УДК 519.53+517.987

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТРАНСЛЯЦИОННОГО СУММИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР

В.А. Романов

Для простору мір скінченної повної варіації, визначених на сигма-алгебрі борелевських підмножин топологічного векторного простору, введено та досліджено поняття лінійного оператора трансляційного підсумовування.

For the space of the measures of finite complete variation defined on sigma-algebra of Borel subsets of a topological vector space the notion of linear operator of translational summation is defined and is investigated.

1. Введение. Известно, что в задачах для мер, заданных в топологическом векторном пространстве, весьма часто применяются операторы сдвига [1, с. 137], называемые также трансляционными операторами. Именно на пути исследования таких операторов можно прийти к классам нашедших широкие применения мер, в том числе дифференцируемых, квазиинвариантных, непрерывных и аналитических. Важно также отметить, что в задачах функционального анализа имеет значение исследование операторных сумм, а также применение операции предельного перехода к таким суммам. На этом пути возникает как понятие оператора трансляционного суммирования, так и необходимость исследования его свойств.

2. Постановка задачи. Пусть X – топологическое векторное пространство, M(X) – нормированное пространство вещественных мер конечной полной вариации, определенных на сигма-алгебре борелевских множеств из X, причем норму каждой такой меры задаём как её полную вариацию.

Для каждой меры m из M(X) и каждого вектора x из X определена сдвинутая мера m_x, значение которой на произвольном борелевском множестве B из X равно m (B +x).

Пусть (x(к)) – последовательность попарно различных векторов из X, (p(к)) – суммируемая последовательность положительных чисел.

Определение 1. *Оператором трансляционного суммирования с последовательностью весовых коэффициентов p(к) и с последовательностью* *транслирующих векторов x(к)* называется оператор A, значение которого на каждой мере m из M(X) задается формулой

$$A(m) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) m_{x(k)}.$$

Заметим, что ряд в правой части этой формулы сходится по вариации. Поскольку во многих задачах функционального анализа, в том числе в задачах для бесконечномерных распределений, бывает весьма полезным переход от рассмотрения функций множества к изучению функций точки, осуществить который помогают меры с свойством базисности [2], то представляет интерес ещё один класс операторов.

Определение 2. Оператор A, действующий в пространстве M(X), называется *оператором с базисным свойством*, если для каждой неотрицательной нетривиальной меры m из M(X) её образ A(m) относительно A имеет базисное свойство, то есть если для каждого банахова пространства У и каждой векторной меры Ф конечной полной вариации, определённой на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X и принимающей значения в пространстве У, векторную меру Ф можно задать как предел некоторой слабо сходящейся последовательности векторных мер, имеющих A(m) своим базисом, то есть представимых как произведения интегрируемых по Бохнеру векторных функций на меру A(m).

Цель статьи состоит в исследовании операторов трансляционного суммирования, в том числе в установлении критерия наличия у таких операторов базисного свойства.

3. Результаты работы.

Теорема 1. *Пусть A – оператор трансляционного суммирования, действующий в пространстве M(X). Тогда норма оператора A равна сумме ряда, составленного из его весовых коэффициентов.*

Доказательство. Пусть (р(к)) – последовательность весовых коэффициентов, а (х(к)) – последовательность транслирующих векторов оператора A.

Рассматривая верхнюю грань норм образов A(m) по множеству таких мер m из M(X), для которых $Var\, m \le 1$ и учитывая равенство полных вариаций сдвинутых мер $m_{x(k)}$ полной вариации самой меры m, получаем, что

$\|A\|$ = sup Var ($\sum_{k=1}^{\infty} p(k) m_{x(k)}$)$\le$ $\sum_{k=1}^{\infty} p(k)$.

Чтобы для нормы оператора A получить противоположное неравенство, воспользуемся тем, что норма оператора не меньше нормы образа меры Дирака, сосредоточенной в точке 0, а потому не меньше суммы ряда, составленного из весовых коэффициентов. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть X – такое метризуемое топологическое векторное пространство, что существует неотрицательная мера m из M(X), которая имеет базисное свойство. Тогда пространство X сепарабельно.*

Доказательство. Как следует из рассуждений, приведённых при доказательстве теоремы 1 работы [2], значение меры m на каждом открытом шаре пространства X положительно.

