УДК 519.83

ТЕОРІЯ ІГОР: МАТЕМАТИЧНА СКЛАДОВА СЛОТ-ІГРИ

Л.В. Ізюмченко

l.iziumch@gmail.com

The mathematical component of games on an example of a slot game is considered in the work and the mathematical substantiation of the unprofitableness of such games for a player is given.

У роботі розглянуто математичну складову ігор на прикладі слот-ігри та наведено математичне обґрунтування невигідності для гравця такої гри.

Теорія ігор – це розділ математики, який вивчає формальні моделі прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту, передбачає участь різних сторін, наділених різними інтересами і можливостями, вибирати доступні для них дії відповідно до цих інтересів, сторони іменуються гравцями, кожен з яких має певну множину можливих виборів, які називаються стратегіями, що ведуть до виграшу або програшу – в залежності від поведінки інших гравців.

У нашій статті ми розглянемо математичну складову ігор на прикладі популярних слот-ігор та покажемо, чому при будь-якому варіанті такі ігри невигідні для гравця. Інформація про правила ігри взята із відкритих джерел.

В усьому світі регламентується діяльність, пов'язана з організацією, проведенням та наданням можливості доступу до азартних ігор у казино, на гральних автоматах, комп'ютерних симуляторах, у букмекерських конторах, в інтерактивних закладах, в електронному (віртуальному) казино. В Україні діє Закон, який запроваджує обмеження щодо здійснення грального бізнесу у нашій державі. З правової точки зору грального бізнесу в Україні немає, а на практиці він процвітає і приносить значні прибутки організаторам. Зобов'язання України перед МВФ потребують правового узгодження ігорного бізнесу.

Перший прототип грального автомату винайдено 1887 року в Англії.

Слот-машина або слот – різновид ігрових автоматів для азартної гри. Ігри для слот-машин також називаються «слотами», у кожної з таких ігор є своя власна назва. У них можна грати не тільки на слот-машині, але й на комп'ютері,

встановивши спеціальне програмне забезпечення або ж у режимі он-лайн. Слоти користуються величезною популярністю в казино, як «реальних», так і в Інтернеті. У віртуальному казино в Інтернеті гравець має можливість грати на реальні гроші або у тренувальному режимі без ставок справжніми грошима. Слоти складаються з декількох (трьох і більше) коліс, що обертаються, т. зв. барабанів. Вони обертаються у вертикальній площини, паралельно один одному. На барабани нанесені різні картинки-символи (фрукти, золоті злитки, тварини, дзвін, цифра «7» тощо). Ми розглянемо приклад слоту з п’яти барабанів, а символи, відповідно, 1, 2, 3, 4, 5. Зробивши ставку, гравець натискає кнопку Spin (обертати), і барабани автомата починають обертатися. Після їх зупинки символи на них шикуються у випадковому порядку. Кожен такий символ має свою цінність. Якщо при цьому в один ряд вишикується комбінація з декількох однакових символів, то така комбінація є виграшною, і в такому випадку гравцеві виплачується виграш згідно з таблицею (матрицею виплат). Мета гри – скласти комбінацію однакових символів, бажано найбільшої цінності (найбільший виграш зазвичай призначався при випаданні всіх сімок або дзвонів по одній ігровій лінії, найменший – при випаданні вишень). Набір символів сучасних слот-машин дуже великий і різноманітний.

Розглянемо приклад слот-ігри. Нехай є п’ять барабанів, кожний містить сто комірок для п’яти символів ($100^5=10^{10}$, 10 млрд. можливостей), які ми позначимо умовно 1, 2, 3, 4, 5, частоти випадання яких задані, наприклад, числами 1:2:3:6:8 (гравцеві інформація про частоти невідома, проте відома матриця виплат, з якої випливає, що «п’ятірка» зустрічається найчастіше, так як виплати по ній є найменшими, але наскільки частіше – гравцю невідомо, «четвірка» – рідше і т.д., найбільш рідкою і «дорогою» є «одиничка»). Оскільки 1+2+3+6+8=20, то імовірність появи символу 1, 2, 3, 4, 5 на одному з барабанів після його зупинки, відповідно: p(1)=0,05; p(2)=0,1; p(3)=0,15; p(4)=0,3; p(5)=0,4.

