня. Цього дня в Італії, Франції, Іспанії, Португалії та Польщі прийнято григоріанський календар — попередні десять днів були вилучені з календаря. 1583 року Григорій XIII направив Константинопольському патріарху Ієремії II пропозицію перейти на новий календар. Наприкінці 1583 року на соборі в Константинополі пропозиція була відкинута, як невідповідна канонічним правилам святкування Великодня.

В Українській народній республіці григоріанський календар уведено з 16 лютого 1918 року і цей день став вважатися як 1 березня 1918 року. Закон про це було ухвалено 12 лютого 1918 року (за старим стилем) на засіданні Малої ради в Коростені.

У Росії григоріанський календар введено 1918 року декретом Раднаркому, згідно з яким після 31 січня 1918 року слідувало 14 лютого 1918 року. Російська православна церква і деякі інші православні церкви не прийняли григоріанський календар, тож і далі користуються юліанським календарем.

У повсякденному житті використовуються наступні одиниці вимірювання часу, між якими існують певні співвідношення:

1 хв = 60 с　　　　1 год = 60 хв
1 год = 3600 с　　　　1 доба = 24 год
1 місяць = 30 або 31 доба (у лютому 28 або 29 діб)
1 звичайний рік = 365 діб
1 високосний рік = 366 діб
1 століття = 100 років

Розв’язування задач на обчислення тривалості подій

Існують 3 види задач на обчислення тривалості подій:

- визначення тривалості події за відомими початком та закінченням події:

Перерва розпочалася о 12 год 10 хв і закінчилася о 12 год 40 хв. Скільки часу тривала перерва?

12 год 40 хв – 12 год 10 хв = 30 хв

- визначення закінчення події за відомими її початком та тривалістю:

1) Перерва розпочалася о 10 год 25 хв і тривала 20 хв. Коли закінчилася перерва?

10 год 25 хв + 20 хв = 10 год 45 хв

2) Екскурсія розпочалася о 9 год 15 хв і тривала 2 год 50 хв. Коли закінчилася екскурсія?

$$\begin{array}{r} 9 \text{ год } 15\text{хв} \\ + \underline{2 \text{ год } 50 \text{ хв}} \\ \underline{11 \text{ год } 65 \text{ хв}} \\ 12 \text{ год } 05 \text{ хв} \end{array}$$

- визначення початку події за відомими її тривалістю та закінченням:

Перерва тривала 40 хв і закінчилася о 13 год 50 хв. Коли розпочалася перерва?

13 год 50 хв – 40 хв = 13 год 10 хв

Наведені приклади задач охоплюють події, що сталися протягом доби. При розв'язуванні схожих задач треба не забувати враховувати те, що добу ділять на дві половини, і виконувати відповідні перетворювання. Наприклад, якщо сонце зійшло о 6 год 25 хв ранку, а зайшло о 6 год 20 хв вечора, то від початку доби до його заходу минуло 12 год + 6 год 20 хв, тобто 18 год 20 хв. Отже, тривалість дня за умовою цієї задачі становить:

$$\begin{array}{r} -\ 18 \text{ год } 20 \text{ хв} \\ \underline{6 \text{ год } 24 \text{ хв}} \\ 11 \text{ год } 56 \text{ хв} \end{array}$$

Щоб уникнути помилок при обчисленні поданого виразу, необхідно пам'ятати, що 1 год = 60 хв (а не 10), а тому від 80 хв будемо віднімати 24 хв.

Серед задач на обчислення тривалості подій є такі, зміст який містить час протягом кількох років або століть.

Наприклад:

«Велика Вітчизняна війна почалася 22 червня 1941 р., а закінчилася 9 травня 1945р. Скільки часу тривала Велика Вітчизняна війна?»

При розв'язанні цієї задачі перетворюємо календарні дати (22 червня 1941 р. та 9 травня 1945р.) в арифметичні. Для цього визначаємо скільки повних років, місяців і днів минуло від початку нашої ери до початку події та її кінця, і від другого числа (відрізка часу) віднімаємо перше (відрізок часу):

$$\begin{array}{r} -\ 1944 \text{ р. } \ 4 \text{ міс. } \ 8 \text{ діб} \\ \underline{1940 \text{ р. } \ 5 \text{ міс. } 21 \text{ доба}} \\ 3 \text{ р. } 10 \text{ міс. } 17 \text{ діб} \end{array}$$

Вартість та залежність між величинами: ціна, кількість, вартість

Безперервний рух товарів і послуг, який відбувається в економіці, опосередковується відповідним рухом грошей. Грошовий обіг – це сукупність усіх грошових платежів та розрахунків, що обслуговують відносини еквівалентного обміну.

Грошовий обіг з'явився одночасно з виникненням грошей, тобто у період розпаду первіснообщинного ладу. В умовах рабовласницького та феодального устроїв розширенню грошового обігу перешкоджали панування натурального господарства та обмеженість товарних зв'язків. Значного розвитку грошовий обіг набув при капіталізмі, коли сформувалися національні та світові товарні ринки (XVI – XVII ст.), хоча окремі їх елементи з'явилися значно раніше.

Грошова одиниця встановлюється законодавством кожної країни з урахуванням історичних особливостей її розвитку та національних традицій. Так, назва грошової одиниці США – долар – походить від слова «талер» – назва старовинної срібної монети, яку в Середньовіччі карбували в Чехії. Іспанські срібні долари поряд із англійськими фунтами стерлінгів до кінця 18 ст.

обслуговували грошовий обіг США. Назва англійської валюти – фунт стерлінгів – первісно відповідала ваговому вмісту грошової одиниці, тобто фунт стерлінгів містив фунт срібла. Назва грошової одиниці України – гривня. Таку назву мала грошова одиниця Київської Русі – високо розвинутої держави Європи.

Гривня – грошово-лічильна одиниця Київської Русі. В XI ст. в обігу були срібні гривні. В XVII ст. гривня важила 160–197 г срібла. Векша – грошова одиниця Київської Русі (IX – XIII ст.). Дорівнювала 1/4 – 1/6 куни, 1/2 – 1/3 резани. Еквівалентом векши було 0,33 г срібла. Куна – срібна грошова одиниця Київської Русі. Назва походить від шкірки куниці, яка виконувала роль грошової одиниці. 1 К. = 2 г = 2 резанам = 4 - 6 векшам.

Гроші як міра вартості однорідні і використовуються в якості масштабу для виміру відносних вартостей товарів. Подібно до того, як ми вимірюємо відстань у милях або кілометрах, аналогічно ми вимірюємо вартість товарів у грошовому виразі, надаючи їм форму ціни. Виражаючи ціни в грошових одиницях (доларах, марках, гривнах) можна визначати та порівнювати вартості різноманітних товарів.

Ціна **–** кількість грошей, які сплачуються за одиницю товару; виражена в грошах вартість одиниці товару.

Вартість – кількість грошей, які сплачуються за декілька одиниць товару; виражена в грошах вартість всієї покупки.

У початкових класах учні знайомляться з ціною товару, його кількістю та вартістю покупки, а також засвоюють відповідні правила їх знаходження:

- щоб знайти вартість, треба ціну товару помножити на його кількість;
- щоб знайти ціну, треба вартість товару поділити на його кількість;
- щоб знайти кількість товару, треба його вартість поділити на ціну.

За Програмою початкової школи учні знайомляться з копійкою (1 клас), гривнею (2 клас).

При розв’язуванні текстових задач з одиницями вартості учням слід засвоїти залежності між ціною, кількістю і вартістю.

Практичне заняття №17

Тема: Поняття величини. Площа фігури, об’єм тіла, їх основні властивості і вимірювання. Інші величини, що розглядаються в початковому курсі математики

План заняття

1. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.
2. Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).
3. Розв’язування системи тренувальних вправ.
4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

5. Підготуватися до пісумкової контрольної роботи.
6. Готуватися до екзамену з курсу математики.

