Language and Their Aspects in Higher Education: a Textbook]. Dnipro.

4. Yavorska, H.Kh. & Perevozniuk, N. M. (2018). *Inshomovne dilove spilkuvannia v konterksti profesiinoi pidhotovky maibutnikh ekonomistiv* [Foreign-language business communication in the context of future economists training]. Odessa.

5. *Common European Framework of Reference for Languages: Learning, Teaching, Assessment. Companion Volume with New Descriptors* (2018).

6. Nunes, V.B. & Souza, L.L. de (2018). *Ethical Formation in Professional, Scientific and Technological Education*.

7. Probucka, D. (2016). *The Educational Aspects of Ethics*.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ЗІНЧЕНКО Олена Сергіївна – кандидат філологічних наук, доцент, завідувач кафедри іноземних мов Одеської національної академії харчових технологій.

Наукові інтереси: методика викладання французької мови, стилістика художнього тексту, історія французької літератури.

ОГРЕНІЧ Марія Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри іноземних мов Одеської національної академії харчових технологій.

Наукові інтереси: теорія та методика навчання ділової англійської мови в вищих навчальних закладах.

ШЕПЕЛЬ Марина Євгенівна – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри іноземних мов Одеської національної академії харчових технологій.

Наукові інтереси: викладання іноземної мови за професійним спрямуванням, становлення особистості професіонала.

ЯКОВЛЄВА Марина Леонідівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри іноземних мов Одеської національної академії харчових технологій

Наукові інтереси: запровадження загальнокультурної компетентності студентів у процесі вивчення іноземної мови у виші.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

ZINCHENKO Olena Serhiyivna – PhD in Philology, Associate Professor, Head of the Chair of Foreign Languages, Odessa National Academy of Food Technologies.

Circle of research interests: French teaching methodology, fiction texts stylistics, French literature history.

OHRENICH Mariia Anatoliyivna – PhD in Pedagogy, Associate Professor, Chair of Foreign Languages, Odessa National Academy of Food Technologies.

Circle of research interests: theory and methodology of business English teaching at higher educational institutions.

SHEPEL Maryna Yevhenivna – PhD in Pedagogy, Senior Lecturer, Chair of Foreign Languages, Odessa National Academy of Food Technologies.

Circle of research interests: methodology of teaching foreign languages for specific purposes, future professionals' development.

YAKOVLIEVA Maryna Leonidivna – PhD in Pedagogy, Associate Professor, Chair of Foreign Languages, Odessa National Academy of Food Technologies.

Circle of research interests: introducing general culture competence to the students in the process of learning a foreign language at higher technical institutions.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2020 р.

УДК 373.5.016:51
DOI: 10.36550/2415-7988-2020-21-191

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-8656-2220
e-mail: l.iziumch@gmail.com

ГОТУЄМОСЬ ДО МАТЕМАТИЧНИХ КОНКУРСІВ: ЗАДАЧНА СЕРІЯ НА МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У ЧОТИРИКУТНИКУ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Математична підготовка в загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями основних алгоритмів розв’язування задач стандартних типів, у той час як розв’язуванню нестандартних задач присвячується незначна кількість часу.

Розв’язування цікавих, нестандартних задач чи розв’язування відомих задач нестандартним способом сприяє розвитку математичних здібностей учнів, формуванню здатності до самостійного оволодіння новими знаннями, спроможності аналізувати отриману інформацію, розвитку творчого мислення, які необхідно систематично і вміло упроваджувати. В Україні є значні можливості для покращення самостійної пізнавальної діяльності учнів, у тому числі участь у різного виду позакласних заняттях, у математичних турнірах, олімпіадах, у ЗФМШ та науково-дослідницькій роботі у Малій Академії наук. Засвоєння методів розв’язування олімпіадних задач вимагає від учнів напруженої, активної та зосередженої самостійної роботи, а також розвиває їхню творчість, креативність та піднімає рівень зацікавленості до математики. Розв’язування нестандартних задач учнями є також гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності, оскільки конкурсні задачі передбачають необхідність певного наукового дослідження; успіх залежить від глибини розуміння проблеми, вміння раціонально розподілити час при розв’язуванні задачі, проаналізувати усі умови та обмеження, які фігурували в задачі та ін.; часто такі дослідження передбачають можливість узагальнити проблему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Педагоги-практики, учені приділяють значну увагу різним аспектам процесу математичної підготовки обдарованих учнів до участі у математичних олімпіадах, конкурсах, турнірах, активної пошукової роботи у системі Малої академії наук України. Формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Кірман В.К., Колесник Є.А., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Слєпкань З.І., Хмара Т.М., Чашечникова О.С. та ін. [2, 6, 13]; забезпечення наступності навчання математичних дисциплін, навчально-дослідницьку діяльність учнів вивчали Бевз В.Г., Ботузова Ю.В., Владімірова Н.Г., Гнезділова К.М., Голодюк Л.С., Тарасенкова Н.А., Швець В.О. та ін.; інноваційну діяльність при профільному вивченні математики та геометричну складову конкурсних задач розглядали Апостолова Г.В., Возняк О.Г., Зеленяк О.П., Ізюмченко Л.В., Коломієць О.М., Макарчук О.П., Матяш О.І., Панасенко О.Б., Працьовитий М.В., Рабець К.В., Ясінський В.А. та ін. [4, 7, 14, 15]; системний підхід в організації розв’язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Анікушин А.В., Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Клурман О.О., Кукуш О.Г., Курченко О.О., Мітельман І.М., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Плахотник В.В., Радченко В.М., Рубльов Б.В., Сарана О.А., Федак І.В., Шунда Н.М. та ін. [3, 5, 8, 10, 11, 12].