Найменший виграш настає, якщо на п'яти барабанах (зліва направо) *підряд* утворюються три однакові символи (найменшої вартості, тобто три «5», у нашому варіанті). Нехай матриця виплат – $M_V = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 45 & 35 & 26 & 16 & 10 \\ 180 & 144 & 108 & 65 & 37 \end{pmatrix}$, де у першому ряді наведені виплати за три однакові символи, відповідно, за «одиничку», «двійку», «трійку», «четвірку», «п'ятірку», у другому ряді – за чотири відповідних символи, у третьому – за п'ять таких символів (поставивши одну копійку, виграєш при випаданні рівно трьох символів «5», відповідно, 2 коп., трьох символів «4» – 3 коп. і т.д.).

Обчислимо ймовірності появи рівно трьох однакових символів підряд, починаючи з першого (позначення ¬1 означає – символ не є одиничкою, * – будь-який символ):

$$p(1;1;1;\neg 1;*)=0{,}05\cdot 0{,}05\cdot 0{,}05\cdot(1–0{,}05)\cdot 1=0{,}00011875;$$

$$p(2;2;2;\neg 2;*)=0{,}1^3\cdot(1–0{,}1)\cdot 1=0{,}0009;$$

$$p(3;3;3;\neg 3;*)=0{,}15^3\cdot (1–0{,}15)\cdot 1=0{,}00286875;$$

$$p(4;4;4;\neg 4;*)=0{,}3^3\cdot(1–0{,}3)\cdot 1=0{,}0189;$$

$$p(5;5;5;\neg 5;*)=0{,}4^3\cdot (1–0{,}4)\cdot 1=0{,}0384.$$

Аналогічно, ймовірність появи рівно чотирьох однакових символів підряд, починаючи з першого:

$$p(1;1;1;1;\neg 1)=0{,}05^4\cdot(1–0{,}05)= 0{,}0000059375;$$

$$p(2;2;2;2;\neg 2)=0{,}1^4\cdot(1–0{,}1)= 0{,}00009;$$

$$p(3;3;3;3;\neg 3)= 0{,}15^4\cdot (1–0{,}15)= 0{,}0004303125;$$

$$p(4;4;4;4;\neg 4)=0{,}3^4\cdot(1–0{,}3)= 0{,}00567;$$

$$p(5;5;5;5;\neg 5)=0{,}4^4\cdot (1–0{,}4)=0{,}01536.$$

Ймовірність появи рівно п'яти однакових символів підряд:

$$p(1;1;1;1;1)=0{,}05^5= 0{,}0000003125;$$

$$p(2;2;2;2;2)=0{,}1^5= 0{,}00001;$$

$$p(3;3;3;3;3)=0{,}15^5= 0{,}0000759375;$$

$$p(4;4;4;4;4)=0{,}3^5= 0{,}00243;$$

$$p(5;5;5;5;5)=0{,}4^5= 0{,}01024.$$

Матриця ймовірностей має вигляд:

$$M_p = \begin{pmatrix} 0{,}0001187500 & 0{,}00090 & 0{,}0028687500 & 0{,}01890 & 0{,}03840 \\ 0{,}0000059735 & 0{,}00009 & 0{,}00043031255 & 0{,}00567 & 0{,}01536 \\ 0{,}0000003125 & 0{,}00001 & 0{,}0000759375 & 0{,}00243 & 0{,}01024 \end{pmatrix}.$$

Тоді сума добутків усіх відповідних елементів матриць M_V і M_p є сумарний виграш 9 606 653 125, який відрізняється від 10^{10}, для цього прикладу RTP=96,0665% ≈ 96,07%.