Зміст заняття

1. **Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.**
2. **Питання для самоконтролю (перевірка теоретичних відомостей).**
   1) Що таке величина?
   2) Якими можуть бути величини?
   3) Сформулюйте основні властивості величин.
   4) Що називають сумою величин a і b?
   5) Що називають добутком величини a на число x?
   6) Що називають різницею величин a і b?
   7) Що називають часткою величин a і b?
   8) Як можна виміряти будь – яку величину?
   9) Що називають числовим значенням величини a при одиниці величини e?
   10) Сформулюйте основні властивості числових значень додатних скалярних величин.
   11) Сформулюйте означення довжини відрізка.
   12) В чому полягає процес вимірювання довжин відрізків?
   13) Сформулюйте всі властивості довжин відрізків.
   14) Назвіть стародавні одиниці вимірювання довжини.
   15) Які сучасні одиниці довжини використовуються при вимірюванні відрізків та відстаней?
   16) Яка величина називається площею фігури?
   17) Що приймають за одиницю площі?
   18) Що називають палеткою?
   19) Опишіть способи використання палетки при вимірюванні площ різних фігур.
   20) Сформулюйте властивості площі фігур.
   21) Чому дорівнює площа прямокутника?
   22) Які існують співвідношення між одиницями площі?
   23) Сформулюйте означення об’єму з геометричної точки зору.
   24) Сформулюйте означення об’єму з фізичної точки зору.
   25) Які одиниці вимірювання використовуються при обчисленні об’ємів просторових тіл та рідин?
   26) Сформулюйте означення маси тіла з математичної точки зору.
   27) Що відокремлює різні події у житті кожної людини?
   28) Якими одиницями користувалися стародавні люди при визначенні різних подій?
   29) Якими співвідношеннями користуються при виконанні дій з одиницями часу?
   30) Що називається ціною товару?

31) Що називають вартістю товару?
32) Що називають швидкістю тіла?
33) Сформулюйте правила знаходження ціни, кількості, вартості; швидкості, часу, відстані.
34) Які залежності існують між ціною, кількістю та вартістю; між швидкістю, часом та відстанню?
35) Які із залежностей між величинами є прямо пропорційними? Наведіть приклади.

3. Розв'язування системи тренувальних вправ.

1. Обчисліть:

64м 03см – 19м 88см
8км 65м – 3км 78м
73т 850кг + 25т 320кг
280км 896м : 44м
50 хв 45 с + 15 хв 37 с
5 діб 6 год – 2 доби 18 год
25 грн 5 к. · 24
12кг 265г : 55г
235 т 924кг : 52
5 грн 42 к. · 50
256 грн 5 к. : 15 к.
14 ц 25кг · 18
34 т 89кг · 7
582 грн 5 к. : 5
4 год 58хв + 2 год 17хв
40хв 2с – 34хв 25с

2. Вставте найменування, щоб рівності були правильні:

7м – 6...= 6м 4дм
7м – 6...= 6м 94см
3 т 320кг – 5...= 3 т 31кг
3 т 320кг + 5...= 3 т 820кг

3. Запишіть:

у метрах: 10км 80м; 6км 55м; 257 дм;
у сантиметрах: 4м 36см; 8м 2см; 5 дм 8см;
у міліметрах: 3 дм 7см; 3см 7мм; 2м 6см;
у кілограмах: 3 т 80кг; 20000г; 9 ц 15кг;
у грамах: 7кг; 12кг 60г; 2 ц 4кг;
у центнерах: 3 т 6 ц; 3800кг; 320 т 400кг;
у копійках: 3 грн; 25 грн 9 к.; 140 грн 70 к.;
у секундах: 2 хв; 30 хв 12 с; 1 год 10 с;
у хвилинах: 4 год; 300 с; 8 год 24 хв;
у годинах: 3 доби; 180 хв; 10 діб 360 хв.

4. Порівняйте:

7 т 5 ц і 7 т 500кг
30км 100м і 31000м
81 м^2 і 8 дм^2
45 ц і 4 т
8м 6 дм і 7м 95см
8м^2 і 8000см^2

5. Знайти площу прямокутника, якщо відомо, що одна з його сторін 3 см, а периметр дорівнює 30 см.

6. Знайти довжину сторони і площу квадрата, периметр якого дорівнює 1,8 м.

7. Якими натуральними числами можуть бути довжини сторін прямокутника, якщо його периметр дорівнює 36 см?

8. Відстань від пункту A до пункту B дорівнює 5 км, від B до C – 3 км. Якою може бути відстань від A до C?
9. Ділянка прямокутної форми має площу 1200 м^2. Після збільшення довжини ділянки на 4 м, а ширини на 6 м її площа збільшилась на 35 %. Знайти початкову довжину й ширину ділянки.
10. Фабрика повинна була в середньому виробляти щодня 750 м шерстяної тканини, а виробила за рік 255 038 м. Скільки костюмів можна пошити з виробленої понад план тканини, якщо на кожний костюм витрачали по 3 м тканини? (Вважати, що рік має 256 робочих днів.)
11. $У$ трьох мотках проводу 290 м. Якщо від першого відрізати його довжини, від другого його довжини, а від третього у його довжини, то в усіх мотках залишиться проводу однакова, кількість метрів. Скільки метрів проводу в кожному мотку?
12. Поїзд завдовжки 600 м проходить повз спостерігача протягом 48 с. Через міст поїзд проходить 40 с. Знайти довжину моста.
13. Поїзд протягом 17 год пройшов відстань від A до B зі швидкістю 40 км за годину, а від B до A – зі швидкістю 45 км за годину. Скільки кілометрів від A до B?
14. За першу годину автобус пройшов $\frac{2}{5}$ усього шляху, за другу $\frac{1}{3}$ і за третю годину – решту. Який шлях пройшов автобус за три години, якщо за третю годину він пройшов на 20 км менше, ніж за першу?
15. Основа піраміди – квадрат зі стороною 12 см. Висота піраміди дорівнює 35 см і проходить через центр основи. Знайти повну поверхню піраміди.
16. Скільки квадратних метрів жерсті треба для виготовлення 10 відер циліндричної форми, якщо висота відра H = 0,4 м, а діаметр основи 0,3 м?
17. Знайти об’єм куба, якщо площа його граней 294 кв. см?
18. Дерев’яний куб, ребро якого 1 дм, розпилили на кубики з ребром в 1 см. Скільки дістали маленьких кубиків?
19. Діагональ куба дорівнює a. Знайти його об’єм.
20. Поверхня (в кв. дм) і об’єм куба (в куб. дм) виражаються одним числом. Знайти ребро куба.
21. Коробка для сірників має розміри 54 $\times$ 32 $\times$ 16 мм. Знайти об’єм коробки **і** кількість сірників, які можна вмістити в такій коробці, якщо їхня довжина 51 мм, а ширина і товщина 2 мм?
22. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Висота призми 10 см. Зробити розгортку цієї призми. Обчислити об’єм і площу повної поверхні призми.
23. Поперечний переріз дамби – рівнобедрена трапеція з основами 38 м і 12 м. Висота дамби 7,2 м. Скільки треба кубометрів захисного матеріалу для 1 км дамби?

24. Скільки землі вийняли, риючи канал довжиною 100 м, глибиною 1,4 м, якщо розріз каналу – рівнобедрена трапеція, верхня основа якої 2,5 м, а довжина дна на 40 % менша верхньої основи?

25. З листа картону розміром 100$\times$60 м вирізали по кутам рівні квадрати зі стороною 10 см. Загнувши краї, дістали коробку. Обчислити її об'єм.

26. Основою прямої призми є ромб з діагоналями 6 см і 8 см, висота призми 12 см. Обчислити площу бічної поверхні та об'єм призми.

27. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 21 кв. см, а площі бічних граней дорівнюють 40 кв. см, 68 кв. см, 84 кв. см. Обчислити об'єм призми.

28. Обчислити об'єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює b, а діагональ призми утворює з площиною основи кут α.

29. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює а, висота H. Знайти площу повної поверхні та об'єм цієї піраміди.

30. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 3 м, бічне ребро В м. Знайти об'єм піраміди.

31. Сіно складене з стіжок, що має форму правильної чотирикутної призми з пірамідальною вершиною. Обчислити масу сіна, якщо висота стіжка від основи до вершини піраміди 9,4 м, висота призматичної частини 5,7 м, а сторона основи стіжка м. Маса 1 м^3 сіна 78 кг.

32. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут а. Знайти об'єм призми.

33. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює а, а двогранний кут при основі дорівнює а.

34. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює а, а плоский кут при вершині дорівнює а.

35. Визначити об'єм горючої суміші циліндра в автомобілі «Москвич», знаючи, що внутрішній діаметр циліндра 67,5 мм, а робочий хіл поршня 75 мм.

36. По трубі бетононасоса діаметром 282 мм за годину подається 40 м^3 бетону. З якою швидкістю рухається бетон по трубі?

37. Виразити об'єм рівностороннього циліндра через його твірну.

38. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут a. Знайти об'єм циліндра, радіус основи якого R.

39. Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо гіпотенузи. Знайти об'єм тіла обертання.

40. Площа осьового перерізу конуса 60 см^2, а об'єм 100 π см^3. Знайти твірну конуса.

41. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює a. Знайти об'єм конуса, якщо: а) висота конуса дорівнює h; б) діаметр основи конуса дорівнює d .

42. Твірна конуса утворює з площиною основи кута. Знайти об'єм конуса, якщо: а) висота конуса дорівнює h; б) діаметр основи конуса дорівнює d; в) твірна конуса дорівнює l.

43. У скільки разів збільшиться об'єм кулі, якщо радіус її збільшити в 3 рази?

44. Радіуси трьох куль – 3 см, 4 см і 5 см. Визначити радіус кулі, об'єм якої дорівнює сумі об'ємів цих куль.

45. Радіуси двох куль дорівнюють 13 дм і 15 дм. Відстань між їх центрами 18 дм. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

46. Зовнішній діаметр порожнистої кулі 18 см; товщина стінок 3 см. Знайти об'єм стінок.

47. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 18 см^2. Обчисліть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює $(2-\sqrt{2})$ см.

48. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60 см^2. Обчисліть об'єм піраміди, якщо її апофема дорівнює 5 см.

4. Підведення підсумків та постановка завдань для самостійного опрацювання.

1. Повторити теоретичний матеріал, підготуватися з тем: «**Основні елементи геометрії»**, **«Поняття величини. Площа фігури. Об'єм тіла»** до самостійної роботи з теоретичних питань та розв'язання практичної частини.

2. Розв'язати вправи:

1. Назвіть числа, які рівні між собою:

110 т	20 ц 2кг	6500см
32м 8см	2600г	2600м
65м	2кг 600г	3208см
2002кг	110000кг	2км 600м.

2. Зменшіть у 5 разів числа: 6 грн 50 к.; 2кг 250г; 7 т 105кг; 1080см; 9 год 15 хв; 24 год 5 хв.

3. Порівняйте:

1м 7 дм і 17 дм	7 дм 4см і 4 дм 7см
3км 40м і 340м	4км 3м і 3003м.

4. Якими натуральними числами можуть бути довжини сторін прямокутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2?

5. Скільки треба взяти квадратів із стороною 2 см, щоб скласти квадрат із стороною 6 см?

6. Площа квадрата дорівнює 64 см^2. Знайти сторони прямокутника, що мають таку ж саму площу.

7. Знайти сторони прямокутника, якщо його периметр 30 см, а площа – 36 см^2.

8. Чи існують такі три пункти *М, К* і *Р,* що відстані *МК* – 5 км 750 м, *КР* =3150 м і *МР* – 9 км?

9. Точки A, B, C і D прямої розміщені так, що AB = 1,5 м, BC = 0,25 м, CD = 0,75 м. Знайти довжини відрізків AB, BC і CD, якщо за одиничний відрізок взяти: 1) відрізок AB; 2) відрізок BC.

10. Довжину стола виміряли спочатку в сантиметрах, а потім у дециметрах. У першому випадку одержали число на 108 більше, ніж у другому випадку. Знайти довжину стола.

11. Чи збільшиться периметр квадрата в 2 рази, якщо в 2 рази збільшити довжину його сторони?

12. З п’яти прямокутників скласти квадрат площею 16 $см^2$. Яка довжина кожного прямокутника, коли відомо, що ширина кожного з них дорівнює 1 см?

13. Якими одиницями доцільно вимірювати: 1) довжину стола; 2) довжину класної кімнати; 3) довжину клітинки в зошиті; 4) довжину шляху від Києва до Одеси?

14. Турист проїхав 280 км. На автомашині він проїхав на 180 км більше, ніж на пароплаві, а на автомашині і пароплаві разом – на 240 км більше, ніж на велосипеді. Скільки кілометрів проїхав турист кожним видом транспорту?

15. Скільки метрів у кожному з двох кусків однакової тканини, якщо перший кусок, в якому на 6 м менше, ніж у другому, коштує 14 тис. грн., а другий 26 тис. грн.?

16. По лінії газопроводу вкладено 35 труб завдовжки 4,7 м і 8,25 м. Ділянка, викладена коротшими трубами, на 35 м довша. Скільки викладено тих і других труб?

17. Пароплав, рухаючись рівномірно, проходить відстань між двома пристанями за течією річки за 12 год, а проти течії – за 15 год. Знайти відстань між пристанями, якщо швидкість течії річки 2,5 км за годину.

18. Відстань між пунктами *A і B* велосипедист проїхав за 3 год. Повертаючись назад, він перші 24 км їхав з тією самою швидкістю, а потім збільшив швидкість На 2 км за годину і прибув у пункт *A* на 10 хв раніше. Знайти відстань між пунктами *A* і *B*.

19. Селянин поїхав за сіном і взяв з собою трьох синів віком 15, 12 і 10 років. Зворотний шлях, що становить 15 км, сини по черзі їхали на возі, причому відстань розподілили обернено пропорційно до віку. Скільки кілометрів проїхав кожний з них на возі?

20. Об’єм правильної шестикутної піраміди 6 $см^3$, сторона основи 1 см. Знайти бічне ребро піраміди.

21. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює *к,* а висота *Н*. Знайти об’єм піраміди.

22. Знайти об’єм правильного тетраедра, якщо його ребро дорівнює *а*.

23. Бічне ребро прямої чотирикутної призми дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні, об’єм та діагональ призми, якщо її основа прямокутник, одна із сторін якого дорівнює 12 см, а діагональ 13 см.

24. Скільки фарби треба, щоб пофарбувати поверхню 15 однакових кульок, діаметр яких 6 см, якщо на 1 $м^2$ витрачають 120 г фарби. Відповідь округліть до грамів.

25. Об’єм циліндра дорівнює 36π см^3, а його висота – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

26. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

27. У основі конуса проведено хорду завдовжки a, яку видно із центра основи під кутом $60°$, а з вершини конуса – під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

28. Діаметр кулі дорівнює 8 см. Чому дорівнює площа поверхні кулі?

5. Підготуватися до підсумкової контрольної роботи з вивчених тем курсу математики.

6. Готуватися до екзамену з курсу математики.