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених роботі з обдарованими учнями, математична і методична складова підготовки школярів до участі у математичних змаганнях потребує подальшого дослідження у частині задачного наповнення і структурування задач щодо вікових можливостей учнів.

Метою статті є об’єднання задачної серії конкурсних геометричних задач навколо однієї опорної задачі.

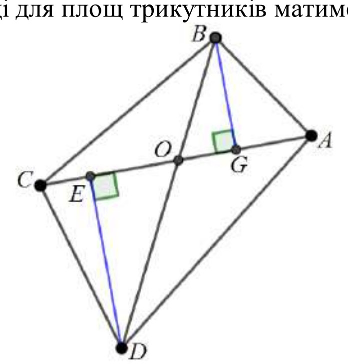
Завдання: розкрити методичні аспекти підготовки учнів до розв’язування конкурсних завдань на прикладі даної задачі; навести приклади різних задач з точки зору вікових можливостей дослідників; скласти олімпіадну задачу, яка дозволяє інтегрувати в геометричну оболонку суто теоретико-числовий вміст.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, синтез, порівняння) та емпіричні (педагогічне спостереження, аналіз навчального процесу) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. На етапі підготовки до участі у математичному змаганні є можливість ознайомлення з різноплановою математичною літературою, рекомендованою вчителем (тренером). Незважаючи на значну кількість літератури учню, початківцю олімпіадного руху, та і вчителю-початківцю, нелегко зібрати матеріал таким чином, щоб різні конкурсні завдання були об’єднані або спільним способом розв’язування, або спиралися на одні і ті ж самі теоретичні відомості, якими має володіти учень у силу вікових можливостей. Достатньо часто один і той самий типаж конкурсних завдань можна розглядати з учнями різних вікових груп, але з різним задачним наповненням, проте частіше різні типи завдань приходиться розв’язувати окремо з учнями середньої чи то старшої ланки школи. Окремі задачі запропонованої статті рекомендуємо до розв’язування з учнями 8-9 класів, останні – 10-11 класів. Перейдемо до конкретних прикладів. Розглянемо наступну задачу.

Опорна задача. Нехай є довільний опуклий чотирикутник *ABCD*, діагоналі якого перетинаються у точці *O*, утворюючи чотири трикутники *OAB*, *OBC*, *OCD*, *OAD*. Яким співвідношенням пов’язані площі цих чотирикутників?

Зауважимо, що згідно діючої програми вивчення математики у загальноосвітній школі учні у восьмому класі вивчають площу трикутника, а тому доцільно запропонувати учням проговорити, що є спільним для кожних двох трикутників, наприклад, *OAB* і *OAD* та *OAB* і *OBC* (наприклад, для двох останніх трикутників це є спільна сторона *OB*; спільна висота, проведена з вершини *B*, до сторін *AO* і *OC*). Кожний спільний елемент можна використати у обчисленні площі двох трикутників одночасно. Нехай зафіксуємо висоти, проведені з вершин *B* та *D*, тоді для площ трикутників матимемо:



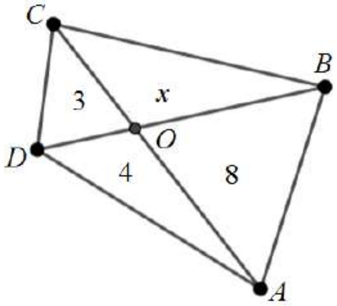
$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BG$, $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BG$, а тому їхня частка дорівнює відношенню основ $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OBC}}=\frac{AO}{OC}$; аналогічно і для двох інших трикутників отримаємо вирази $S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot DE$, $S_{\Delta ODC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot DE$ та для їхньої частки, відповідно, $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta ODC}}=\frac{AO}{OC}$.

Праві частини двох отриманих співвідношень однакові, а тому маємо рівність $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta OBC}} = \dfrac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta ODC}}$, звідки *добуток площ несусідніх трикутників однаковий*:

$$\underline{S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta DOC} = S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}}.$$

Це основний висновок опорної задачі.

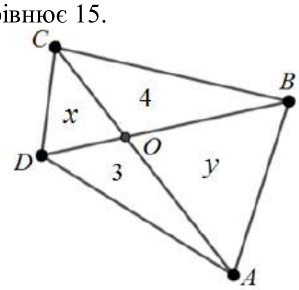
Вправа 1. Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників.



Розв'язання задачі є очевидним, якщо відомий висновок з попередньої задачі і є дуже нетривіальним, якщо він невідомий:

$3 \cdot 8 = 4 \cdot x \Rightarrow x=6$ (кв. од.).