Зафиксируем натуральное число к. Рассмотрим множество всех таких подмножеств E пространства X, что расстояние между каждыми двумя различными точками из E не меньше 2/к. Это множество частично упорядочено по включению, причём каждая цепь имеет мажоранту (в качестве которой можно взять объединение всех элементов цепи). Поэтому можно применить лемму Цорна, согласно которой существует максимальный элемент. Обозначим его через $E_к$. Тогда семейство открытых шаров радиуса 1/к, центры которых пробегают множество $E_к$, представляет собой семейство попарно непересекающихся множеств положительной меры. Поскольку мера m конечна, то упомянутое семейство шаров, а вместе с ним и множество $E_к$, не более чем счётное. Но тогда и объединение T всех множеств $E_к$ (по всем натуральным к) не более чем счётное. Вместе с тем объединение всех шаров радиуса 2/к, центры которых пробегают $E_к$, совпадает с X (что следует из максимальности элемента $E_к$). Поэтому объединение всех шаров того же радиуса, центры которых пробегают T, тем более совпадает с X. Следовательно, множество T всюду плотно в X. Таким образом, в X нашлось всюду плотное счётное множество. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Для несепарабельных метризуемых пространств X никакой оператор трансляционного суммирования не может иметь базисного свойства.*

Лемма 1. *Пусть X – полное сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство, m – неотрицательная дискретная мера из M(X), сосредоточенная на счётном множестве E. Тогда m имеет свойство базисности тогда и только тогда, когда множество E всюду плотное.*

Доказательство. Согласно теореме 1 работы [2], свойство базисности меры эквивалентно тому, что значение меры на каждом открытом шаре пространства X положительно, что равносильно тому, что все такие шары имеют непустые пересечения с множеством E, что в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда E всюду плотное, откуда и вытекает утверждение леммы 1.

Теорема 3. *Пусть A – оператор трансляционного суммирования, действующий в пространстве M(X) мер конечной полной вариации, заданных на системе борелевских подмножеств полного метризуемого топологического векторного пространства X. Тогда для того чтобы A имел базисное свойство, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие два условия:*

1) Пространство X сепарабельно,

2) Последовательность транслирующих векторов x(к) оператора A всюду плотна в X.

Доказательство. Необходимость первого условия имеет место на основании следствия 1 теоремы 2.

Чтобы доказать необходимость второго условия, рассмотрим образ относительно A меры Дирака, сосредоточенной в нуле. Этот образ представляет собой дискретную меру, сосредоточенную на множестве E, состоящем из точек (-x(к)). Если A имеет базисное свойство, то в соответствии с леммой 1 множество E должно быть всюду плотным. Но тогда множество (-E), состоящее из точек x(к), также всюду плотное. Необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Пусть оба условия выполняются. Рассмотрим произвольную неотрицательную нетривиальную меру m из M(X).

Пусть B – произвольный открытый шар пространства X. Рассмотрим произвольную точку x из X. Множество B-x – тоже открытый шар, а потому содержит некоторый элемент (-x(к)) из всюду плотного множества. Тогда точка x принадлежит шару B+x(к). Следовательно, объединение счётного семейства шаров B+x(к) совпадает со всем X, а потому значение меры m хотя бы на одном из этих шаров должно быть положительным. Но тогда из определения оператора трансляционного суммирования следует, что A(m) принимает положительное значение на исходном шаре B. В соответствии с теоремой 1 работы [2], мера A(m), принимающая положительные значения на всех открытых шарах, имеет базисное свойство, чем завершается доказательство теоремы 3.

ПОСИЛАННЯ

[1] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. (1971), Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах, Труды ММО. 24, 133-174.
[2] Романов В.А. Слабые базисы векторных мер (2007), УМЖ. 59, № 10, 1436-1440.