Питання, що виносяться на самостійне опрацювання студентів

1. Декартів добуток трьох і більше множин, його властивості.
2. Відповідність і відношення. Відповідність між елементами двох множин. Наочні способи задання відповідностей. Образи і прообрази елементів і множин. Типи відповідностей.
3. Трикутник Паскаля. Біном Ньютона.
4. Поняття як форма мислення. Зміст і обсяг поняття. Неозначувані поняття теорії. Означення математичних понять; найпоширеніші способи означень.
5. Поняття алгоритму та його розвиток. Приклади. Основні властивості алгоритмів. Різні способи запису алгоритмів, зокрема звичайною мовою, у вигляді блок-схем і алгоритмічною мовою. Лінійні, розгалужені, циклічні алгоритми. Алгоритми над словами. Поняття алгоритму у формі нормального алгоритму Маркова та машини Тьюрінга. Алгоритми і ЕОМ. Приклади найпростіших алгоритмів, що використовуються у початкових класах.
6. Історичні відомості про виникнення понять натурального числа і нуля та дій над ними.
7. Короткі історичні відомості про виникнення понять цілого, раціонального та дійсного чисел.
8. Аксіоматичне означення додавання і його основні закони. Аксіоматичне означення множення і його основні закони. Розподільний закон множення відносно додавання. Закони монотонності додавання і множення. Зв'язок принципу математичної індукції і принципу найменшого числа та їх застосування.
9. Віднімання та ділення цілих невід'ємних чисел.
10. Поняття про несуперечливість, повноту й незалежність системи аксіом на прикладі системи аксіом Пеано.
11. Порівняння відрізків. Натуральне число як міра відрізків. Дії над відрізками та числами – результатами вимірювання величин.
12. Застосування двійкової та інших систем числення. Елементарні відомості про обчислювальну техніку та її використання.
13. Загальна ознака подільності Паскаля.
14. Числові рівності та нерівності. Вирази зі змінною. Тотожні перетворення виразів.
15. Рівняння кола. Рівняння прямої. Системи рівнянь з двома змінними, способи їх розв'язування. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними; графічний спосіб їх розв'язування.
16. Операції над функціями та графіками. Перетворення графіків функцій за допомогою геометричних перетворень (побудова графіка функції $y=Af(ax+b)+B$, де A, B, a, b – сталі, $A\neq 0$ і $a\neq 0$, за графіком функції $y=f(x)$).

17. Історичні відомості про виникнення і розвиток геометрії. Поняття про аксіоматичний метод побудови геометрії. Аксіоматика шкільного курсу геометрії Система геометричних понять, що вивчаються в школі. Геометричні фігури, їх означення, властивості, ознаки на прикладі паралельних прямих, трикутника, паралелограма, паралельності та перпендикулярності прямих і площин (приклади доведення теорем, розв'язування задач на доведення і обчислення).
18. Основні геометричні побудови циркулем і лінійкою. Основні методи геометричних побудов:
19. Метод геометричних місць точок, метод симетрії відносно прямої, метод повороту навколо точки, метод симетрії відносно точки, метод паралельного перенесення, метод гомотетії, алгебраїчний метод. Побудова правильних многокутників. Задачі на побудову, які не розв'язуються циркулем та лінійкою. Геометричні побудови іншими засобами.
20. Загальні відомості про многогранники. Співвідношення між числом плоских кутів, їх сумою, числом ребер і граней опуклого многогранника. Теорема Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника. Правильні многогранники, їх класифікація.
21. Зображення многогранників на площині. Побудова перерізу многогранника площиною. Відомості із історії.
22. Загальні відомості про тіла обертання (циліндр, конус, куля). Зображення тіл обертання. Зображення комбінації просторових фігур.
23. Маса тіла, вимірювання маси тіла. Одиниці вимірювання маси тіла, відношення між ними.
24. Швидкість, час, шлях, залежність між ними, одиниці вимірювання. Вартість, ціна, кількість товару, залежність між ними, одиниці вимірювання. Поняття про собівартість одиниці продукції, прибуток від реалізації товарної продукції, рентабельність підприємства, що виготовляє товарну продукцію.

Питання до екзамену з курсу математики
(денна, заочна форма навчання)

1. Поняття про множину. Способи задання множин. Порожня множина. Універсальна множина. Підмножина. Число підмножин скінченої множини.
2. Відношення між множинами. Діаграми Ейлера-Венна.
3. Операції над множинами. Об’єднання, переріз і різниця множин. Доповнення множин. Основні їх властивості.
4. Поняття кортежу. Декартовий добуток двох множин. Властивості й використання. Зображення на координатній площині.
5. Відповідність між елементами множин. Способи задання відповідностей. Типи відповідностей. Приклади.
6. Поняття функції, область визначення і множина значень. Числові функції і їх властивості.
7. Відношення на множині. Приклади відношень у ШКМ. Граф і графік бінарного відношення.
8. Типи бінарних відношень. Властивості рефлективності і транзитивності бінарних відношень. Властивості симетричних бінарних відношень.
9. Відношення еквівалентності, його властивості. Зв’язок відношення еквівалентності з розбиттям множин на класи.
10. Відношення порядку, його види. Приклади. Упорядкована множина.
11. Поняття. Поняття як форма мислення. Зміст та обсяг поняття.
12. Відношення між поняттями. Способи означення понять.
13. Висловлення, їх види. Приклади. Логічні операції над висловленнями (заперечення, кон’юнкція, диз’юнкція), таблиці істинності. Властивості.
14. Імплікація висловлення, таблиця істинності. Властивості. Довести закон $A \Rightarrow B = \bar{A} \cup B$. Еквіваленція висловлення, таблиця істинності. Властивості.
15. Рівносильні формули. Основні рівносильності, їхнє доведення. Приклади.
16. Поняття предиката. Множина визначення та множина істинності предиката. Заперечення предиката, його множина істинності.
17. Кон’юнкція та диз’юнкція двох предикатів, їхній теоретико-множинний зміст. Множина істинності.
18. Імплікація предикатів. Множина істинності. Еквіваленція предикатів. Множина істинності..
19. Поняття теореми. Поняття логічного слідування й рівносильності предикатів. Будова теорем.
20. Види теорем, їхні символічні записи. Приклади. Необхідна й достатня умови.
21. Алгоритми. Поняття алгоритму. Основні властивості алгоритмів. Приклади.
22. Різні способи запису алгоритмів. Лінійні, розгалужені, циклічні алгоритми. Приклади.

23. Короткі історичні відомості про виникнення натурального числа і 0. Різні підходи до означення натурального числа.
24. Означення суми цілих невід'ємних чисел. Закони додавання. Означення різниці двох цілих невід'ємних чисел. Умови існування різниці. Зв'язок дії додавання і віднімання.
25. Означення добутку двох цілих невід'ємних чисел. Властивості дії множення. Означення частки цілого невід'ємного числа на натуральне. Умови існування частки, її єдність. Зв'язок ділення і множення.
26. Поняття про систему числення. Позиційні і непозиційні системи числення. Десяткова, римська системи числення.
27. Дії над цілими невід'ємними числами в різних позиційних системах числення.
28. Означення дії ділення цілого невід'ємного числа на натуральне з остачею. Теорема про існування частки і остачі та їх єдиність.
29. Відношення подільності на множині натуральних чисел, його властивості.
30. Подільність суми, різниці та добутку. Приклади.
31. Прості й складені числа. Решето Ератосфена. Теорема Евкліда (про нескінченність множини натуральних чисел).
32. Основна теорема арифметики (про розклад натурального числа в добуток простих множників).
33. Канонічний розклад числа. Відшукання НСД, НСК чисел за їх канонічними розкладами.
34. НСД чисел, його властивості. Способи відшукання НСД чисел. Алгоритм Евкліда.
35. НСК чисел, його властивості. Зв'язок НСК з НСД.
36. Ознаки подільності чисел у десятковій системі числення (на 2 та на 5, на 3 та на 9, на 4 та на 25). Ознаки подільності на складене число: 6, 21, 15, 18.
37. Від'ємні цілі числа, їх геометрична інтерпретація. Поняття модуля числа.
38. Дії з цілими числами, властивості дій.
39. Поняття звичайного дробу. Критерії порівняння дробів. Раціональне число і звичайний дріб. Найпростіша форма раціонального числа.
40. Додавання й віднімання раціональних чисел, їх властивості.
41. Множення і ділення додатних раціональних чисел. Властивості множення.
42. Основна властивість звичайного дробу. Скорочення дробів і зведення їх до спільного знаменника.
43. Відшукання дробу від числа і числа за його дробом. Приклади.
44. Десяткові дроби, алгоритми дій над ними. Порівняння десяткових дробів. Приклади.
45. Перетворення звичайних дробів у десяткові. Теорема про перетворення звичайного дробу у десятковий скінченний дріб.
46. Додатні раціональні числа як нескінченні періодичні десяткові дроби. Перетворення звичайних дробів у нескінченні (періодичні) десяткові дроби.