Вправа 2. Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників, якщо площа чотирикутника *ABCD* дорівнює 15.

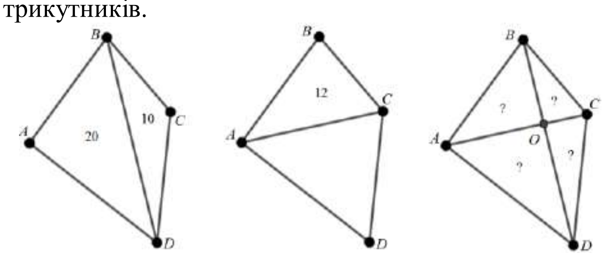


Розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи двох рівнянь:

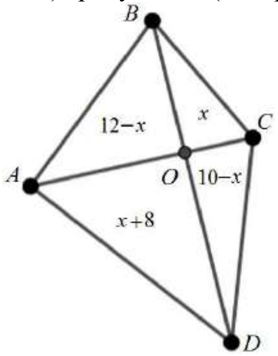
$$\begin{cases} x+y+3+4=15, \\ x \cdot y = 3 \cdot 4, \end{cases} \Rightarrow x=2, y=6 \quad \text{або}$$

$x=6, y=2$.

Вправа 3. Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників.



Розв'язання. Ця задача є ускладненою версією попередніх задач і потребує лише охайних обчислень. Позначимо площу одного з чотирьох (малих) трикутників через *x* та виразимо площі інших трикутників, враховуючи, що площа усього чотирикутника *ABCD* відома та відомі площі (великих) трикутників (див. рис.).



Враховуючи основне співвідношення між площами трикутників, складемо рівняння:

$(12-x) \cdot (10-x) = (x+8) \cdot x$;

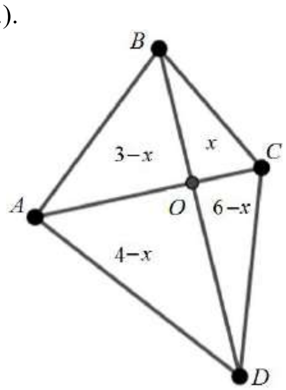
$x^2 - 22x + 120 = x^2 + 8x$; $30x = 120$; $x=4$.

А тоді площі шуканих трикутників $S_{\Delta AOB} = 8$; $S_{\Delta BOC} = 4$; $S_{\Delta AOD} = 12$; $S_{\Delta COD} = 6$.

Відповідь: 8; 4; 12 і 6 кв. од.

Проведемо огляд завдань, які пропонувалися школярам на різних ***математичних конкурсах***, розв'язання яких спирається на розглянуту опорну задачу. Прокоментуємо їхнє розв'язання.

Задача 1. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Площі трикутників *ABC* і *BCD* дорівнюють 3 см^2 і 6 см^2, а сума площ трикутників *OBC* і *OAD* дорівнює 4 см^2. Знайдіть площу чотирикутника *ABCD*. (*Завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт Малої академії наук України*, секція Математика, 2007/2008 н.р., автор Плахотник В.В.).



Розв'язання. Виконаємо рисунок, позначимо площу $S_{\Delta BOC} = x$, тоді усі інші площі з урахуванням умови рівні: $S_{\Delta AOD} = 4-x$; $S_{\Delta COD} = 6-x$; $S_{\Delta AOB} = 3-x$, причому очікуваний результат $x < 3$. Отримаємо рівняння $(6-x) \cdot (3-x) = (4-x) \cdot x$, після спрощення якого матимемо $2x^2 - 13x + 18 = 0$.

Обидва корені цього рівняння є додатними: $x=2$; $x=4{,}5$, але умову задачі задовольняє лише $x=2$

Площі малих трикутників 2; 1; 2; 4 см^2, а тому площа чотирикутника *ABCD* є їхньою сумою і дорівнює 9 см^2.

Відповідь: 9 см^2.

Задача 2. Нехай в опуклому чотирикутнику

ABCD діагоналі перетинаються в точці *O*, а площі трикутників *ABC*, *BCD* і *AOD* дорівнюють відповідно 5; 3 і 8 см^2. Знайдіть площу чотирикутника *ABCD* (*Завдання Всеукраїнської заочної математичної школи Малої академії наук України*, 2011/2012 н.р. [10, с. 5]).

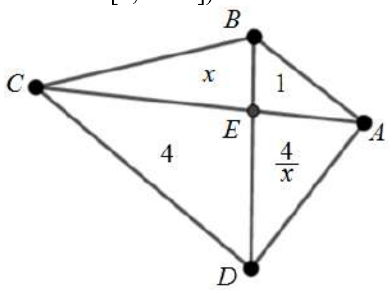
Розв'язання. Виконаємо рисунок, позначимо площу $S_{\Delta BOC} = x$, тоді усі інші площі з урахуванням умови рівні: $S_{\Delta AOD} = 8;\ S_{\Delta COD} = 3 - x;\ S_{\Delta AOB} = 5 - x$, очікуваний результат $x < 3$. Отримаємо рівняння

$$(5 - x) \cdot (3 - x) = 8 \cdot x,$$

після спрощення якого матимемо $x^2 - 16x + 15 = 0$, коренями якого є $x=1$; $x=15$ (сторонній), умову задачі задовольняє лише $x=1$. Площі малих трикутників 4; 1; 8; 2 см^2, а тому площа чотирикутника *ABCD* дорівнює 15 см^2.