Віддача слота, або RTP гри, або теоретичний відсоток повернення – це все один і той же параметр. RTP – це скорочене *return to player*, що означає «повернення гравцеві». Термін є офіційним і використовується для всіх типів азартних ігор. Зазвичай *return to player* виражається у відсотках і обчислюється за формулою: $RTP = \frac{V}{S} \cdot 100\%$, де V – розмір виграшу, S – розмір ставок. Мало знати відсоток їх віддачі, потрібно ще й розуміти, як це працює на практиці. Так, наприклад, RTP = 96,07% означає, що гравець поверне 96,07% всіх зроблених на автоматі ставок, але на довгій дистанції. Неправильно вважати, що якщо за 10 або 100 спінів (обертань) витратити 100 монет, то обов'язково буде виграш в розмірі 96,07 монети. Мінімальна довжина дистанції становить 1000 спінів, а регулятори і самі розробники перевіряють віддачу на кілька мільйонів обертань.

Ми розглянули одну модель, тепер розглянемо іншу, ввівши ще один символ Wild, який замінює будь-який символ, наприклад, комбінація (1, Wild, 1, Wild, 2) рівносильна призовій комбінації (1, 1, 1, 1, 2). Нехай на кожному барабані містяться 100 комірок, з яких Wild – одна, «1» – п'ять, «2» – 9, «3» – 15, «4» – 30, «5» – 40, тоді імовірність випадання на одному барабані p(Wild)=0,01; p(1)=0,05; p(2)=0,09; p(3)=0,15; p(4)=0,3; p(5)=0,4. Нехай матриця виплат виглядає $M_V = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 38 & 30 & 22 & 13 & 9 \\ 152 & 120 & 88 & 53 & 33 \end{pmatrix}$.

Нехай виконано обертання барабанів. Обчислимо ймовірності появи рівно трьох однакових символів «1» підряд, починаючи з першого, це може бути

1) три одинички, четверта не «1» і не «Wild», п'ята – будь-яка;

2) дві одинички і «Wild» (у будь-якому порядку), четверта не «1» і не «Wild», п'ята – будь-яка, таких варіантів $C_3^1 = 3$;

3) одна одиничка і два «Wild» (у будь-якому порядку), четверта не «1» і не «Wild», п'ята – будь-яка, таких варіантів $C_3^1 = 3$;

Зауважимо, що варіант – три «Wild», четверта «*», п'ята – будь-яка, що не дорівнює четвертій і «Wild», відповідає чотирьом «*».

Отримаємо для усіх трійок:

$$p_{1,1,1} = 0{,}05^3 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) \cdot 1 + \\ + 3 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}01^2 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) \cdot 1 = 0{,}0002021;$$

$$p_{2,2,2} = 0{,}09^3 \cdot (1 - 0{,}09 - 0{,}01) \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}09^2 \cdot 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}09 - 0{,}01) \cdot 1 + \\ + 3 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}01^2 \cdot (1 - 0{,}09 - 0{,}01) \cdot 1 = 0{,}0008991;$$

Аналогічно, $p_{3,3,3} = 0{,}0034398; p_{4,4,4} = 0{,}0205551; p_{5,5,5} = 0{,}0406628.$

Оцінимо можливості появи рівно чотирьох однакових символів «1» підряд, починаючи з першого, це може бути:

1) чотири одинички, п'ята не «1» і не «Wild»;

2) три одинички і «Wild» (у будь-якому порядку), п'ята не «1» і не «Wild», таких варіантів $C_4^1 = 4$;

3) дві одинички і два «Wild» (у будь-якому порядку), п'ята не «1» і не «Wild», таких варіантів $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$;

4) одна одиничка і три «Wild», п'ята не «1» і не «Wild», варіантів $C_4^1 = 4$;

Варіант: чотири «Wild», п'ята «*» (чи «Wild»), цей варіант оплачується як п'ять «*» (чи п'ять найдорожчих «1» по замовчуванню).