47. Поняття процента. Основні задачі на проценти. Процентні обчислення. Приклади.
48. Поняття ірраціонального і дійсного числа. Порівняння дійсних чисел.
49. Операції над дійсними числами, закони цих операцій.
50. Числові вирази. Тотожні перетворення виразів.
51. Рівняння з однією змінною. Рівняння-наслідки, рівносильні рівняння. Лінійні та квадратні рівняння.
52. Методи розв'язування рівнянь.
53. Рівняння з двома змінними. Рівняння лінії. Рівняння кола. Рівняння прямої.
54. Нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності. Лінійні нерівності, їх розв'язування.
55. Квадратні нерівності. Дробово-раціональні нерівності. Метод інтервалів.
56. Методи розв'язування нерівностей.
57. Числові функції та їх властивості.
58. Лінійна функція. Пряма та обернена пропорційність. Їх графіки, властивості.
59. Квадратична функція, її графік, властивості. Функція $y = \sqrt{x}$.
60. Поняття величини. Адитивно-скалярні величини, їхні основні властивості.
61. Рівносильні (рівнопотужні) множини. Потужність множин. Скінченні і нескінченні множини. Зчисленні і незчисленні множини.
62. Поняття про комбінаторну задачу і комбінаторику. Загальні правила комбінаторики – правило суми і правило добутку. Перестановки, розміщення, комбінації, формули для їх обчислень.
63. Відображення множин. Види відображень, їх графи.
64. Квантори, їхнє використання. Зв'язок між кванторами загальності та існування.
65. Способи доведення теорем. Дедуктивні методи і неповна індукція. Метод математичної індукції. Приклади.
66. Порядок виконання логічних операцій. Алгебра висловлень. Зв'язок алгебри висловлень з алгеброю множин.
67. Множина цілих невід'ємних чисел та її потужність. Відношення порядку. Властивості множини цілих невід'ємних чисел.
68. Властивості множини Z.
69. Множина раціональних чисел Q, її властивості: лінійна упорядкованість і нескінченність, щільність, зчисленність.
70. Множина дійсних чисел, її властивості. Незчисленність множини R.
71. Наближені числа, наближені обчислення.
72. Системи і сукупності рівнянь з однією змінною. Способи їх розв'язувань.
73. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Способи їх розв'язувань.
74. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними, графічний спосіб їх розв'язування.
75. Функція, обернена до даної. Приклади.

76. Перетворення графіків функцій за допомогою геометричних перетворень (побудова графіка функції $y=|-Af(-a|x|+b)+B|$, де A, B, a, b - сталі, $A>0$ і $a>0$, за графіком функції $y=f(x)$).
77. Представлення будь-якого натурального числа в новій системі числення з основою g. Переведення чисел з однієї позиційної системи числення до іншої.
78. Структура курсу геометрії. Історичні відомості про виникнення і розвиток геометрії.
79. Поняття про аксіоматичний метод побудови геометрії. Аксіоматика шкільного курсу геометрії Система геометричних понять, що вивчаються в школі.
80. Геометричні фігури, їх означення, властивості, ознаки.
81. Многогранники, їх властивості.
82. Круглі тіла, їх властивості.
83. Методи доведення теорем. Приклади розв'язування задач на доведення і обчислення.
84. Поняття про вимірювання величин. Величини, які вивчаються в початковому курсі математики. Властивості міри величини.
85. Довжина відрізка, властивості. Порівняння відрізків. Натуральне число як міра відрізків. Дії над відрізками та числами – результатами вимірювання величин. стандартні одиниці довжини, відношення між ними.
86. Поняття площі плоскої фігури, властивості площі. способи вимірювання площ плоских фігур. Одиниці вимірювання площі, відношення між ними.
87. Поняття об'єму тіла, властивості об'єму. Формули для обчислень об'ємів тіл. Одиниці вимірювання об'єму тіла, відношення між ними.
88. Маса тіла, вимірювання маси тіла. Одиниці вимірювання маси тіла, відношення між ними.
89. Швидкість, час, шлях, залежність між ними, одиниці вимірювання. Текстові задачі на рух.
90. Вартість, ціна, кількість товару, залежність між ними, одиниці вимірювання. Поняття про собівартість одиниці продукції, прибуток від реалізації товарної продукції, рентабельність підприємства, що виготовляє товарну продукцію.

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ТЕРМІНИ

Адитивно-скалярні величини – величини, які мають адитивну властивість.

Аксіома – твердження, яке приймається в межах даної теорії істинним без доведення.

Алгебраїчна сума – вираз, у якому є тільки операції додавання і віднімання.

Алгебраїчні вирази – вирази, які містять лише арифметичні операції та операції піднесення до раціонального степеня.

Вартість товару – вартість у грошах певної кількості товару.

Векторні величини – такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрямок дії.

Вершина конуса – кінець катета, навколо якого здійснюється обертання і який не належить основі.

Вершини многокутника – вершини ламаної.

Висловлення – твердження, про яке можна сказати, що воно тільки або істинне, або хибне.

Висота додатного раціонального числа – сума чисельника і знаменника нескоротного дробу, що є зображенням даного додатного раціонального числа.

Висота призми – перпендикуляр, опущений з однієї основи призми на другу, а також довжина цього перпендикуляра.

Відкрита фігура – фігура, всі точки якої є внутрішніми.

Віднімання додатних раціональних чисел – операція у множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$.

Віднімання цілих невід'ємних чисел – операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$.

Відношення між елементами множин A і B – довільна підмножина декартового добутку множин A і B. При цьому множина A називається *областю* (*множиною*) *відправлення відношення*, множина B – *областю* (*множиною*) *прибуття відношення*.

Відношеннями природного порядку на множині цілих невід'ємних чисел – відношення «<», «>», «≤» і «≥».

Відображення множини A у множину B – відношення між елементами множин A і B, при якому кожному елементу множини A ставиться у відповідність тільки один елемент із множини B.

Відрізок – частина прямої, обмежена двома точками, включаючи ці точки.

Власна підмножина – підмножина, яка не є порожньою і не збігається з даною множиною.

Внутрішні точки відрізка – всі точки відрізка, крім його кінців.

Внутрішня точка фігури – точка, яка належить фігурі разом з деяким її околом.

Впорядкована пара – пара (a,b) елементів $a \in A$, $b \in B$, взятих в певному порядку.

Геометрична фігура або просто *фігура* – довільна непорожня точкова множина.

Граф – множина точок і відрізків, які попарно з'єднують деякі з цих точок. Точки називаються *вершинами графа*, а відрізки – його *ребрами*.

Графік відношення – множина впорядкованих пар, що складають відношення.

Графік функції $y = f(x), x \in X$ – множину точок $(x; y)$ координатної площини, де $x \in X$, а $y = f(x)$.

Гроші – це особливий товар, що виконує роль загального еквівалента, в якому виражається вартість усіх інших товарів.

Декартів добуток множин X і Y – множина всіх упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині X, а друга – Y, позначається $X \times Y$.

Десятковий дріб – дріб, знаменником якого є 10^n, де n Є N, і який записано в позиційній десятковій системі числення так: записано чисельник і в ньому справа наліво відділено n цифр (десяткових знаків).

Диз'юнкція (від лат. disjungo – роз'єдную, розрізняємо) двох висловлень A, B називається таке висловлення $A \vee B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з висловлень A чи B – істинне.

Дискретна множина – строго лінійно впорядкована множина така що, для кожного її елемента існує сусідній елемент.