Відповідь: 15 см^2.

Задача 3.1. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *E*. Відомо, що $S_{ABE} = 1$ см^2, $S_{DCE} = 4$ см^2, $S_{ABCD} \leqslant 9$ см^2. Знайдіть площі трикутників *ADE* і *BCE* (*Завдання четвертого рівня, з поміткою для фіз.-мат. класів*, із збірника для ДПА з математики [2, с. 82]).



Розв'язання. Позначимо площу *S* трикутника *BCE* $S_{\Delta CBE} = x$. З рівності добутків $S_{\Delta ABE} \cdot S_{\Delta DCE} = S_{\Delta AED} \cdot S_{\Delta BEC}$,

$1 \cdot 4 = S_{\Delta AED} \cdot x$ випливає, що площа $S_{\Delta ADE} = \dfrac{4}{x}$.

Площа чотирикутника $S_{ABCD} = x + \dfrac{4}{x} + 5 \le 9$, звідки

$$x + \frac{4}{x} \le 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x} \le 0 \Rightarrow x = 2\ (x > 0)$$

А тому площі трикутників *ADE* і *BCE* дорівнюють по 2 см^2.

Можна міркувати інакше: з нерівності Коші $x + \dfrac{4}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \dfrac{4}{x}} \Rightarrow x + \dfrac{4}{x} \ge 4.$ А за даними задачі $x + \dfrac{4}{x} \le 4$, це означає, що обидві умови виконуються лише тоді, коли виконується рівність $x + \dfrac{4}{x} = 4$. А рівність у нерівності Коші виконується тоді і тільки тоді, коли компоненти є однаковими: $x = \dfrac{4}{x},\ x > 0 \Rightarrow x = 2$.

Відповідь: площі трикутників *ADE* і *BCE* дорівнюють по 2 см^2.

Задача 3.2. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що $S_{BCO} = 1$ см^2, $S_{AOD} = 9$ см^2, $S_{ABCD} \leqslant 16$ см^2. Знайдіть площі трикутників *ABO* і *COD*. (*Завдання четвертого рівня, з поміткою для фіз.-мат. класів*, із збірника для ДПА з математики [9, с. 134]).

Розв'язання цієї задачі аналогічне до задачі 3.1.

Відповідь: площі трикутників *ABO* і *COD* дорівнюють по 3 см^2.

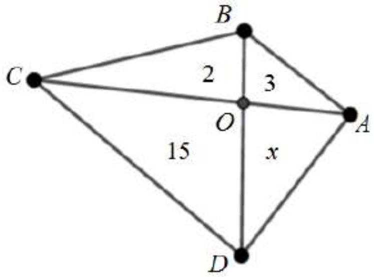
Деяка варіація попередньої задачі звучить так:

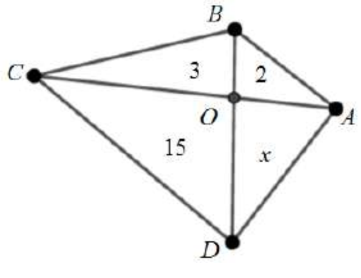
Задача 3.3. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *E*. Відомо, що $S_{ABE} = S_{DCE} = 1$, $S_{ABCD} \leqslant 4$, $AD=3$. Знайдіть *BC* (*Математичні регати* [1, с. 59]).

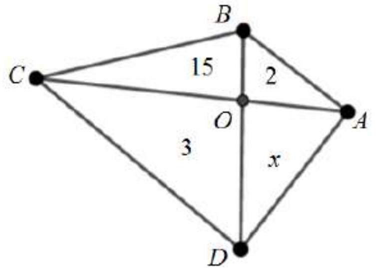
Вказівка до розв'язання: отримайте умову для площ трикутників $S_{ABCD} = x + \dfrac{1}{x} + 1 + 1 \le 4$ і наслідок $x = 1$, та доведіть, що діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл (чотирикутник є паралелограмом), а тому сторона $BC = AD = 3$.

Задача 4.1. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що площі трьох із чотирьох трикутників *AOB*, *BOC*, *COD* і *DOA* дорівнюють 2 см^2, 3 см^2 та 15 см^2. Якою може бути найменша площа чотирикутника *ABCD*, якщо вона більша за 25 см^2?

Оскільки невідомо, які з площ трикутників конкретно дорівнюють 2; 3; 15 см^2, то можливі три принципово різних випадки: коли навпроти трикутника з невідомою площею лежать по черзі трикутники з площами 2; 3; 15 см^2.







Перший випадок: маємо $2 \cdot x = 15 \cdot 3 \Rightarrow x = 22{,}5 \Rightarrow S_{ABCD} = 42{,}5$ см^2; другий випадок: $3 \cdot x = 15 \cdot 2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow S_{ABCD} = 30$ см^2 (менше значення, задовольняє умову задачі); третій випадок: $15 \cdot x = 2 \cdot 3 \Rightarrow x = 0{,}4 \Rightarrow S_{ABCD} = 20{,}4$ см^2 (ще менше значення, але заборонене умовою задачі).