Отримаємо для усіх четвірок:

$$p_{1,1,1,1} = 0{,}05^4 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) + 4 \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) + \\ + 6 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}01^2 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) + 4 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}01^3 \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}01) = 0{,}000012173\ ;$$

$$p_{2,2,2,2} = 0{,}09^4 \cdot (1-0{,}09-0{,}01) + 4 \cdot 0{,}09^3 \cdot 0{,}01 \cdot (1-0{,}09-0{,}01) +$$
$$+ 6 \cdot 0{,}09^2 \cdot 0{,}01^2 \cdot (1-0{,}09-0{,}01) + 4 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}01^3 \cdot (1-0{,}09-0{,}01) = 0{,}000089991;$$

Аналогічні до останнього обчислення і для символів «3», «4» і «5».

Оцінимо можливості появи рівно п'яти однакових символів «1» підряд, починаючи з першого, це може бути:

1) п'ять «1»;

2) чотири «1» і «Wild» (у будь-якому порядку), варіантів $C_5^1 = 5$;

3) три «1» і два «Wild» (у будь-якому порядку), варіантів $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$;

4) дві «1» і три «Wild» (у будь-якому порядку), варіантів $C_5^3 = 10$;

5) одна «1» і чотири «Wild» (у будь-якому порядку), варіантів $C_5^1 = 5$;

6) п'ять «Wild». Цей варіант можливий *тільки* для найдорожчої «1» по замовчуванню.

$$p_{1,1,1,1,1} = 0{,}05^5 + 5 \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}01 + 10 \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}01^2 + 10 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}01^3 +$$
$$+ 5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}01^4 + 0{,}01^5 = 0{,}0000007776;$$

Зауважимо, що оскільки p(Wild)=0,01; p(1)=0,05, то імовірність випадання п'яти символів або «1» або «Wild»: $p_{1,1,1,1,1} = (0{,}01 + 0{,}05)^5 = 0{,}06^5 = 0{,}0000007776$, маємо той самий результат. Для п'яти інших символів маємо тільки п'ять доданків (без пункту 6):

$$p_{2,2,2,2,2} = 0{,}09^5 + 5 \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}01 + 10 \cdot 0{,}09^3 \cdot 0{,}01^2 + 10 \cdot 0{,}09^2 \cdot 0{,}01^3 +$$
$$+ 5 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}01^4 = 0{,}0000099999 .$$

Або $p_{2,2,2,2,2} = (0{,}09 + 0{,}01)^5 - 0{,}01^5 = 0{,}0000099999$ (віднято варіант п'яти «Wild»).

Аналогічні до останнього обчислення і для символів «3», «4» і «5».

Матриця ймовірностей має вигляд:

$$M_p = \begin{pmatrix} 0{,}0002021000 & 0{,}0008991000 & 0{,}0034398000 & 0{,}020555100 & 0{,}040662800 \\ 0{,}0000121730 & 0{,}0000899910 & 0{,}0005504940 & 0{,}006372288 & 0{,}016671984 \\ 0{,}0000007776 & 0{,}0000099999 & 0{,}0001048575 & 0{,}002862915 & 0{,}011585620 \end{pmatrix}.$$

Сума добутків усіх відповідних елементів матриць M_V і M_p дає сумарний виграш 9 610 688 702 при вкладених 10 млрд., віддача слота RTP≈96,11%.

Зауважимо, що можна задати розподіл символів та довжину барабану для кожного барабану окремо (ми ж вибрали п'ять символів так, що частота появи кожного символу на кожному барабані була однакова; довжина кожного барабану у нас теж була однаковою і дорівнювала ста елементам). За таких обставин модель зможе працювати з різного вигляду барабанами. Ці незначні зміни легко програмуються і обчислюється відповідно теоретичний відсоток повернення гри RTP.

Розрахувавши RTP та оцінивши вигідність гри для конкретного розподілу символів на кожному барабані, казино може легко підлаштувати матрицю виплат (або змінивши розподіл символів) так, щоб гра була прибутковою для казино. Зауважимо, що матриця виплат, як правило, заманює гравця великими виплатами, а тому коригування, зазвичай, відбуваються за рахунок невидимого гравцю розподілу символів. У кінцевому рахунку (статистично) гравець втрачає гроші кожну ставку. Усі ігри в казино, в тому числі слоти, невигідні для гравця. Відсоток виплат в них завжди нижчий за 100%, і вигода залишається на боці казино.