Діагональ – відрізок, що з'єднує дві несуміжні вершини многокутника.

Дійсні числа – раціональні та ірраціональні числа.

Ділене – перший компонент ділення.

Ділення дійсних чисел – операція на множині дійсних чисел, при якій треба знайти таке дійсне число c, щоб задовольнялася умова $a = c \cdot b; a : b = c$, де $b \neq 0$.

Ділення додатних раціональних чисел – операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх частка $a : b$.

Ділення цілих невід'ємних чисел – операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b, де $b \neq 0$, ставиться у відповідність їх частка $a : b$.

Дільник – другий компонент ділення.

Добуток – результат множення.

Добуток (натур. число як міра відрізка) двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n \times k$) – натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де n є мірою цього ж самого відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε при одиничному відрізку ε_1.

Добуток двох дійсних чисел – добуток їх модулів, якщо дані числа з однаковими знаками або хоч одне з них нуль, і число, протилежне добутку їх модулів, якщо числа з різними знаками.

Добуток двох довільних натуральних чисел n і k (позначається n×k) – натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де n є мірою цього ж самого відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою

Добуток довільних додатних раціональних чисел a і b (позначається a×b), – додатне раціональне число с, що має своїм зображенням дріб і є зображення відповідно чисел a і b.

Добуток довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається a×b) – потужність декартового добутку множин A і B, потужностями яких є відповідно числа a і b або: число 0, якщо $в = 0$, число а, якщо $в = 1$, сума $в$ доданків, кожний з яких дорівнює числу a, якщо $в > 1$.

Добуток довільних цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, ..., a_n (позначається $a_1a_2\ldots a_n$ або $\prod_{i=1}^{n} a_i$) – потужність декартового добутку множин A_1, A_2, …, A_n, потужностями яких є відповідно числа a_1, a_2, …, a_n.

Добуток невід'ємних раціональних чисел, поданих у вигляді дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ – число, зображене дробом, чисельником якого є добуток чисельників даних дробів, а знаменником – добуток знаменників.

Довжина кортежу – кількість компонент у кортежі

Довжина періоду нескінченного періодичного добу – довжина кортежу цифр, які повторюються.

Додавання додатних раціональних чисел – операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$.

Додавання цілих невід'ємних чисел – операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$.

Доданки – компоненти при додаванні.

Додатне ірраціональне число – нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Додатне раціональне число – клас рівних дробів.

Доповненням множини A до універсальної U – різниця універсальної множини U і будь-якої її підмножини А. Позначається $\overline{A} = U \setminus A$.

Дробовий раціональний вираз – вираз, що містить операції ділення на вирази із змінними.

Еквіваленцією (від лат *aequivalens* – рівноцінний) двох висловлень A і B називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B мають однакові значення істинності.

Елементи множини – об’єкти, що складають множину.

Енкутник – многокутник із n вершинами.

Замкнена ламана – ламана, кінці якої збігаються.

Змінні – знаки, що відіграють роль порожніх місць у математичному тексті, які дозволяється заповнювати іменами елементів із деяких множин, що складають область значень цих змінних.

Зміст поняття – сукупність істотних ознак, які мають всі об’єкти, що належать обсягу цього поняття.

Значення змінної – елементи, які можна підставляти замість змінної.

Зображення фігури – плоска фігура, що відтворює оригінал.

Зчисленна множина – множина, рівнопотужна множині натуральних чисел.

Імплікацією (від лат. implico – тісно зв’язую) двох висловлень *А* і *В* називають висловлення *А* => *В,* яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли *А* – істинне, а *В* – хибне.

Ірраціональні числа – числа, які можна зобразити нескінченними десятковими неперіодичними дробами.

Істинна (правильна) числова рівність – істинне висловлення, що визначається числовою рівністю.

Канонічний розклад натурального числа – запис числа у вигляді добутку простих множників, де рівні множники записані у вигляді степення і самі множини в порядку зростання.

Комбінаторні задачі – задачі про обчислення числа можливих підмножин або кортежів, які складаються з елементів деякої скінченної множини або множин, у відповідності із заданими умовами.

Компоненти – числа виразу.

Компоненти кортежу – об’єкти, з яких складається кортеж .

Кон’юнкцією(від лат. conjunctio – зв’язок, об’єднання) двох висловлень *А* і *В* називається висловлення $A \wedge B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення *А* і *В* істинні.

Конусом (прямим круговим конусом) називається тіло, яке утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо одного із його катетів.

Координатна пряма – пряма, на якій задано точки О та Е, вказано напрям від О до Е.

Кортеж – скінченна сукупність деяких об’єктів, які розміщені в цілком визначеному порядку, причому об’єкти в кортежі можуть повторюватися.

Круг – частина площини, обмежена колом.

Круги Ейлера – зображення обсягів понять плоскими геометричними фігурами, зокрема кругами.

Куб – прямокутний паралелепіпед, у якого всі виміри рівні між собою.

Куля – тіло, яке утворюється при обертанні півкруга навколо його діаметра.

Кут – фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки *(вершини).*

Кут многокутника – кут, утворений двома його суміжними сторонами.

Лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда – довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї з його вершин.

Межова точка – точка даної фігури, в будь-якому околі якої є точки, що належать і не належать фігурі. Межова точка може як належати, так і не належати фігурі. Множину всіх межових точок фігури називають її межею або поверхнею.

Метод зображення – сукупність правил, за допомогою яких встановлюється, яким способом, знаючи оригінал, одержати його зображення.

Мінова вартість товару, або просто вартість – це втілена й уречевлена праця, яка виражає суспільно-виробничі відносини товаровиробників.

Мішане число – сума натурального числа і правильного дробу, що записані поруч (спочатку пишеться натуральне число, а потім дріб).

Мішаний періодичний десятковий дріб – періодичний десятковий дріб, у якого період починається не відразу після коми.

Многогранник – обмежене тіло, поверхня якого складається із скінченного числа многокутників, які називаються його гранями. Сторони граней – ребра многогранника, вершини граней – вершини многогранника.

Многогранник опуклий, якщо він лежить по один бік від площини, якій належить будь-яка його грань.

Многокутник – замкнена ламана.

Множення дійсних чисел – операція на множині дійсних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a\times b$.

Множення додатних раціональних чисел – операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a\times b$.

Множення цілих невід'ємних чисел – операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a\times b$.

Множина – сукупність певних об'єктів, об'єднаних за деякою ознакою чи правилом.

Множина дійсних чисел (позначається R) – множина, елементами якої є всі додатні дійсні числа, всі від'ємні дійсні числа і число нуль.

Множина додатних дійсних чисел – множина, яка складалася з усіх додатних раціональних чисел та усіх додатних ірраціональних чисел, в якій будь-який відрізок має міру при довільному одиничному відрізку.

Множина натуральних чисел – сукупність всіх натуральних чисел.

Множина розв'язків нерівності з однією змінною – область істинності предиката, що задає нерівність.

Множина розв'язків рівняння (множиною коренів рівняння) – множина істинності предиката, що задає рівняння.

Множина цілих невід'ємних чисел – множина, яка є результатом приєднання числа нуль до множини натуральних чисел.

Множники – компоненти множення.

Натуральне число – клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Не порівнювані поняття – поняття, які не мають спільних ознак.

Неправильний дріб – дріб чисельник якого, не менший від знаменника.

Нерівності з однією змінною – предикат виду $f(x) < q(x)$, $f(x) > q(x)$; $f(x) \leq q(x)$, $f(x) \geq q(x)$, для яких потрібно знайти їх області істинності.

Нерівності одного (однакового) смислу – дві або більше числові нерівності, якщо у всіх них ліві і праві частини знаходяться в одному і тому ж самому відношенні порядку ($a < b$, $c < d$ ($a > b$ і $c > d$).