Відповідь: площа чотирикутника 30 см^2.

Споріднена до попередньої задачі звучить так:

Задача 4.2. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* поділяють його на чотири трикутники. Площі трьох із них дорівнюють 1, 2 і 3. Знайдіть площу чотирикутника *ABCD* [1, с. 38].

Відповідь: 12; 7,5; 6,(6).

Розглянемо приклади завдань з регіональних олімпіад Кіровоградської області з указаної теми, які, на думку автора, доцільно розглянути з учнями 9-11 класів.

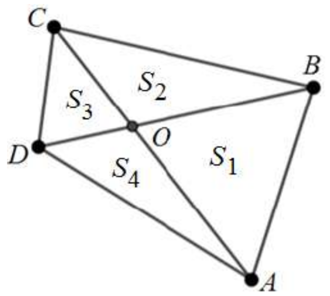
Задача 5. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що площі трикутників *AOB*, *BOC*, *COD* і *DOA* виражаються натуральними числами (*регіональна олімпіада*, Кіровоградська область).

1) Чи може добуток цих площ дорівнювати а) 2019; б) 2025?

2) Чи може добуток цих площ закінчуватися цифрами а) 2019; б) 2020?

(числа в умові задачі *змінені* автором статті).

Розв'язання.



1. а) Оскільки $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, то добуток площ $S_1 S_2 S_3 S_4 = (S_1 \cdot S_3)^2 = n^2$ є квадратом натурального числа, а тому (завдання а) не може дорівнювати 2019, оскільки 2019 не є квадратом натурального числа; (завдання б)
може дорівнювати 2025, бо 2025 є квадратом натурального числа 45. Наприклад, $S_1 = 5,\ S_3 = 9;\ S_2 = 3,\ S_4 = 15$.

2. а) Неважко показати, що якщо квадрат натурального числа $S_1 S_2 S_3 S_4 = n^2$ закінчується цифрою 9, то саме число *n* закінчується цифрою 3 або 7, тобто має вигляд $n = 10k \pm 3,\ k \in N$. А тоді
$$n^2 = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 \equiv 9 \ (\text{mod } 20)$$
може закінчуватися двома цифрами 09 або 29, або 49, або 69, або 89, тобто *передостання* цифра 0; 2; 4; 6; 8, але не 1. А тому відповідь: добуток площ не може закінчуватися цифрами 2019.

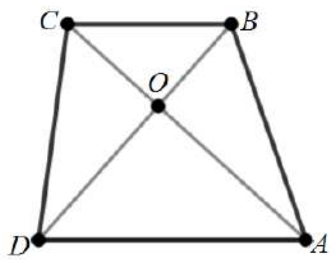
2. б) Якщо квадрат натурального числа $S_1 S_2 S_3 S_4 = n^2$ закінчується цифрою нуль, то число n^2 ділиться на п'ять, а тоді і натуральне число $n \vdots 5 \Rightarrow n^2 \vdots 25$, тобто число n^2 повинно закінчуватися цифрами 00, або 25, або 50, або 75 і не може закінчуватися двома цифрами 20.

Зауважимо, що з того, що натуральне число n^2 закінчується цифрою нуль, випливає, то число n^2 ділиться на десять, але число 10 не є простим, а в доведенні більш зручно використовувати саме подільність на прості множники (для числа 10 це два або п'ять).

Відповідь: добуток площ не може закінчуватися цифрами 2019; 2020.

Наступну задачу доцільно розглянути з учнями 9-10 класів.

Задача 6. Діагоналі трапеції *ABCD* ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) перетинаються в точці *O*. Чи може величина $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{BOC} + S_{AOD}}$ бути натуральним числом (автор задачі Макарчук О.П., *регіональна олімпіада*, Кіровоградська область).



Розв'язання. Нехай *h* – висота трапеції, тоді маємо $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot h = S_{BCD}$, звідки отримаємо рівність площ малих трикутників *AOB* і *COD*: $S_{AOB} = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC} = S_{COD}$

Оскільки трикутники $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ подібні, то їхні площі відносяться як квадрати відповідних сторін, тобто $\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \left(\dfrac{BC}{AD}\right)^2 < 1$, тому $S_{BOC} < S_{AOD}$. З адитивності площі зрозуміло, що площа $S_{ABCD} > S_{BOC} + S_{AOD}$, тому відношення, про яке йде мова в умові задачі, $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{BOC} + S_{AOD}} > 1$.

За висновком з опорної задачі $S_{BOC} \cdot S_{AOD} = S_{AOB} \cdot S_{COD}$, і того факту, що

$S_{AOB} = S_{COD}$, маємо, що $S_{AOB} = \sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}}$, звідки площа трапеції

$$S_{ABCD} = \underline{S_{AOB}} + S_{BOC} + \underline{S_{COD}} + S_{AOD} =$$

$$= S_{BOC} + S_{AOD} + 2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} =$$

$$= \left(\sqrt{S_{BOC}} + \sqrt{S_{AOD}}\right)^2$$

Зрозуміло, що $\left(\sqrt{S_{AOD}} - \sqrt{S_{BOC}}\right)^2 > 0$, а тому $S_{AOD} + S_{BOC} > 2\sqrt{S_{AOD} \cdot S_{BOC}}$, звідки маємо $\dfrac{2\sqrt{S_{AOD} \cdot S_{BOC}}}{S_{AOD} + S_{BOC}} < 1$. А тоді маємо, що відношення

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BOC} + S_{AOD}} = \frac{S_{BOC} + 2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} + S_{AOD}}{S_{BOC} + S_{AOD}} =$$

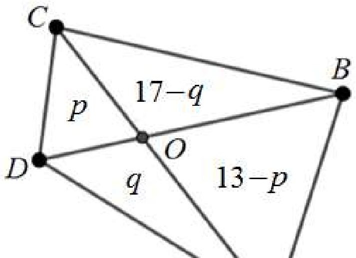
$$= \frac{S_{BOC} + S_{AOD}}{S_{BOC} + S_{AOD}} + \frac{2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}}}{S_{BOC} + S_{AOD}} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}}}{S_{BOC} + S_{AOD}} < 1 + 1 = 2.$$

Отримали, що $1 < \dfrac{S_{ABCD}}{S_{BOC} + S_{AOD}} < 2$, дане число не може бути натуральним.

На завершення можна запропонувати задачу, створену автором статті для учнів старших класів, яка приводить до дослідження і розв'язання діофантового рівняння.

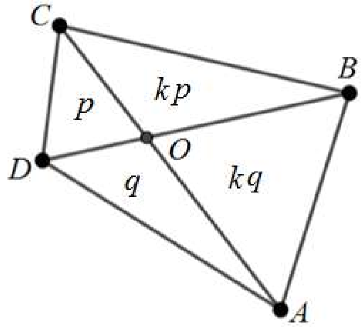
Задача 7*. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що площі трикутників *AOB*, *BOC*, *COD* і *DOA* виражаються натуральними числами, причому площі трикутників *COD* і *DOA* виражаються простими числами *p* і *q*, а суми площ трикутників *AOB* і *COD* та *BOC* і *DOA* дорівнюють, відповідно, 13 і 17. Знайдіть *p* і *q*.



Розв'язання. Враховуючи співвідношення між площами трикутників, отримаємо рівняння:

$p \cdot (13–p) = q \cdot (17–q)$.

За умовою числа *p* і *q* є простими (і неважко показати, що вони є різними, інакше суми, дані в умові, теж були б однаковими), а тому є взаємно простими. З того, що добуток ділиться на *просте* число, випливає, що хоч би один із співмножників ділиться на це просте число. Перший множник *p* не може ділитися на просте *q*, звідки випливає, що 13 – *p* ділиться на *q*. А тому 13 – *p* = *k*·*q*, де *k* – натуральне число, тому що 13 – *p* (за умовою) є площею трикутника *AOB* (є натуральним числом), причому $k > 1$. З рівності добутків площ трикутників отримаємо, що площа трикутника *COB* дорівнює *k p*.



Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 17 - q = kp, \\ 13 - p = kq. \end{cases} \Rightarrow 4 + (p - q) = k(p - q),$$

Звідки $(p-q)(k-1) = 4$ – стандартне діофантове рівняння, причому другий множник є додатним числом, що є дільником числа 4, а тому $k - 1 \in \{1; 2; 4\}$ або $k \in \{2; 3; 5\}$; система рівнянь (разом з рівнянням-наслідком) така $\begin{cases} kp + q = 17, \\ p + kq = 13, \\ p - q = \dfrac{4}{k-1}. \end{cases}$.

При $k = 2$ отримаємо систему $\begin{cases} 2p + q = 17, \\ p + 2q = 13, \\ p - q = 4, \end{cases}$ звідки $p = 7, q = 3$ (прості, задовольняють умову задачі); при $k = 3$ система $\begin{cases} 3p + q = 17, \\ p + 3q = 13, \\ p - q = 2, \end{cases}$ має дробові розв'язки (не задовольняють умову задачі); при $k = 5$ отримаємо систему $\begin{cases} 5p + q = 17, \\ p + 5q = 13, \\ p - q = 1, \end{cases}$ звідки $p = 3, q = 2$ (прості, задовольняють умову задачі). Інших розв'язків, які задовольняють умову задачі, немає. Безпосередня перевірка дозволяє впевнитися у правильності знайдених розв'язків:

1) $13 = \underline{7} + 6,\ 17 = \underline{3} + 14;\ 7 \cdot 6 = 3 \cdot 14$;

2) $13 = \underline{3} + 10,\ 17 = \underline{2} + 15;\ 3 \cdot 10 = 2 \cdot 15$.

Відповідь: $p = 7, q = 3$ або $p = 3, q = 2$.

Зауважимо, що розв'язання задачі допускає перебір усіх простих чисел $p \le 11$, проте, якщо змінити в умові числа на більші, то спосіб перебору стає неприйнятним, наприклад:

Задача 7′. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Відомо, що площі трикутників *AOB*, *BOC*, *COD* і *DOA* виражаються натуральними числами, причому площі трикутників

COD і *DOA* виражаються простими числами *p* і *q*, а суми площ трикутників *AOB* і *COD* та *BOC* і *DOA* дорівнюють 89 і 91. Знайдіть *p* і *q*.

Вказівка до розв'язання: отримайте систему рівнянь $\begin{cases} 91-q=kp, \\ 89-p=kq, \end{cases}$ і рівняння-наслідок: $(p-q)(k-1)=2$, розгляньте два випадки $k=2,\ k=3$, умову простоти задовольняє лише один розв'язок.

Відповідь: $p=31, q=29$.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок напряму. Розв'язування конкурсних та олімпіадних задач учнями є гарною підготовкою до майбутнього продовження навчання та подальшої практичної діяльності, а тому продовження цієї теми є виправданим. Подальші дослідження будуть спрямовані на створення ширшої задачної серії до розглянутої опорної задачі, у тому числі завдань з інтеграцією у суміжні олімпіадні теми.

Статтю рекомендуємо вчителям математики, студентам фізико-математичних факультетів та усім, хто займається математичною підготовкою обдарованих школярів до участі в олімпіадах та математичних турнірах.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. Московские математические регаты. Москва : МЦНМО, 2007. 360 с.
2. Бурда М.І., Біляніна О.Я., Вашуленко О.П., Прокопенко Н.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Кн. 2. Харків: Гімназія, 2010. 224 с.
3. Сборник задач Киевских математических олимпиад / Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Киев, Вища школа, 1984. 240 с.
4. Ізюмченко Л.В., Макарчук О.П. Розв'язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 124 с.
5. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки /А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюкова та ін. за ред. Б.В. Рубльова. Харків: Гімназія, 2011. 192 с.
6. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
7. Ленчук І.Г., Працьовитий М.В. Метричні задачі з кутами у стереометрії. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі: зб. наук. праць*. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Вип. 20. С. 52-59.
8. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 рр. Львів: Каменяр, 2008. 348 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 кл. Ч. 2. За ред. М.І. Бурди. Київ: Центр навчально-методичної літератури, 2014. 208 с.
10. Плахотник В.В., Перегуда О.В. Задачі Всеукраїнської заочної математичної школи Малої академії наук України на 2011-2012 н.р. Київ: Національний центр Мала академія наук України, 2012. 32 с.
11. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Київ: Вид-во АСК., 2004. 344 с.
12. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987–2005 рр. Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. 164 с.
13. Чашечникова О.С. Створення творчого середовища у процесі навчання математики з метою формування в учнів готовності до творчості. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжн. зб. наук. робіт*. Дон.: ДонНУ, 2005. С. 169-174.
14. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Навчальна книга, Богдан, 2008. 208 с.
15. Ясінський В.А., Панасенко О.Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та міжнародних олімпіад. Алгебра. Навчально-методичний посібник. Вінниця: Середняк Т.К., 2015. 272 с.

REFERENCES

1. Blinkov, A.D. and Gorskaya, Ye.S. and Gurovits, V.M. (2007) *Moskovskiye matematicheskiye regaty*.[Moscow mathematical regattas]. Moscow.
2. Burda, M.I. and Bilianina, O.Ya. and Vashulenko O.P. and Prokopenko N.S. (2010) *Zbirnyk zavdan dlia derzhavnoi pidsumkovoi atestatsii z matematyky. 11 klas*. [Collection of tasks for the state final attestation in mathematics. 11 class]. Kharkiv.
3. Vyshenskyi, V.A. and Kartashov, N.V. and Mykhailovskyi, V.I. and Yadrenko, M.I. (1984) *Sbornik zadach Kievskikh matematicheskikh olimpiad*. [Collection of problems of the Kiev Mathematical Olympiads]. Kyiv.
4. Iziumchenko, L.V. and Makarchuk, O.P. (2008) *Rozviazuvannia zadach z matematyky tretoho etapu Vseukrayinskoho konkursu-zakhystu naukovo-doslidnytskykh robit uchniv-chleniv Maloi akademii nauk Ukrainy: Metodychnyi posibnyk* [Solving problems in mathematics of the third stage of the All-Ukrainian competition-defense of research works of students-members of the Small Academy of Sciences of Ukraine: Methodical manual]. Kirovohrad.
5. Anikushyn, A.V. and Klurman, O.O. and Kriukova, H.V. and Rublov, B.V. (2011) *Kyivski miski matematychni olimpiady. 2003–2011 roky*. [Kyiv City Mathematical Olympiads. 2003–2011]. Kharkiv.
6. Kushnir, V.A. and Kushnir, H.A. and Rizhniak R.Ya. (2008) *Innovatsiini metody navchannia matematyky*. [Innovative methods of teaching mathematics]. Kirovohrad.
7. Lenchuk, I.H. and Pratsovytyi, M.V. (2018) *Metrychni zadachi z kutamy u stereometriii*. [Metric problems with angles in stereometry]. Kyiv.
8. Leifura, V.M. and Mitelman, I.M. and Radchenko, V.M. and Yasinskyi, V.A. (2008) *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001–2006*. [Mathematical Olympiads of schoolchildren of Ukraine 2001-2006]. Lviv.
9. Merzliak, A.H. and Polonskyi, V.B. and Yakir, M.S. (2014) *Zbirnyk zavdan dlia derzhavnoi pidsumkovoi atestatsii z matematyky: 11 kl.* [Collection of tasks for the state final certification in mathematics: 11 class] Kyiv.
10. Plakhotnyk, V.V. and Perehuda, O.V. (2012) *Zadachi Vseukrainskoi zaochnoi matematychnoi shkoly Maloi akademii nauk Ukrainy na 2011-2012 n.r.* [Tasks of the All-Ukrainian Correspondence Mathematical School of the Small Academy of Sciences of Ukraine for 2011-2012 academic year]. Kyiv.
11. Sarana, O.A. (2004) *Matematychni olimpiady: proste i skladne poruch.* [Mathematical Olympiads: simple and complex side by side]. Kyiv.

12. Fedak, I.V. (2005) *Oblasni olimpiady z matematyky 1987–2005 r.r.* [Regional Mathematical Olympiads 1987–2005]. Ivano-Frankivsk.

13. Chashechnykova, O.S. (2005) *Stvorennia tvorchoho seredovyshcha u protsesi navchannia matematyky z metoiu formuvannia v uchniv hotovnosti do tvorchosti*. [Creating a creative environment in the process of learning mathematics in order to form students' readiness for creativity.]. Donetsk.

14. Yasinskyi, V.A. (2008) *Zadachi matematychnykh olimpiad ta metody yikh rozviazuvannia*. [Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування]. Ternopil.

15. Yasinskyi, V.A. and Panasenko, O.B. (2015) *Sekrety pidhotovky shkoliariv do Vseukrainskykh ta mizhnarodnykh olimpiad*. [Secrets of preparing students for All-Ukrainian and international competitions]. Vinnytsia.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі, методика навчання математики, проблеми організації самостійної роботи студентів та школярів, ЗНО.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

IZIUMCHENKO Liudmyla Volodymyrivna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Department of Physics and Mathematics at the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of scientific interests: specific aspects of work with gifted pupils, competition problems, methods of teaching mathematics, organization problems of independent work of students and pupils, EIT.

Стаття надійшла до редакції 18.09.2020 р.

УДК 81'243:62(075.8)
DOI: 10.36550/2415-7988-2020-22-191

КЛЮЧКОВСЬКА Ірина Михайлівна –
кандидат педагогічних наук, директор Міжнародного
інституту освіти, культури та зв'язків з діаспорою,
Національний університет «Львівська політехніка»,
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-9466-8746
e-mail: ikluch@miok.lviv.ua)
БІЛИК Оксана Сергіївна –
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри іноземних мов
Національного університету «Львівська політехніка»
ORCID:https://orcid.org/0000-0001-6042-1147
e-mail: lubik.anelia@gmail.com)

ІНТЕГРАТИВНИЙ ПІДХІД ДО ВИКОРИСТАННЯ ЗДОБУТКІВ УКРАЇНСЬКОЇ ДІАСПОРИ В КУЛЬТУРНО-ОСВІТНЬОМУ ПРОСТОРІ УКРАЇНИ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Історична доля нашої країни сформувалася так, що чимало компенсаційних функцій стосовно культури й науки історичної Батьківщини брала на себе діаспора. Чимало українських інтелігентів, одержавши статус політичної еміграції, створювали цінності, що демонстрували розвиток міжнародної культури, свіжі напрямки й стилі, наукові сфери (передусім гуманітарну), одночасно зберігаючи найкращі традиції вітчизняних шкіл.

Українська діаспора десятиріччями, розкинута по світу, створювала власні культуру, науку, мистецтво й літературу. Прикро, та понині здобутки зарубіжної української еліти недостатньо відомі в нашій державі. Хоча їхні імена, легковажно вирвані з літопису вітчизняної науки, мистецтва, було вписано у міжнародний контекст поступу духовних здобутків людства [4]. Українська діаспора своїм існуванням збагачує буття українців у світі, неабияк допомагаючи історичній Батьківщині. Тож налагоджувати, розширювати і зміцнювати зв’язки з українською діаспорою – наше нагальне завдання [2].

Становлення нового напрямку досліджень — діаспорознавства [10] — у часі збіглося із відродженням історичної пам’яті, при цьому пріоритетного значення набуває звернення до аналізу ролі українства у світі, що передбачає поглиблення та обґрунтування чинників у дослідженні самого механізму взаємодії України з діаспорою, вивчення та адаптацію іноземного досвіду такої взаємодії, необхідність подальших досліджень розвитку українських громад діаспори, їх можливостей у сприянні національним інтересам України.

Упродовж десятиріч у діаспорі накопичено неабиякий духовно-культурний потенціал, створено безліч наукових, літературних, художніх цінностей видатними українськими науковцями, письменниками, митцями [11]. Згідно із сучасними реаліями, духовною спадщиною українського народу є здобутки національної культури, створені як в Україні, так і поза її межами, в діаспорі, скрізь, де лише твориться українська культура.

Сьогодні вкрай важливе завдання – повернення в науково-освітній та інформаційний національний культурний пласт здобутків української