Нерівності протилежного смислу – нерівності $a < b$, $c > d$ ($a > b$ і $c < d$)

Нескінченна множина – множина, а) елементи якої не можна перелічити; б) яка має власну підмножину рівнопотужну їй.

Нескоротний дріб – дріб чисельник і знаменник якого, взаємно прості числа.

Несумісна сукупність (система) рівнянь – сукупність (система), що не має розв'язків.

Несумісними поняття – поняття, обсяги яких не мають спільних об'єктів.

Об'єднання двох множин A і B називається множина $A \bigcup B$, яка складається з усіх їхніх елементів, що належать хоча б одній з множин A або B.

Область визначення відношення – множина всіх перших компонент графіка відношення, позначається $D(\rho)$.

Область значення відношення – множина всіх других компонент графіка відношення, позначається $E(\rho)$.

Обсяг поняття – сукупність тих об'єктів, які охоплюються цим поняттям.

Одинична множина – непорожня множина, яка не містить різних елементів.

Ознака – думка про властивість об'єктів.

Ознака істотна – ознака, без якої об'єкт існувати не може.

Ознака неістотна – ознака, яку може мати даний об'єкт, а може і не мати. Істотність ознаки об'єкта залежить від потреб практики людини.

Означуване поняття – поняття, якому дається означення.

Окіл точки площини – множина всіх точок площини, відстань до яких від даної точки менша від заданого додатного числа.

Окіл точки простору – множина всіх точок простору, відстань яких від даної точки менша від заданого додатного числа.

Операція віднімання множин, або *віднімання множин* – правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх різниця $X \setminus Y$.

Операція декартового множення – правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх декартів добуток $X \times Y$.

Опукла ламана – ламана, всі ланки якої розміщені по один бік від прямої, що містить будь-яку з них.

Оригінал – фігура, зображення якої одержують на площині.

Орієнтований граф – граф, на ребрах якого вказано напрями.

Паралелепіпед – призма, в основі якої лежить паралелограм.

Перерізом двох множин A *і* B називається множина $A \bigcap B$, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, що належать одночасно і A, і B.

Період нескінченного періодичного десяткового дробу – число, десятковий запис якого є кортежем цифр найменшої довжини, які повторюються.

Періодичний нескінченний десятковий дріб – нескінченний десятковий дріб, у якого повторюється кортеж цифр, починаючи з деякого десяткового знаку.

Підмножина множини A – множина, кожний елемент якої є елементом множини A.

Піраміда – многогранник, у якого однією гранню, що називається основою, є довільний многокутник, а всі інші грані є трикутниками, що мають спільну вершину. Спільна вершина всіх трикутників називається вершиною піраміди.

Плоска фігура – фігура, всі точки якої належать деякій площині (точка, пряма, відрізок, кут, площина).

Плоска фігура – фігура, всі точки якої належать одній площині.

Повний образ будь-якого елемента x з області відправлення X відношення ρ – множина елементів області прибуття $У$ відношення, з якими він перебуває у заданому відношенні. Кожний елемент $\rho(x)$ з множини $У$ називається *образом елемента x*.

Повний прообраз будь-якого елемента ***y*** *з області прибуття відношення ρ* – множина елементів області відправлення, які перебувають з ним у цьому відношенні.

Поняття – форма мислення, в якій відображаються загальні істотні властивості предметів і явищ об'єктивної дійсності, загальні взаємозв'язки між ними у вигляді цілісної системи істотних ознак.

Порівнювані поняття – поняття, які мають принаймні одну спільну ознаку.

Порожня множина – множина, яка не містить елементів, позначається символом $\varnothing$.

Правильна піраміда – піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник і висота піраміди падає в центр многокутника.

Правильний двадцятигранник (правильній ікосаедр) – многогранник, всі грані якого є правильними рівними між собою трикутниками і в кожній вершині сходяться п'ять ребер.

Правильний дріб – дріб, у якого чисельник менший від знаменника.

Правильний многокутник – многокутник, у якого всі сторони рівні, опуклий многокутник, у якого всі кути рівні.

Правильний чотиригранник (правильний тетраедр) – чотиригранник, всі грані якого є правильними рівними між собою трикутниками і в кожній вершині сходиться три ребра.

Правильний шестигранник (правильний гексаедр, куб) – шестигранник, всі грані якого є рівними між собою квадратами і в кожній вершині сходиться три ребра.

Предикати (*висловлювальні форми*) – твердження, що містять одну або кілька змінних і перетворюються у висловлення при заміні змінних їх значеннями.

Призма – многогранник, у якого дві грані, що називаються основами призми, рівні між собою многокутники, у яких відповідні сторони паралельні, а інші грані – паралелограми, в кожного з яких дві сторони є відповідними сторонами основ. Грані призми, що не є основами, називаються бічними, а ребра, які не належать основам призми – бічними ребрами.

Призма є правильною, якщо вона пряма і в основі її лежить правильний n-кутник.

Призма пряма – призма, бічні ребра якої перпендикулярні до основ.

Просторова фігура – фігура, у якої не всі точки належать одній площині.

Процент (відсоток) – одна сота частина числа або одиниці (від латинського «pro centum» – «від ста») і позначається 1 %.

Прямий паралелепіпед – паралелепіпед, в основі якого лежить паралелограм. У прямокутному паралелепіпеді всі грані є прямокутниками.

Радіус циліндра – радіус основи циліндра.

Раціональний алгебраїчний вираз – вираз, який не містить операції добування коренів із виразів, що містять змінні.

Ребра піраміди, які з'єднують основу піраміди та її вершину, називаються бічними ребрами. Перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи, а також довжина цього перпендикуляра називаються *висотою піраміди.* Піраміда, в основі якої лежить n-кутник, називається *n*-кутною.

Рівні множини – множини, які складаються з одних і тих же елементів, тобто кожний елемент першої множини є елементом другої множини і кожний елемент другої множини є елементом першої множини.

Рівнобедрений трикутник – трикутник, у якого є два рівні кути.

Рівновеликі фігури – фігури, які мають рівні міри при одному і тому ж еталоні вимірювання та які мають рівні площі.

Рівносильні означення – означення, обсяги понять, які вони визначають, збігаються

Рівноскладені фігури – фігури, які можна розбити лініями на скінченне число попарно рівних між собою фігур.

Рівняння з однією змінною – предикат виду $f(x) = q(x), x \in M$, для якого потрібно знайти область істинності.

Різниця (натур. число як міра відрізка) двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n – k$) – натуральне число, яке є мірою різниці двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, другий – натуральне число k при одному і тому ж одиничному відрізку.

Різниця довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a – b$) – потужність доповнення підмножини B до множини A, де число a є потужністю множини A, а число b є потужністю множини B, або – ціле невід'ємне число x, сума якого з числом b дорівнює числу a, тобто $x + b = a$ або $(a – b) + b = b + (a – b) = a$.

Різниця множин A *і* B – множина $A \setminus B$, яка складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B.

Розбиття множини М на підмножини, які попарно не перетинаються – система непорожніх підмножин множини M таких що, кожний елемент множини M належить одній і тільки одній із підмножин системи, при цьому кожна підмножина системи називається *класом розбиття*.

Розв'язати рівняння – значить знайти множину розв'язків (коренів) рівняння.

Розв'язати систему нерівностей – означає знайти множину розв'язків цієї системи.

Розв'язок (корінь) рівняння – кожне число, яке належить множині розв'язків рівняння. (Значення змінної при якому дане рівняння перетворюється в істинну числову рівність).

Симетрична різниця множин A *і* B – різниця об'єднання і перерізу множин A і B (виключне «або»), яка позначається $A \Delta B$.

Система нерівностей – будь-яку кон'юнкцію їх. Термін «нерівність» у цьому пункті означає «нерівність з однією змінною».

Система одиниць вимірювання (система мір) – сукупність одиниць вимірювання різних величин, що ввійшли до вжитку.

Система рівнянь – кон'юнкція рівнянь (позначається фігурною дужкою зліва).

Система числення – сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число.

Систематичний (системним) дріб – чисельник є натуральним числом, записаним у позиційній системі числення з основою g, а знаменник – натуральним степенем основи g.

Скалярні величини – такі величини, які повністю характеризуються числовим значенням – числом.

Скінченна множина – множина, а) елементи якої можна перелічити; б) яка не має власної підмножини, рівно потужної їй; в) рівно потужна деякому відрізку натурального ряду.

Співпідпорядковані поняття – два або більше несумісних понять, таких що будь-які два з них несумісні, а всі вони є видами деякого спільного роду.

Споживна вартість товару – здатність товару задовольняти певні потреби людини.

Сторони многокутника – ланки многокутника.

Сукупність рівнянь – диз’юнкція рівнянь (позначається квадратною дужкою зліва).

Сума – результат додавання чисел.

Сума (добуток) двох ірраціональних чисел α і β – число, яке більше за суму (добуток) будь-яких їх наближених значень, взятих з недостачею, але менше за суму (добуток) будь-яких їх наближених значень, взятих з надлишком.

Сума довільних двох натуральних чисел n і k (позначається n + k) – натуральне число, яке є мірою відрізка, що є сумою двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k при одному й тому ж одиничному відрізку.

Сума довільних цілих невід’ємних чисел a і b (позначається a + b) – потужність об’єднання множин A і B, які не перетинаються і мають своїми потужностями відповідно числа a і b. *Сума (натур. число як міра відрізка)* довільних двох натуральних чисел n і k (позначається $n + k$) – натуральне число, яке є мірою відрізка, що є сумою двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k при одному й тому ж одиничному відрізку.

Сума довільних цілих невід’ємних чисел a_1, a_2, …, a_n (позначається $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ або $\sum_{i=1}^{n} a_i$) – потужність об’єднання множин A_1, A_2, …, A_n, які попарно не перетинаються і потужностями яких є відповідно числа a_1, a_2, …, a_n.

Сума цілих невід’ємних чисел – потужність об’єднання 2-х множин, які не перетинаються і потужностями яких є дані числа.

Суміжні вершини многокутника – суміжні вершини ламаної, що задає многокутник.

Суміжні сторони многокутника – суміжні ланки.

Сумісні поняття – поняття, обсяги яких мають спільні об’єкти.

Сфера – поверхня, яка утворюється внаслідок обертання півкола навколо його діаметра.

Сюр’єктивне відношення – відношення в якого область значення збігається з областю прибуття.

Твердження (*судження*) – думка, в якій виділяється певний об'єкт, встановлюються його властивості або зв'язки з іншими об'єктами.

Твірна циліндра – перпендикуляр між основами циліндра, який належить його бічній поверхні.

Теорема – твердження, істинність яких доводиться на основі вже відомих істинних тверджень. Іноді замість терміну «теорема» вживаються також терміни «закон», «властивість», «наслідок», «правило» тощо.

Тіло обертання – геометричне тіло, утворене внаслідок обертання плоскої геометричної фігури навколо прямої, яка лежить у тій самій площині, що й дана фігура.

Тотожне перетворення виразу – заміна одного виразу тотожно рівним йому виразом.

Тотожні перетвореннями виразів – послідовний перехід від одного виразу до іншого, що тотожно дорівнює йому.

Тотожно рівні вирази – вирази зі спільною областю визначення, які мають рівні значення при будь-яких значеннях змінних із області визначення.

Трикутник – многокутник із трьома вершинами.

Умовивід – форма мислення, в якій з одного або кількох тверджень одержується (говорять також виводиться) нове твердження, яке містить у собі нові знання

Універсальна множина – множина, для якої всі інші множини, які розглядаються у задачі чи теорії, є її підмножинами, її позначають у більшості випадків *U*.

Функція – якщо кожному елементу *x* числової множини X за правилом *f* відповідає єдине число *y*, то говорять, що на множині X задано числову функцію *f (x)*, і пишуть: $y = f(x), x \in X$. При цьому *x* називають аргументом, а *y* – значенням функції. Множину X називають областю визначення функції, а множину значень, які функція набуває, – її множиною значень; останню позначають через *f (X)*.

Циліндр (прямим круговим циліндром) – тіло, яке утворюється при обертанні прямокутника навколо однієї із його сторін.

Цілий раціональний вираз або многочлен – раціональний вираз, який не містить операції ділення на вирази, що містять змінні.

Цілі додатні раціональні числа або цілі додатні числа – натуральні числа, що розглядаються як елементи множини додатних раціональних чисел.

Цілі невід'ємні числа – елементи множини цілих невід'ємних чисел

Ціна товару – вартість одиниці товару, виражена в грошах.

Частка – результат ділення.

Частка довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b (позначається $a : b$ або $\frac{a}{b}$) – ціле невід'ємне число x, добуток якого з числом b дорівнює a.

Частка цілих чисел a і b – ціле число $c = a \div b$, що $c \times b = a$. Число a називають *діленим, b – дільником,* а операцію знаходження частки – *діленням.*

Частка(натур. число як міра відрізка) двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n : k$ або $\frac{n}{k}$) – натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де число n є мірою цього ж відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε_1 при одиничному відрізку ε.

Числова множина – множина, елементами якої є числа.

Числова пряма – координатна пряма.

Числовий вираз – запис чисел та операцій над ними, в якому за попередньою домовленістю відомий порядок виконання операцій над ними.

Числові змінні – змінні, значеннями яких є числа.

Числові послідовності – функції, області визначення яких є множина натуральних чисел N (або множина цілих невід'ємних чисел N_0.

Чистий періодичний десятковий дріб – періодичний десятковий дріб, у якого період починається безпосередньо після коми.

Чотирикутник – многокутник із чотирма вершинами.

Література

1. Бевз Г. П. Алгебра : проб. підруч. Для 7-9 кл. серед. шк. / Г. П. Бевз. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 2000. – 303 с.
2. Бевз Г. П. Математика: 6 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.
3. Боровик В. Н.Курс Математики / В. Н. Боровик [та ін.]. – К. : Вища школа, 1995. – 392 с.
4. Виленкин Н. Я. Задачник-практикум по математике : учеб. пособ. для студ.-заоч. І-ІІІ курсов фак. пед. и метод. нач. об-я пед. ин-в. Н. Я. Виленкин [и др.] – М.: Просвещение, 1977. – 205 с.
5. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левищенко. – К.: Вища школа, 1988. – 272 с.
6. Істер О. С. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2013. – 368 с.
7. Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки / О. В. Кужель. – К.: Рад. шк., 1977. – 160 с.
8. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики : навч. посіб. для пед. училищ / В. М. Кухар, Б. М. Білий – вид. 2-ге.– К.: Вища школа, 1987. – 319 с.
9. Лаврова Н. К. Задачник-практикум по математике / Н. К. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985. – 184 с.
10. Лук'янова С. Розв'язування текстових задач арифметичними способами: 5-6 кл. / С. Лук'янова. – К. : «Шкільний світ» : Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с.
11. Погорєлов О. В. Геометрія. Стереометрія : підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / О. В. Погорєлов К.: Освіта, 2001. – 128 с.
12. Стойлова Л. П. Основы начального курса математики / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : 1988. – 320 с.

Джерела інформації

1. http://uk.wikipedia.org/wiki/
2. http://testportal.if.ua/subjekt.php?tutor =196
3. http://www. terver.ru/maththeoryGeometry.php
4. http://www.pm 298. ru/mgeom.php
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/

Юлія Миколаївна Демченко

МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
з підготовки теоретичного, практичного
та самостійного курсу з дисципліни «Математика»
для студентів факультету педагогіки та психології

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ,
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія **ДК № 1537** від **22.10.2003 р.**

Підп. до друку 15.05.2018. Формат 60×90/16. Папір офсет.
Друк різограф. Ум. др. арк. 9,54. Тираж 100. Зам. № 8789.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
Центральноукраїнського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
25006, Кропивницький, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua