Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

В.В. Вдовенко

ПРАКТИКУМ ЗІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

(ЧАСТИНА 2)

Навчально-методичний посібник

Кіровоград, 2013

ББК 22.1
В 25

УДК 51

Вдовенко В.В.
В 25
Практикум зі шкільного курсу математики: Навчально-методичний посібник. – Частина 2. – Кіровоград: ПП «Центр оперативної поліграфії» Авангард», 2013. – 82 с.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І. Волков;
кандидат педагогічних наук, доцент В.В. Постолатій

В посібнику дається система вправ на вироблення навичок, необхідних для розв'язування завдань зі шкільного курсу математики. На початку кожної теми розміщено основні теоретичні відомості, а також розглядаються різні способи розв’язування основних типів задач. Далі дається система вправ, розташована в порядку зростання складності. Різноманітний набір вправ дає можливість використовувати цей посібник для самостійної роботи.

Посібник буде корисним студентам фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, а також учителям та учням старших класів загальноосвітніх шкіл.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 20.02.2013 (протокол № 5).

ББК 22.1
УДК 51

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ПОКАЗНИКОВІ, ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

1.1. Показникові рівняння та основні методи їх розв'язування

Показниковим рівнянням називається рівняння, в якому невідома входить в показник степеня.

При розв’язуванні показникових рівнянь потрібно намагатися звести початкове рівняння до вигляду $a^{f(x)} = b$.

Основні методи розв’язування показникових рівнянь

I. Найпростіші показникові рівняння, тобто це рівняння виду $a^{f(x)} = b$. З цієї рівності випливає: $f(x) = \log_a b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Приклади.

1. $4^x = 5 \Rightarrow x = \log_4 5$.

2. $2^x = -3 \Rightarrow$ розв’язків не має, оскільки $b = -3 < 0$.

II. Метод зведення до спільної основи

Цей метод грунтується на основі наступної властивості степенів: якщо два степеневих вирази з рівними основами рівні, то їх показники також будуть рівними. Таким чином, рівняння потрібно намагатися звести до вигляду $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$, звідки $f_1(x) = f_2(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Приклад 1. Розв’язати показникове рівняння $\left(2^{x-3}\right)^{x+4} = 0{,}5^x \cdot 4^{x-4}$.

Очевидно, що степені у заданому рівнянні можна звести до степенів з основою 2. Перепишемо рівняння у вигляді

$2^{(x-3)(x+4)} = 2^{-x} \cdot 2^{2(x-4)}$, тобто $2^{x^2+x-12} = 2^{x-8}$.

Звідки отримаємо $x^2 + x - 12 = x - 8$, $\Rightarrow x^2 = 4$, $\Rightarrow x = \pm 2$.

Відповідь: ± 2.

Приклад 2. Розв’язати показникове рівняння $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-1+2} = 117$, тоді

$4\cdot 3^{x-1}+3^{x-1}\cdot 3^2=117$. Винесемо спільний множник 3^{x-1} за дужки і отримаємо: $3^{x-1}(4+9)=117$, звідки $3^{x-1}\cdot 13=117$, тоді $3^{x-1}=9$. Таким чином, $x-1=2, \Rightarrow x=3$.

Відповідь: 3.

III. Метод підстановки

Приклад 3. Розв'язати показникове рівняння $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

Зробимо заміну змінної $t=2^x$. Помітивши, що $4^x=\left(2^x\right)^2=t^2$. Тому задане рівняння приймає вигляд $t^2-5t+4=0$. Знайдемо розв'язки цього квадратного рівняння: t_1=1, t_2=4. Розв'язуючи рівняння $2^x=1$ та $2^x=4$, отримаємо x_1=0, x_2=2.

Відповідь: 0; 2.

Приклад 4. Розв'язати показникове рівняння $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-2{,}5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=6$.

Введемо заміну: $a=2^{x+\sqrt{x^2-2}}$, тоді задане рівняння буде мати вигляд: $a^2-2{,}5a-6=0$, звідки a_1=4, a_2<0. Тоді маємо: $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$, звідки

$$x+\sqrt{x^2-2}=2,$$
$$\sqrt{x^2-2}=2-x,$$
$$x^2-2=4-4x+x^2,$$

$4x=6, \Rightarrow x=1{,}5$

Відповідь: 1,5.

Приклад 5. Розв'язати показникове рівняння $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$.

Рівняння **однорідне**, адже його можна записати як $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^x+6\cdot 3^{2x}=0$.

Розділимо обидві частини рівняння на $2^{2x}\neq 0$, отримаємо

$$6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0.$$

Позначимо $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$, $t>0$. Маємо $6t^2-13t+6=0,\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}$, або $t_2=\frac{2}{3}$.

Отримаємо два рівняння: $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}$, або $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}$. Знайдемо $x_1=1$, $x_2=-1$.

Відповідь: $x_1 = 1,\ \ x_2 = -1.$

Приклад 6*. Розв’язати рівняння $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$.

Оскільки $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \dfrac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}$, то можна ввести заміну $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = t$ і задане рівняння буде мати вигляд: $t + \dfrac{1}{t} = 10$.

Досить легко отримати корені цього рівняння $t_1 = 5+\sqrt{24},\ \ t_2 = 5-\sqrt{24}$. Підставивши отримані значення в формулу заміни, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 5+\sqrt{24}, \\ \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 5-\sqrt{24}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(5+\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(5+\sqrt{24}\right)^1, \\ \left(5+\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(5+\sqrt{24}\right)^{-1}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -2. \end{array}\right.$$

Відповідь: ±2.

IV. Метод групування

Приклад 7. Розв’язати рівняння $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} = 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

Перетворимо члени рівняння $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^x\cdot 81 = 6\cdot 4^x\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 9^x\cdot 9$.

Тепер перегрупуємо доданки $3\cdot 4^x - 24\cdot 4^x = -\frac{9}{2}\cdot 9^x - 27\cdot 9^x$, тобто $4^x(3-24) = 9^x\left(-\frac{9}{2}-27\right), \Rightarrow 21\cdot 4^x = \frac{63}{2}\cdot 9^x$.

Запишемо цю рівність у вигляді пропорції

$\dfrac{4^x}{9^x} = \dfrac{63}{2\cdot 21}, \Rightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \dfrac{3}{2}, \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$. Звідси $2x = -1$, $x = -0{,}5$.

Відповідь: – 0,5.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

1. $6^{2x+4} = 2^{x+8}\cdot 3^{3x}$;

2. $5^{x+1} + 5^{x-1} = 26$;

3. $3^{x^2} + 3^{x^2+1} + 3^{x^2+2} = 13\cdot 3^{x+2}$;

4. $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} = 0$;

5. $7^{2x}-6\cdot 7^{x}+5=0$;

6. $\dfrac{5}{3^{x}-2}-\dfrac{4}{3^{x}-1}=3$;

7. $2\cdot 25^{x}-5\cdot 10^{x}+2\cdot 4^{x}=0$;

8. $27^{\frac{2}{x}}+2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}}-27=0$;

9. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=4$;

10. $10^{\sin^2 x}+10^{\cos^2 x}=11$;

11. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}=14$;

12. $64^{tg^2 x}+8=9\cdot 8^{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$.

1.2. Показникові нерівності

За допомогою методів розв’язування показникових рівнянь показникову нерівність можна звести до найпростішого вигляду $a^{f(x)}>b$ (або $a^{f(x)}<b$). Отриману нерівність можна записати у вигляді $a^{f(x)}>a^{\log_a b}$ та зробити висновки:

1. якщо $a>1$, то $f(x)>\log_a b$, розв’язуємо цю нерівність;

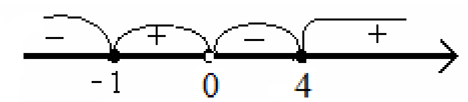
2. якщо $0<a<1$, то $f(x)<\log_a b$, розв’язуємо цю нерівність.

Приклад 1. Розв’язати показникову нерівність: $(0,5)^{\frac{x^2-4}{x}}\ge 0,125$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді: $(0,5)^{\frac{x^2-4}{x}}\ge (0,5)^3$.

Оскільки 0< 0,5 < 1, тому

$\dfrac{x^2-4}{x}\le 3,\Leftrightarrow\ \dfrac{x^2-4-3x}{x}\le 0,\Leftrightarrow\ \dfrac{x^2-3x-4}{x}\le 0$, звідки $\dfrac{(x-4)(x+1)}{x}\le 0$



Відповідь : $x\in(-\infty;-1]\cup(0;4]$.

Приклад 2. Розв’язати показникову нерівність: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}}<3^{-x}$.

Зведемо до спільної основи та виконаємо рівносильні перетворення:

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\Leftrightarrow\sqrt{x+3}>x,\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>0,\\ x>0,\\ x+3>x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3>0,\\ x<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right),\end{cases}\\ x\in(-3;0)\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-3;0)\cup\left(0;\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Відповідь: $x\in(-3;0)\cup\left(0;\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(\sin 2)^{x^2-x}\ge\sin^2 2$.

Оскільки $0 < \sin 2 < 1$ (адже $\dfrac{\pi}{2}<2<\pi$), то задана нерівність буде рівносильна нерівності $x^2-x\le 2$. Звідки $x\in[-1;\,2]$.

Відповідь: $x\in[-1;\,2]$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $9^x-3^x\ge 6$.

Введемо нову змінну: $3^x=t$ $(t > 0)$, отримаємо допоміжну нерівність $t^2-t-6\ge 0$, розв'язком якої буде проміжок $t\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. Враховуючи, що $t > 0$, маємо: $t\ge 3$, звідки $3^x\ge 3$, $x\ge 1$.

Відповідь: $x\in[1;+\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $2^x\cdot x-2^{x+2}-4x+16\ge 0$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді $2^x\cdot x-2^x\cdot 2^2-4x+16\ge 0$ та згрупуємо доданки $2^x\cdot(x-4)-4\cdot(x-4)\ge 0$, $\Leftrightarrow$ $(2^x-4)(x-4)\ge 0$.

Остання нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-4\ge 0,\\ x-4\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}2^x-4\le 0,\\ x-4\le 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x\ge 4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x\ge 4,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le 2,\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,2]\cup[4;\,+\infty).$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\,2]\cup[4;\,+\infty)$.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівності:

1. $(0{,}6)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}}\le 1$; **2.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+4x-1}\ge 9^{2x-4}$;

3. $2^{x-1}+2^{x-2}-3\cdot 2^{x-3}\ge 3\cdot 4^{\frac{2}{x}}$;

4. $4^{x}-6\cdot 2^{x}+8\ge 0$;

5. $0{,}25^{x}-12\cdot 0{,}5^{x}+32\ge 0$;

6. $3^{2x^2-x+2}-5^{2x^2-x-1}>5^{2x^2-x+1}+3^{2x^2-x-1}$;

7. $3^{x}\cdot x-3^{x+2}-3x+27\le 0$;

8. $8^{x}+18^{x}-2\cdot 27^{x}>0$;

9. $(2^{x}-8)(x^2-4x+3)>0$;

10. $10^{x}-8\cdot 5^{x}-5\cdot 2^{x}+40\ge 0$;

11. $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\le 1$**;**

12. $(2{,}5)^{3\sqrt{x}+1}\ge\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{x}-1}$**;**

13. $5^{|x+2|}<\frac{1}{5}$**;**

14. $2^{|x+2|}>16$**;**

15. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{x^2-3}{x}}\ge\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2}$;

16. $(\cos 5)^{3x-x^2}\le\cos^2 5$.

1.3. Логарифмічні рівняння, основні методи їх розв'язування

Логарифмом числа b $(b>0)$ за основою a $(a>0,\ a\neq 1)$ називають такий показник степеня x, до якого потрібно піднести число a, щоб вийшло число b, тобто з рівності $a^{x}=b$ слідує $x=\log_a b$ і навпаки.

Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b}=b$.

Основні властивості логарифмів:

1. $\log_a a=1$;

2. $\log_a 1=0$;

3. $\log_a(x_1x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|$;

4. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|$**;**

5. $\log_a x^{n}=n\cdot\log_a x$**;**

6. $\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\cdot\log_a x,\quad (n\neq 0)$**;**

7. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$**;**

8. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad (c>0,\ c\neq 1)$**;**

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, в якому невідома міститься під знаком логарифму. Шляхом тотожних перетворень логарифмічні рівняння зводять до таких основних типів:

1. $\begin{cases} \log_a f(x) = b, \\ 0 < a \neq 1, b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^b, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0; \end{cases}$ **– операція потенціювання**

3. $\log_{\varphi(x)} f_1(x) = \log_{\varphi(x)} f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ 0 < \varphi(x) \neq 1, \\ f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0. \end{cases}$

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь

I. За означенням логарифму

Зазвичай цей метод використовують при розв'язуванні найпростіших рівнянь виду $\log_a f(x) = b$.

Приклад 1. Розв’язати рівняння $\log_3 x(x-2) = 1$. За означенням логарифму $x(x-2) = 3$, звідки $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Перевіркою встановлюємо, що обидва кореня задовольняють заданому рівнянню.

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$.

За означенням логарифма, $5 + 4\log_3(x-1) = 3^2$,

або $4\log_3(x-1) = 9 - 5$, $\Leftrightarrow$ $\log_3(x-1) = 1$.

За означенням логарифма маємо $x - 1 = 3$, $x = 4$.

Перевіркою переконуємося в правильності розв'язування.

Відповідь: $x = 4$.

II. Метод потенціювання

Суть методу в наступному: за допомогою формул задане рівняння необхідно звести до вигляду $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$.

Це рівняння при $0 < a \neq 1$ рівносильне системі $\begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$.

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1>0, \end{cases} \Rightarrow \ x\in(1;+\infty).$

Перепишемо задане рівняння у вигляді: $\log_2\dfrac{x+1}{x-1}=\log_2 2$, $\Rightarrow \ \dfrac{x+1}{x-1}=2$.

Звідки $\dfrac{x+1-2(x-1)}{x-1}=0, \ \Leftrightarrow \dfrac{-x+3}{x-1}=0, \ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Знайдений корінь входить в ОДЗ.

Відповідь: x = 3.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$.

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4x-5>0, \\ 7-3x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty), \\ x<\dfrac{7}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \ x\in(-\infty;-1).$

Дане рівняння буде рівносильне рівнянню: $x^2-4x-5=7-3x$, звідки $x^2-x-12=0$, x_1 = – 3, x_2 = 4 – сторонній корінь, не задовольняє ОДЗ.

Відповідь: x = – 3.

III. Метод підстановки

Звичайно заміну (підстановку) використовують після деяких перетворень заданого рівняння.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1$.

ОДЗ: $x > 0$, $\lg x \neq 6$, $\lg x \neq -2$.

Введемо заміну $\lg x=t$. Тоді задане рівняння набуде вигляду: $\dfrac{1}{t-6}+\dfrac{5}{t+2}=1$.

Звідки $\dfrac{t+2+5(t-6)-(t+2)(t-6)}{(t+2)(t-6)}=0$, і далі $\begin{cases} t^2-10t+16=0, \\ t\neq 6, \ t\neq -2, \end{cases}$ тоді t_1 = 8, t_2 = 2.

Повертаючись до заміни, отримаємо сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l} \lg x=8, \\ \lg x=2, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=10^8, \\ x_2=10^2. \end{array}\right.$

Обидва кореня задовольняють ОДЗ.

Відповідь: $x_1=10^8$, $x_2=10^2$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння $\log_3(\log^2_{0,5}x-3\log_{0,5}x+5)-2=0$.

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}\log^2_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5 > 0,\\ x > 0.\end{cases}$

Можна пересвідчитися, що перша нерівність дійсна при будь-яких значеннях x, бо відповідне рівняння $t^2 - 3t + 5 = 0$ має від'ємний дискримінант. Отже ОДЗ: $x > 0$.

$\log_3\left(\log^2_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5\right) = 2, \Rightarrow \log^2_{0,5} x - 3\log_{0,5} x + 5 = 3^2, \Leftrightarrow \log^2_{0,5} x - 3\log_{0,5} x - 4 = 0$.

Введемо заміну $t = \log_{0,5} x$ і отримаємо рівняння: $t^2 - 3t - 4 = 0$, коренями якого будуть числа $t_1 = 4$, $t_2 = –1$. Тоді $\log_{0,5} x = 4$ або $\log_{0,5} x = -1$, звідки $x_1 = 1/16$, $x_2 = 2$.

Відповідь: $x_1 = 1/16$, $x_2 = 2$.

IV. Метод зведення до спільної основи

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\lg x \log_2 x = \lg 2$.

ОДЗ: $x > 0$.

Перейдемо до десяткових логарифмів (використаємо формулу 8):

$\lg x \dfrac{\lg x}{\lg 2} = \lg 2$, звідки $\lg^2 x = \lg^2 2, \;\Leftrightarrow\; \lg x = \pm \lg 2, \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = \lg 2,\\ \lg x = \lg 2^{-1},\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x_1 = 2,\\ x_2 = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Відповідь: x_1=2, x_2=0,5.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 - 1 = 0$.

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}x + 12 > 0,\\ x > 0, x \neq 1.\end{cases}$ Звідки маємо: $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Перейдемо до основи 4.

$\log_4(x+12)\cdot\dfrac{\log_4 2}{\log_4 x} - 1 = 0, \Leftrightarrow \dfrac{\log_4(x+12)}{2\log_4 x} = 1,$

$\log_x(x+12) = 2,$

$x^2 = x + 12, \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -3$

Проте другий корінь $x = – 3$ не входить в ОДЗ.

Відповідь: $x = 4$.

V. Рівняння, що містять невідоме і в основі, і в показнику степеня

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^{1+\lg x}=100$.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

Прологарифмуємо обидві частини заданого рівняння за основою 10

$\lg x^{1+\lg x}=\lg 100,\ (1+\lg x)\lg x=2,\ \lg^2 x+\lg x-2=0,$ звідки

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=-2,\\ \lg x=1,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_1=0{,}01,\\ x_2=10.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=0{,}01;\ x_2=10$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

Виконаємо перетворення: $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162$,

$x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162,\ \Leftrightarrow\ x^{\log_3 x}=81$.

Прологарифмуємо обидві частини останнього рівняння за основою 3:

$$\log_3\left(x^{\log_3 x}\right)=\log_3 81,\ \Leftrightarrow\ \log_3^2 x=4,\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2,\\ \log_3 x=-2,\end{array}\right. \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x_1=9,\\ x_2=\dfrac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=9,\ x_2=\dfrac{1}{9}$.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати рівняння:

1. $\log_{12}\left(x^2+5x+6\right)=1$;

2. $\log_5(7x+4)-\log_5(2x-1)=1$;

3. $\dfrac{1}{1-\log_2 x}+\dfrac{1}{2+\log_2 x}=\dfrac{3}{2}$;

4. $\lg\dfrac{x+6}{\sqrt{2x+3}}=\lg 4$;

5. $1+\log_2(x+5)=\log_2(3x-1)+\log_2(x-1)$;

6. $\log_{x+3}\left(x^2-x\right)=1$;

7. $x^{\log_2 x+2}=8$;

8. $3^{\log_3\left(x^2-5x-6\right)}=-4x$;

9. $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$;

10. $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$;

11. $\lg(\lg x)+\lg\left(\lg x^3-2\right)=0$;

12. $\log_3(27x)=10\log_x 3$;

13. $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$;

14. $\log_{\frac{2x-1}{x+2}} 3-1=0$;

15. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

16 $\log_7\log_3\log_2\log_2 x=0$.

1.4. Логарифмічні нерівності

За допомогою методів розв’язування логарифмічних рівнянь логарифмічну нерівність можна звести до одного з таких типів:

1. $\begin{cases} \log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) < f_2(x), \\ f_1(x) > 0, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_a f_1(x) > \log_a f_2(x), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) > f_2(x), \\ f_2(x) > 0, \\ a > 1; \end{cases}$

3. $\log_{\varphi(x)} f_1(x) > \log_{\varphi(x)} f_2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f_1(x) > 0, \\ f_1(x) < f_2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f_2(x) > 0, \\ f_1(x) > f_2(x). \end{cases} \end{array} \right.$

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) \le 1$.

Перепишемо дану нерівність у вигляді: $\log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) \le \log_8 8$.

Ця нерівність буде рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty), \\ x \in [-1;5]. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;1) \cup (3;5].$$

Відповідь: $x \in [-1;1) \cup (3;5]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 + 4x}{2x - 3} > 1$.

Дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 4x}{2x - 3} > 0, \\ \dfrac{x^2 + 4x}{2x - 3} < \dfrac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4;\, 0) \cup \left(\dfrac{3}{2};\, +\infty\right), \\ x \in (-\infty;\, -3) \cup \left(-\dfrac{1}{3};\, \dfrac{3}{2}\right), \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;\, -3) \cup \left(-\dfrac{1}{3};\, 0\right).$$

Відповідь: $x \in (-4;\, -3) \cup \left(-\dfrac{1}{3};\, 0\right)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.

Відразу відмітимо, що $x > 0$. Позначимо $\log_{0,5} x = t$. Тоді отримаємо нерівність: $t^2+t-2\le 0$, $(t+2)(t-1)\le 0$, звідки $-2\le t\le 1$. Повернемося до заміни: $-2\le \log_{0,5}x\le 1$, $\Rightarrow$ $\log_{0,5}4\le \log_{0,5}x\le \log_{0,5}0,5$, $\Rightarrow$ $0,5\le x\le 4$.

Відповідь: $x\in[0,5;\,4]$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{0,4}x+\log_{0,4}(x-1)\ge \log_{0,4}(x+3)$.

Оскільки підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, то задана нерівність буде рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x>0, \\ x-1>0, \\ x+3>0, \\ x(x-1)\le x+3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x\in[-1;\,3], \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;\ 3].$$

Відповідь: $x\in(1;\ 3]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}<0$.

$$\log_{0,5}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}<\log_{0,5}1; \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}>0, \\ \log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}>1, \end{cases} \Leftrightarrow \log_8\frac{x^2-2x}{x-3}>\log_8 8, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-3}>0, \\ \dfrac{x^2-2x}{x-3}>8, \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3;4)\cup(6;+\infty).$$

Відповідь: $x\in(3;4)\cup(6;+\infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $5^{\log_x\frac{8-12x}{x-6}}>25$.

Задана нерівність буде рівносильна нерівності $\log_x\dfrac{8-12x}{x-6}>2,$ де $\dfrac{2}{3}<x<6.$

При $x>1$ маємо $\dfrac{8-12x}{x-6}>x^2, \Leftrightarrow \dfrac{8-12x-x^3+6x^2}{x-6}>0, \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^3}{x-6}<0,$ звідки $x\in(2;\,6)$.

При $\dfrac{2}{3}<x<1$ маємо $\dfrac{8-12x}{x-6}<x^2, \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^3}{x-6}>0,$ звідки $x<2$.

Таким чином $\dfrac{2}{3}<x<1$, $2<x<6$.

Відповідь: $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(2;\,6)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$.

Дана нерівність рівносильна сукупності систем :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>1,\\2x-3>0,\\24-6x>0,\\2x-3>24-6x;\end{cases}\\\begin{cases}0<x-2<1,\\2x-3>0,\\24-6x>0,\\2x-3<24-6x.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3,\\x>1.5,\\x<4,\\x>\dfrac{27}{8};\end{cases}\\\begin{cases}2<x<3,\\x>1.5,\\x<4,\\x<\dfrac{27}{8.}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\left(\dfrac{27}{8};4\right),\\x\in(2;3).\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(2;3)\cup\left(\dfrac{27}{8};4\right).$$

Відповідь: $x\in(2;3)\cup\left(\dfrac{27}{8};4\right)$.

Завдання для самостійної роботи:

Розв'язати нерівності:

1. $\log_{0,3}\dfrac{1+2x}{1+x}>1$;

2. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\le-1$;

3. $\log_4\left(x^2-6x+8\right)\ge0,5$;

4. $\log_2 x+\log_2(x-1)\le1$;

5. $\log_3^2 x-3\log_3 x>-2$;

6. $\log_2\dfrac{4}{x+3}>\log_2(2-x)$;

7. $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_9(x-1)>0$;

8. $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{x-1}{2-x}>-1$;

9. $\lg^2 100x-5\lg x\ge6$;

10. $\dfrac{1}{1+\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>2$;

11. $\log_x\left(x^2-2x-3\right)>0$;

12. $\log_{x^2+3x}(x+3)\le1$.

Завдання для самоперевірки

1. Розв’язати показникові та логарифмічні рівняння:

а) $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$ (відп.: 0 та 0,5);

б) $3\cdot4^x+\dfrac{1}{3}\cdot9^{x+2}=6\cdot4^{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot9^{x+1}$ (відп.: – 0,5);

в) $4^{tg^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}-80=0$ (відп.: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\, n\in Z$);

г) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$ (відп.: x = 2);

д) $\lg(x+10)+0{,}5\lg x^2=2-\lg 4$ (відп.: $-5+5\sqrt{2}$ та 5);

е) $\log_3\left(4\cdot 3^{x-1}-1\right)=2x-1$ (відп.: 0;1);

є) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$ (відп.: 1/6 та 6);

ж) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$ (відп.: 64).

2. Розв’язати показникові та логарифмічні нерівності:

а) $2^{x+3}+3\cdot 5^{x-1}<7\cdot 2^{x-2}+5^x$ (відп.: $x\in(3;+\infty)$);

б) $\frac{25^x-3\cdot 5^x-10}{x^2+5x-6}\le 0$ (відп.: $x\in(-\infty;-6)$);

в) $0{,}008^x+5^{1-3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04$ (відп.: $x\in\left(-\frac{1}{3};\infty\right)$);

г) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3}<1$ (відп.: $x\in\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$);

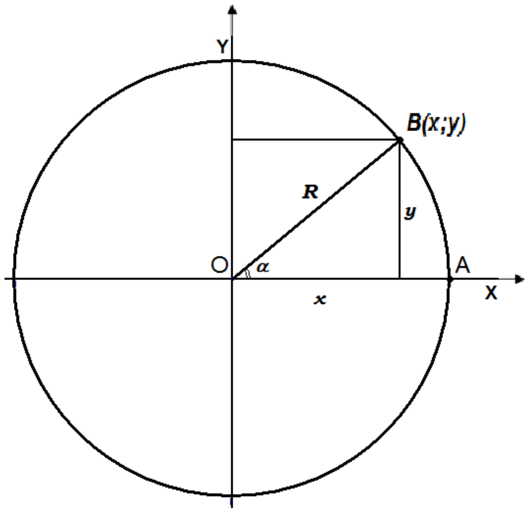
д) $\log_5\left(\log_3\left(\frac{x^2-x-18}{x-2}\right)\right)\ge 0$ (відп.: $x\in[-2;\,2)\cup[6;+\infty)$);

е) $\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)>0$ (відп: $x\in\left(4-\sqrt{2};\,3\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\,+\infty\right)$).

РОЗДІЛ 2. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

2.1. Означення тригонометричних функцій будь-якого кута

Нехай при повороті навколо точки O на кут α початковий радіус OA переходить у радіус OB.



Синусом кута α називають відношення ординати точки B до довжини радіуса.

Косинусом кута α називають відношення абсциси точки B до довжини радіуса.

Тангенсом кута α називають відношення ординати точки B до її абсциси.

Котангенсом кута α називають відношення абсциси точки B до її ординати.

Якщо координати точки B дорівнюють *x* та *y*, а довжина початкового радіуса дорівнює R, то

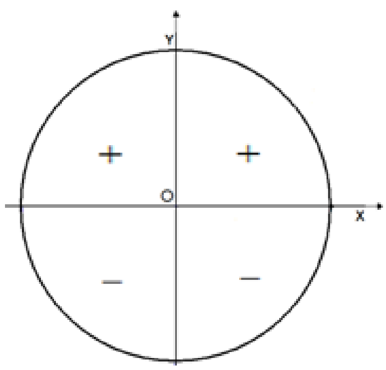
$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\quad \cos\alpha = \frac{x}{R},\quad tg\alpha = \frac{y}{x},\qquad ctg\alpha = \frac{x}{y}.$$

Оскільки кути повороту α та α ± 2π зображуються на тригонометричному колі однією точкою B, то

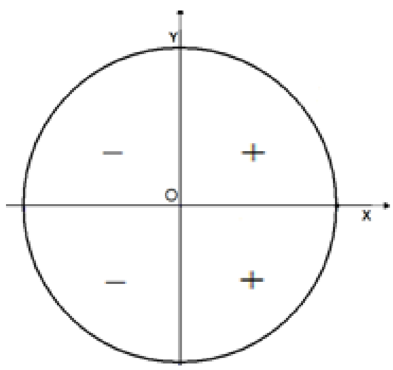
$$\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2\pi),$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi).$$

Знаки тригонометричних функцій

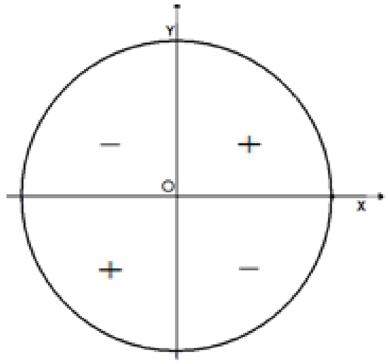
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса і котангенса



Залежність між тригонометричними функціями протилежних кутів:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha,$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–
α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	**π**	$\frac{3\pi}{2}$	**2π**

Приклад. Знайдемо sin765° і cos(– 1170°).

Маємо: $\sin 765° = \sin(2\cdot360° + 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(-1170°) = \cos 1170° = \cos(3\cdot360° + 90°) = \cos 90° = 0$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута α (якщо вони існують) при:

а) α = 750°; б) α = 810°; в) α =1260°; г) α = – 1125°.

2. Визначити знак виразу:

а) sin100°·cos200°; б) sin190°·tg200°;

в) cos320°·ctg17°; г) tg170°·cos400°.

3. Обчислити:

а) sin390°; в) tg540°; д) sin(–720°); є) tg(–900°);

б) cos420°; г) ctg450°; е) cos(–780°); ж) sin(–1125°).

4. Знайти значення виразу:

а) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos(-\pi)+tg\dfrac{\pi}{4}}{2\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{3\pi}{2}}$; б) $\dfrac{3\sin\dfrac{\pi}{6}+2tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{5tg0+6\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

в) $\dfrac{5\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\dfrac{3\pi}{2}}$; г) $\dfrac{\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\dfrac{3\pi}{2}+\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

2.2. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1,$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Приклад 1. Знайдемо cosα, tgα і ctgα, коли відомо, що $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

З формули $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ дістанемо $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Оскільки α є кутом ІІ чверті, то його косинус від’ємний.

Отже, $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$.

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{13}:\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{5}{12}, \text{ тоді } ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $tg\alpha=-\frac{5}{12}$, $ctg\alpha=-2\frac{2}{5}$.

Приклад 2. Відомо $tg\alpha=2$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Знайдемо sinα, cosα і ctgα.

Скориставшись формулою $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, знайдемо cosα.

Маємо: $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}=\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{1}{5}$.

За умовою кут α є кутом I чверті і тому його косинус додатний.

Отже, $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

З формули $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ дістанемо: $\sin\alpha=tg\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Тоді $ctg\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha}=\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $ctg\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 3. Доведемо тотожність $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

З формули $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ виразимо $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ та $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$:

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)-\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

Отже, тотожність доведена.

Приклад 4. Знаючи, що sinα + cosα = m, знайти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$, тобто $1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2,\Rightarrow\ \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$ (1).

Спростимо вираз $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)=$$
$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

З урахуванням формули (1) отримаємо

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)^2=\dfrac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

Відповідь: $\dfrac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha - \sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1 + tg\gamma + tg^2\gamma}{1 + ctg\gamma + ctg^2\gamma}$; г) $\dfrac{tg\gamma}{1 - tg^2\gamma} \cdot \dfrac{ctg^2\gamma - 1}{ctg\gamma}$.

2. Довести, що при всіх допустимих значеннях α вираз набуває того самого значення:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \sin\alpha} + \sin\alpha$; г) $\dfrac{1}{1 - tg^2\alpha} + \dfrac{1}{1 - ctg^2\alpha}$.

3. Спростити вираз:

а) $(tg\alpha + ctg\alpha)(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$; б) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{ctg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha$; г) $\sin^2\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

4. Довести тотожність:

а) $\dfrac{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}{ctg^2\alpha - \cos^2\alpha} = tg^6\alpha$; б) $\dfrac{tg\beta}{tg\beta + ctg\beta} = \sin^2\beta$;

в) $\dfrac{tg\beta}{1 - tg^2\beta} = \dfrac{ctg\beta}{ctg^2\beta - 1}$; г) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = tg^4\alpha$.

5. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$;

б) $\left(\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}\right) \cdot \left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}\right)$.

6. Довести тотожність:

а) $\cos^4\gamma - \sin^4\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma$; б) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = ctg\alpha - tg\alpha$;

в) $\dfrac{tg\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{ctg\alpha} = \cos\alpha$; г) $\dfrac{tg^2\gamma + 1}{tg^2\gamma - 1} = \dfrac{1}{\sin^2\gamma - \cos^2\gamma}$.

7. Виразити:

а) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ через cosα;

б) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ через sinα.

8. Обчислити значення виразу $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо tgα = 3.

9. Знайти значення виразу $\dfrac{ctg\alpha + tg\alpha}{ctg\alpha - tg\alpha}$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

10. Знаючи, що sinα + cosα = *m*, знайти:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

11. Обчислити значення дробу $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, коли відомо, що $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}4$.

12. Довести, що дріб $\dfrac{\sin\alpha + tg\alpha}{\cos\alpha + ctg\alpha}$ не може набувати від'ємних значень.

2.3. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Формули зведення – це формули, за допомогою яких тригонометричні функції кутів виду $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і $2\pi \pm \alpha$ можна виразити через функції кута α від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Функція в правій частині рівності береться з тим самим знаком, який має вихідна функція, коли вважати, що кут α є кут І чверті;

- ✓ для кутів $\pi \pm \alpha$ і $2\pi \pm \alpha$ назва вихідної функції зберігається;
- ✓ для кутів $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ і $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$ назва вихідної функції змінюється (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки).

Приклад 1. Виразимо tg(π – α) через тригонометричну функцію кута α. Коли вважати, що α – кут І чверті, то π – α буде кутом ІІ чверті. У ІІ чверті тангенс від'ємний, отже у правій частині рівності слід поставити знак «мінус». Для кута π – α назва вихідної функції «тангенс» зберігається. Тому

$$tg(\pi - \alpha) = -\,tg\alpha.$$

Приклад 2. Виразимо $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ через тригонометричну функцію кута α.

Будемо вважати, що α – кут I чверті, тоді $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ буде кутом IV чверті. У IV чверті косинус додатній, отже у правій частині слід поставити знак «плюс». Для кута $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ назва вихідної функції «косинус» змінюється на «синус». Тому

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha .$$

Приклад 3. Зведемо $\sin 1{,}6\pi$ до тригонометричної функції кута з проміжку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Маємо: $\sin 1{,}6\pi = \sin(1{,}5\pi + 0{,}1\pi) = -\cos 0{,}1\pi$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Замінити тригонометричною функцією кута α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $ctg(\pi+\alpha)$;

д) $\cos(2\pi-\alpha)$; е) $\sin(2\pi+\alpha)$; є) $tg(180^\circ-\alpha)$; ж) $\sin(180^\circ+\alpha)$;

з) $ctg(360^\circ-\alpha)$; и) $\cos(90^\circ-\alpha)$; і) $\sin(270^\circ-\alpha)$; ї) $tg(270^\circ+\alpha)$.

2. Записати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ через тригонометричну функцію кута від 0° до 90°, якщо:

а) $\alpha=130^\circ$; б) $\alpha=190^\circ$; в) $\alpha=-320^\circ$; г) $\alpha=-590^\circ$.

3. Знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ і $ctg\alpha$, якщо:

а) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; в) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

4. Знайти значення виразу:

а) $\sin 240^\circ$; б) $\cos(-210^\circ)$; в) $tg 300^\circ$; г) $ctg(-225^\circ)$;

д) $\sin 330^\circ$; е) $\sin 315^\circ$; є) $\cos(-120^\circ)$; ж) $\sin(-150^\circ)$.

5. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ+\alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cos(\alpha-\pi)}$;

в) $\dfrac{\sin(-\alpha)ctg(-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)tg(180^\circ+\alpha)}$;

г) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{tg(\pi+\alpha)\cos(1{,}5\pi+\alpha)}$.

6. Довести, що:

а) $\cos(60^\circ-\alpha)=\sin(30^\circ+\alpha)$;

б) $ctg\left(80^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=tg\left(10^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

7. Спростити вираз:

а) $\sin 160^\circ\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cos 340^\circ+tg110^\circ tg340^\circ$;

б) $tg18^\circ tg288^\circ+\sin 32^\circ\sin 148^\circ-\sin 302^\circ\sin 122^\circ$.

8. Знайти значення виразу:

а) $tg15^\circ tg30^\circ tg45^\circ tg60^\circ tg75^\circ$;

б) $ctg18^\circ ctg36^\circ ctg54^\circ ctg72^\circ$.

9. Знайти кут α, якщо:

а) $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ і $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

б) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ і $180^\circ<\alpha<270^\circ$;

в) $tg\alpha=-1$ і $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

г) $ctg\alpha=-\sqrt{3}$ і $270^\circ<\alpha<360^\circ$

10. Довести тотожність:

а) $\dfrac{tg(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=tg^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$;

в) $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)}{tg^3\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\cos\alpha$;

г) $tg1^\circ tg2^\circ tg3^\circ ... tg88^\circ tg89^\circ=1$;

д) $\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)cg^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha$.

2.4. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА ЇХ НАСЛІДКИ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\ tg\beta};$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\ tg\beta}.$$

Приклад 1. Обчислимо cos15° та sin15°.

Запишемо 15° у вигляді різниці 45°–30°. Тоді

cos15°=cos(45°–30°) = cos45°cos30°+ sin45°sin30°= $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

sin15°=sin(45°–30°) = sin45°cos30°– cos45° sin30°= $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 2. Обчислимо cos18°cos63°+ sin18°sin63°.

cos18°cos63°+ sin18°sin63°=cos(18°– 63°) = cos(63°–18°) = cos45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 3. Відомо, що $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ і α – кут I чверті. Обчислимо $\sin^2 60^\circ+\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$.

$$\sin^2 60^\circ+\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha)\times$$

$$\times(\sin 30^\circ\cos\alpha-\cos 30^\circ\sin\alpha)=\frac{3}{4}+\sin^2 30^\circ\cos^2\alpha-\cos^2 30^\circ\sin^2\alpha=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1-\sin^2\alpha)-$$

$$-\frac{3}{4}\sin^2\alpha==1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha.$$

Оскільки $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, то $1-\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$.

Відповідь: $\frac{16}{25}$.

Приклад 4. Обчислимо: $\dfrac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

Використовуючи формулу зведення $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, отримаємо:

$$\frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ} = \frac{\cos 68^\circ \sin 82^\circ - \cos 82^\circ \sin 68^\circ}{\cos 53^\circ \sin 67^\circ - \cos 67^\circ \sin 53^\circ} = \frac{\sin\left(82^\circ - 68^\circ\right)}{\sin\left(67^\circ - 53^\circ\right)} = \frac{\sin 14^\circ}{\sin 14^\circ} = 1$$

.

Відповідь:1.

Завдання для самостійної роботи:

1. Записавши кут 105° як суму 60°+45°, обчислити:

а) sin105°; б) cos105°.

2. Записавши кут 75° як суму 30°+45°, обчислити:

а) sin75°; б) cos75°.

3. Спростити вираз:

а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$;

в) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha$; г) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Знайти значення виразу:

а) cos107°cos17°+ sin107°sin17°; б) cos36°cos24°– sin36°sin24°;

в) sin63° cos27°+ cos63° sin27°; г) sin51° cos21°– cos51° sin21°.

5. Спростити вираз:

а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\cos\gamma + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\sin\gamma$;

г) $\cos\left(36^\circ + \alpha\right)\cos\left(54^\circ + \alpha\right) - \sin\left(36^\circ + \alpha\right)\sin\left(54^\circ + \alpha\right)$;

д) $\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$.

6. Відомо, що $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ і α – кут I чверті. Обчислити:

а). $\cos^2(45^\circ - \alpha)$; б) $\cos^2(60^\circ + \alpha)$.

7. Спростити:

а) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)$;

б) $\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha)$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}$; г) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha - \sin\beta}$.

8. Довести тотожність:

а) $tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1 - tg^2\alpha\, tg^2\beta}$; б) $tg\alpha\, tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + ctg\alpha}$;

в) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; г) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} = 2$.

9. Спростити вираз:

а) $\dfrac{1 + tg(45^\circ - \alpha)}{1 - tg(45^\circ - \alpha)}$; б) $\dfrac{1 + ctg(45^\circ - \alpha)}{tg(45^\circ + \alpha) - 1}$;

в) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$;

г) $ctg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) ctg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

10. Знаючи, що α і β – гострі кути, причому $\sin\alpha = 0{,}1\sqrt{2}$ і $\sin\beta = 0{,}6$, доведіть, що α + β = 45°.

11. Доведіть, що коли α, β і γ – кути трикутника, то

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta .$$

12. Синуси двох гострих кутів трикутника дорівнюють $\dfrac{4}{5}$ і $\dfrac{5}{13}$. Знайти косинус третього кута трикутника.

2.5. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО КУТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Приклад 1. Знайдемо значення sin2α, знаючи, що cosα = – 0,8 і α – кут ІІІ чверті.

Спочатку обчислимо sinα. Оскільки α – кут ІІІ чверті, то sinα<0. Тому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$$

За формулою синуса подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8) = 0{,}96.$$

Відповідь: 0,96.

Приклад 2. Спростимо вираз:

а) $\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$.

Винесемо за дужки $\sin\alpha\cos\alpha$ і скористаємося формулами подвійного кута:

$$\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

б) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$.

$$\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 2\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 2 = 2\left(\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1\right) = 2(\cos 2\alpha + 1)^2 =$$

$$= 2\cdot\left(2\cos^2\alpha - 1 + 1\right)^2 = 2\cdot\left(2\cos^2\alpha\right)^2 = 8\cos^4\alpha.$$

Відповідь: $8\cos^4\alpha$.

Приклад 3. Доведемо тотожність 8cos20°cos40°cos80°=1.

Помножимо і поділимо ліву частину тотожності на sin 20°. Отримаємо:

$$\frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow \frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}=1,\Leftrightarrow \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$$

Тотожність доведено.

Приклад 4. Обчислимо без таблиць: а) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Спростити вираз:

а) $\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$; б) $\sin 2\alpha\, ctg\alpha-1$; в) $\frac{1}{2}tg\alpha\sin 2\alpha+\cos^2\alpha$;

г) $\frac{\cos 2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; д) $(ctg\alpha+tg\alpha)\sin 2\alpha$; е) $\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta+\sin^2\beta}$.

2. Спростити:

а) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\left(\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right)\sin 2\beta$;

в) $1+\cos 4\alpha$; г) $1-\cos 4\alpha$;

д) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$; е) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

є) $\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}$; ж) $\frac{1-\sin 2\varphi}{1+\sin 2\varphi}$.

3. Довести тотожність:

а) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; б) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

в) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$; г) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=tg\alpha$.

4. Знайти значення виразу:

а) $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ \left(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ\right)$; б) $1 - 6\sin^2 \frac{\pi}{12}\cos^2 \frac{\pi}{12}$;

в) $4\sin^2 75^\circ \cos^2 75^\circ - \left(\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ\right)$; г) $\sin \frac{\pi}{16}\cos^3 \frac{\pi}{16} - \sin^3 \frac{\pi}{16}\cos \frac{\pi}{16}$.

5. Якщо $\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то справджується рівність $\cos 2x = 2\cos x$. Довести це.

6. Знайти значення виразу $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$, якщо $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

7. Довести тотожність:

а) $\cos 2\alpha - ctg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin 2\alpha \; ctg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $\sin^4 \beta + \cos^4 \beta = \frac{3 + \cos 4\beta}{4}$;

в) $\left(\frac{2}{1 + tg\alpha} + tg2\alpha\right)\left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}\right) = \cos^2 \alpha$; г) $1 + \sin \alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

8. Спростити:

а) $\frac{1}{1 + ctg\alpha} - \frac{1}{1 - ctg\alpha}$; б) $(tg2\alpha - 2tg\alpha)(ctg\alpha - tg\alpha)$;

в) $\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$; г) $\frac{tg\alpha}{tg2\alpha - tg\alpha}$;

д) $\frac{tg^2(45^\circ + \alpha) - 1}{tg^2(45^\circ + \alpha) + 1}$; е) $tg\alpha + 2tg2\alpha + 4ctg4\alpha$.

2.6. ФОРМУЛИ СУМИ І РІЗНИЦІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2}\cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2}\cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Приклад 1. Спростимо суму: sin10°+sin50°.

Скориставшись формулою суми синусів, дістанемо:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin\frac{10^\circ + 50^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ - 50^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ \cos\left(-20^\circ\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ = \cos 20^\circ.$$

Відповідь: $\cos 20^\circ$.

Приклад 2. Подамо у вигляді добутку різницю cos0,3π – sin0,6π.

Скориставшись формулою зведення, запишемо цей вираз у вигляді різниці косинусів і перетворимо її в добуток. Тоді:

$$\cos 0{,}3\pi - \sin 0{,}6\pi = \cos 0{,}3\pi - \sin\left(0{,}5\pi + 0{,}1\pi\right) = \cos 0{,}3\pi - \cos 0{,}1\pi =$$

$$= -2\sin\frac{0{,}3\pi + 0{,}1\pi}{2}\sin\frac{0{,}3\pi - 0{,}1\pi}{2} = -2\sin 0{,}2\pi \sin 0{,}1\pi.$$

Відповідь: $-2\sin 0{,}2\pi \sin 0{,}1\pi$.

Приклад 3. Спростимо вираз: $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Розклавши різницю квадрату, використаємо формули суми та різниці синусів:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})\right)\cdot\left(\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2})\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{8}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Приклад 4. Перевіримо рівність: $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$.

Перетворимо різницю в добуток: $\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10} = 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}$.

Застосуємо штучний прийом: помножимо і розділимо отриманий добуток на $\cos\frac{\pi}{10}$ і скористаємося формулою sin2α = 2sinαcosα.

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}}.$$

Оскільки за формулами зведення $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$, то отримаємо:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{2}\ .$$

Приклад 5. Обчислимо: tg 9° – tg 27° – tg 63° + tg 81°.

Використовуючи формулу перетворення суми в добуток для тангенсів, отримаємо:

$$\left(tg9^\circ+tg81^\circ\right)-\left(tg27^\circ+tg63^\circ\right)=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cdot\cos 81^\circ}-\frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\cdot\cos 63^\circ}=$$

$$=\frac{1}{\sin 9^\circ\cdot\cos 9^\circ}-\frac{1}{\sin 27^\circ\cdot\cos 27^\circ}=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=2\frac{\sin 54^\circ-\sin 18^\circ}{\sin 54^\circ\cdot\sin 18^\circ}=4\frac{\cos 36^\circ\cdot\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}=4.$$

Відповідь: 4.

Завдання для самостійної роботи:

1. Розкласти на множники вираз:

а) $\sin 3\alpha+\sin\alpha$; б) $\sin\beta-\sin 5\beta$;

в) $\cos 2x+\cos 3x$; г) $\cos y-\cos 3y$.

2. Записати у вигляді добутку:

а) sin40°+sin16°; б) sin20°–sin40°;

в) cos46°–cos74°; г) cos15°–cos45°;

д) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}$; е) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

є) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$; ж) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

з) sin15°+cos65°; и) cos40°–sin16°;

і) cos50°+sin80°; ї) sin40°–cos40°.

3. За допомогою формул суми та різниці тангенсів, перетворити вираз:

а) $tg2\alpha+tg\alpha$; б) $tg3\beta-tg\beta$;

в) $ctg2x+tg4x$; г) $tg\frac{4\pi}{5}-tg\frac{3\pi}{5}$.

4. Записати у вигляді добутку тригонометричних функцій:

а) $\sin^2 x - \sin^2 y$; б) $\cos^2 x - \cos^2 y$;

в) $\sin x + \cos y$; г) $\cos x - \sin y$;

д) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$; е) $2\sin\alpha + 1$;

є) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$; ж) $\sqrt{3} - 2\cos\alpha$.

5. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; б) $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$.

6. Довести, що:

а) $\dfrac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 31^\circ + \sin 11^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$;

в) $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \left(\sqrt{3}-1\right)\sin\alpha$.

7. Перевірити, що:

а) sin87°–sin59°– sin93°+sin61°=sin1°;

б) cos115°–cos35°+cos65°+cos25°=sin5°.

8. Довести тотожність:

а) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = tg\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = ctg\alpha$.

9. Довести, що при будь-яких α і β: $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

10. Перетворити у добуток різницю $\sqrt{1+\cos 2\alpha} - \sqrt{1-\cos 2\alpha}$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

11. Довести, що коли A, B і C – кути трикутника, то $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

2.7. ЗАСТОСУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФОРМУЛ ДО ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ

Приклад 1. Доведемо тотожність: $\dfrac{1+ctg\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{ctg\alpha+tg\alpha}=\dfrac{1}{2}tg2\alpha$.

Скориставшись формулами зведення та розписавши $tg\alpha$ і $ctg\alpha$, ліву частину тотожності можна представити у вигляді:

$$\frac{1+ctg\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{ctg\alpha+tg\alpha}=\frac{1+tg2\alpha\cdot tg\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\left(1+\frac{2tg\alpha\cdot tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\right):\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1-tg^2\alpha+2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1+tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{1}{2}tg2\alpha$$

.

Оскільки ліва частина тотожності дорівнює правій, отже тотожність доведено.

Приклад 2. Перевіримо рівність: $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\sin\left(30^\circ-10^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=4$$

Приклад 3. Доведемо тотожність: $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg^4\alpha.$

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\frac{2-4\cdot\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\left(\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2}{2+4\cdot\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}+\left(\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2}=$$

$$=\frac{1+2tg^2\alpha+tg^4\alpha-2+2tg^4\alpha+1-2tg^2\alpha+tg^4\alpha}{1+2tg^2\alpha+tg^4\alpha+2-2tg^4\alpha+1-2tg^2\alpha+tg^4\alpha}=\frac{4tg^4\alpha}{4}=tg^4\alpha.$$

Тотожність доведено.

Приклад 4. Обчислимо: $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$.

Зведемо вираз до спільного знаменника і, скориставшись формулою перетворення добутку синусів на суму, дістанемо:

$$\frac{1-2\left(\cos 60^{\circ}-\cos 80^{\circ}\right)}{2\sin 10^{\circ}}=\frac{\cos 80^{\circ}}{\sin 10^{\circ}}.$$

Враховуючи, що $\cos 80^{\circ}=\sin 10^{\circ}$, дістанемо $\frac{\sin 10^{\circ}}{\sin 10^{\circ}}=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 5. Спростимо вираз $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Перетворивши суму перших двох доданків на добуток, дістанемо:

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma-4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Зі співвідношення між кутами знайдемо: $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ і $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-\gamma)=\sin\gamma$.

Тоді шуканий вираз набере вигляду:

$$\begin{aligned}&2\sin\gamma\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\right)=2\sin\gamma\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma\right)=\\&=2\sin\gamma\left(\cos(\pi-\gamma)+\cos\gamma\right)=2\sin\gamma\left(-\cos\gamma+\cos\gamma\right)=0.\end{aligned}$$

Відповідь: 0.

Приклад 6. Спростимо $\sqrt{4\cos^4\alpha+4\cos^2\alpha+1}+\sqrt{4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+1}$, якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

Запишемо заданий вираз у вигляді:

$$\begin{aligned}&\sqrt{4\cos^4\alpha+4\cos^2\alpha+1}+\sqrt{4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+1}=\sqrt{\left(2\cos^2\alpha+1\right)^2}+\sqrt{\left(2\sin^2\alpha-1\right)^2}=\\&=\left|2\cos^2\alpha+1\right|+\left|2\sin^2\alpha-1\right|=\left|\cos 2\alpha+2\right|+\left|-\cos 2\alpha\right|.\end{aligned}$$

Якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$, то $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$, тобто кут 2α лежить у третій чверті, то ж $\cos 2\alpha<0$, а $-\cos 2\alpha>0$, тому $\left|-\cos 2\alpha\right|=-\cos 2\alpha$.

Отже, $\left|\cos 2\alpha+2\right|+\left|-\cos 2\alpha\right|=\cos 2\alpha+2-\cos 2\alpha=2$.

Відповідь: 2.

Приклад 7. Перевіримо рівність $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Розглянемо вираз:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+2\cos^2\alpha-1)} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha|.$$

Оскільки α – кут II чверті та $\cos\alpha<0$, тоді $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

Тепер заданий вираз буде мати вигляд:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Якщо $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, тоді $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, тобто $\frac{\alpha}{2}$ – кут I чверті та $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, тому $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2}$, отже, рівність правильна.

Приклад 8. Обчислити без таблиць $\frac{\lg(2\cos 15^\circ)}{\lg(2\sin 15^\circ)}$.

Оскільки $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$ або $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, то $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$ або $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$. Тому під логарифмічні вирази можна представити у вигляді:

$$\frac{\lg(2\cos 15^\circ)}{\lg(2\sin 15^\circ)} = \frac{\lg\left(2\cdot\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}\right)}{\lg\left(2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}\right)} = \frac{\lg\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\lg\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\lg\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\lg\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \frac{\lg\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\lg\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-1}} = \frac{\lg\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\lg\sqrt{2+\sqrt{3}}} = -1.$$

Відповідь: –1.

Завдання для самоперевірки

1. Довести тотожність:

а) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{3}{2}$;

б) $\frac{tg2\alpha+ctg3\beta}{ctg2\alpha+tg3\beta} = \frac{tg2\alpha}{tg3\beta}$;

в) $tg20^\circ\cdot tg40^\circ\cdot tg80^\circ = \sqrt{3}$ **;**

г) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$ **;**

д) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2}$;

е) $\cos 4\alpha\cdot tg2\alpha-\sin 4\alpha = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha-1}$.

2. Обчислити:

а) $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$, якщо $tg\alpha=\dfrac{1}{2}$ (відп.: $\dfrac{1}{5}$);

б) $tg\dfrac{x}{2}$**,** якщо $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$ (відп.: 2 або $-\dfrac{1}{3}$);

в) $\sin^4\dfrac{\pi}{9}+\sin^4\dfrac{2\pi}{9}+\sin^4\dfrac{3\pi}{9}+\sin^4\dfrac{4\pi}{9}$ (відп.: $\dfrac{27}{16}$).

3. Перетворити у добуток:

а) $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$ (відп.: $8\cos^4 2\alpha$);

б) $\sqrt{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $0<\alpha\le\pi$ (відп.: $2\sin\dfrac{\alpha}{4}$);

в) $3-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (відп.: $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$, або $-\dfrac{\cos3\alpha}{\cos\alpha}$).

4. Спростити:

а) $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin\alpha+1}$ (відп: 1);

б) $\dfrac{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{2\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-\dfrac{tg\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$ (відп.: $\dfrac{2}{\sin^3 2\alpha}$);

в) $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-1$ (відп.: $-\cos^2 2x$);

г) $\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cdot\dfrac{1}{8tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ (відп.: $\dfrac{1}{4}$);

д) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+4\alpha\right)-\sin^6\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos^6\left(\dfrac{7\pi}{2}-2\alpha\right)$ (відп.: $\dfrac{1}{8}\sin8\alpha\sin4\alpha$).

5. Довести, що якщо $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, то $\sqrt{2ctg\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}=-1-ctg\alpha$.

РОЗДІЛ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

3.1. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Тригонометричним називається рівняння, в якому:

1) аргументи знаходяться лише під знаком *тригонометричних* функцій;
2) аргументами є *лінійні* функції від невідомих;
3) з тригонометричними функціями виконуються лише *алгебраїчні дії.*

Загальна схема розв'язування тригонометричних рівнянь наступна:

1) визначають ОДЗ (область допустимих значень) вихідного рівняння;
2) здійснюють послідовно ряд переходів (наслідку або рівносильності) від вихідного рівняння до рівняння, розв'язок якого очевидний;
3) визначають корені здобутого рівняння;
4) перевіряють, чи є знайдені корені коренями вихідного рівняння.

Перевірка знайдених коренів необхідна, якщо в процесі розв'язання трапилося розширення ОДЗ або, якщо були використані тригонометричні тотожності, ОДЗ лівої та правої частини яких не співпадають.

У загальному випадку (якщо не накладені додаткові обмеження) тригонометричне рівняння або не має розв'язків, або має їх нескінченну кількість.

Загального методу розв'язання тригонометричних рівнянь не існує. Найчастіше, тригонометричні рівняння, що розглядаються в елементарній математиці, зводяться шляхом різних перетворень до розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь. Загальні розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Рівняння	Загальні розв'язки	Обмеження
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	$a \in [-1;1]$; $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	$a \in [-1;1]$; $\arccos a \in [0; \pi]$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$	$a \in (-\infty;+\infty)$; $\mathrm{arctg}\, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$	$a \in (-\infty;+\infty)$; $\mathrm{arcctg}\, a \in (0; \pi)$

При $a = \pm 1$ та $a = 0$ зручніше використовувати окремі випадки розв'язання найпростіших рівнянь (див. табл. 2).

Таблиця 2

	Частинні розв'язки рівнянь:	
	sin *x* = *a*	**cos *x* = *a***
$a = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

При розв'язуванні найпростіших тригонометричних рівнянь часто виникає необхідність використання основних тотожностей та співвідношень обернених тригонометричних функцій:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\quad x \in [-1; 1];\qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,\quad x \in [-1; 1];$

$arctg(-x) = -arctgx,\quad x \in R;\qquad arcctg(-x) = \pi - arcctgx,\quad x \in R.$

Розглянемо приклади розв'язування **найпростіших** тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння: $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подамо це рівняння у вигляді:

$-\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, або $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Розв'язуємо його відносно $2x - \frac{\pi}{6}$. Дістанемо:

$2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi n,\ \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n,$ звідки

$2x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \Rightarrow x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z.$

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння: $\cos\frac{\pi-2x}{3}=-\frac{1}{2}$.

Маємо: $\cos\frac{2x-\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

Розв’язуючи це рівняння відносно $\frac{2x-\pi}{3}$, знаходимо:

$$\frac{2x-\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-\pi}{3}=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n,$$

$$\frac{2x-\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \quad \Rightarrow 2x-\pi=\pm 2\pi+6\pi n, \Rightarrow 2x=\pm 2\pi+\pi+6\pi n,$$ звідки

$$x=\pm\pi+\frac{\pi}{2}+3\pi n, \ n\in Z.$$

Відповідь: $x=\pm\pi+\frac{\pi}{2}+3\pi n, \ n\in Z.$

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння: $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$.

Ліву частину цього рівняння перетворимо так:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}=\frac{1}{2},$$

звідки $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0, \ \Rightarrow \sin 2x=0, \Rightarrow 2x=\pi n, \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}n, \ n\in Z.$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}n, \ n\in Z$.

Приклад 4. Розв’яжемо рівняння $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2}$.

Розкладемо в лівій частині рівняння різницю квадратів:

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right)=\frac{1}{2}; \Leftrightarrow$$

$$-2\sin\frac{\pi}{8}\sin(-x)\cdot 2\cos\frac{\pi}{8}\cos(-x)=\frac{1}{2}; \ \Leftrightarrow \ 2\sin x\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}; \ \Leftrightarrow \ \sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2};$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}; \Leftrightarrow \ 2x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n; \Leftrightarrow \ x=(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in Z.$$

Відповідь: $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, \ n\in Z.$

Приклад 5. Розв’яжемо рівняння: $\cos\left(3\pi\cos\frac{\pi}{2}x\right)=-1$.

Розв’язуючи це рівняння відносно $3\pi\cos\frac{\pi}{2}x$, дістанемо:

$3\pi\cos\frac{\pi}{2}x=\pi+2\pi n$, або $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z$.

Оскільки $\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|\le 1$, то для n допустимі такі значення: n = 0, 1, –1, –2.

Тому дане рівняння еквівалентне сукупності чотирьох рівнянь:

$$\cos\frac{\pi}{2}x=\pm\frac{1}{3} \text{ і } \cos\frac{\pi}{2}x=\pm1.$$

Сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x=\pm\frac{1}{3}$ еквівалентна рівнянню: $\cos^2\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{9}$,

звідки $\frac{1+\cos\pi x}{2}=\frac{1}{9},\ \Rightarrow\cos\pi x=-\frac{7}{9},\Rightarrow\pi x=\pm\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)+2\pi n,$ тоді

$x_1=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)+2n,\ n\in Z.$

Тепер розв’яжемо сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x=\pm1$. Дістаємо: $\cos^2\frac{\pi}{2}x=1$,

звідки $\frac{1+\cos\pi x}{2}=1,\ \Rightarrow\cos\pi x=1,\Rightarrow\pi x=2\pi n,\ \Rightarrow x_2=2n,\ n\in Z.$

Відповідь: $x_1=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)+2n,\quad x_2=2n,\ n\in Z.$

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння: $\cos\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Маємо: $\sqrt{x}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ де, оскільки $\sqrt{x}\ge 0,$ n = 0, 1,2,3,…, причому, якщо n = 0, то у формулі слід взяти знак «+». Тому $x=\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)^2$, де n – довільне натуральне число і, крім того, $x=\frac{\pi^2}{16}$.

Приклад 7. Розв’яжемо рівняння: $\sin\left(\cos x\right)=\frac{1}{2}$.

Розв’язуючи рівняння відносно cos x, отримаємо:

$\cos x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n \Leftrightarrow \cos x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Функція cos *x* – обмежена $(|\cos x| \le 1)$. Ця умова для $\cos x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ виконується лише при *n* = 0. Тоді з останньої формули витікає :

$\cos x = \frac{\pi}{6}, \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Приклад 8. Розв'яжемо рівняння $\sqrt{16 - x^2} \sin x = 0$.

Фактично мова йде про відшукання коренів рівняння $\sin x = 0$ на відрізку [–4; 4], що є розв'язком нерівності $16 - x^2 \ge 0$. Із серії $x = \pi n$ цьому відрізку належать три значення –π; 0; π. Крім того, у відповідь потрібно включити корені рівняння $16 - x^2 = 0$, тобто значення 4 та – 4.

Відповідь: –4; –π; 0; π; 4.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; **2.** $\cos x^2 = 1$; **3.** $\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4. $\cos x \sin x = -\frac{1}{4}$ **5.** $\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$; **6.** $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

7. $\sin^2(\sin x) = \frac{1}{4}$**;** **8.** $\sin(x^2 - 1) = \frac{1}{2}$**;** **9.** $\cos(\pi x^2) = 1$;

10. $\sqrt{7x - x^2}(2\cos x - 1) = 0$; **11.** $2|x - 2|\cos x = x - 2$;

12. $(\sqrt{2}\cos x - 1)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$**.**

3.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

І. РІВНЯННЯ, АЛГЕБРАЇЧНІ ВІДНОСНО ОДНІЄЇ З ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Основний метод розв’язання таких рівнянь полягає в тому, що всі тригонометричні функції, що входять в рівняння, виражають через якусь одну тригонометричну функцію, що залежить від одного й того ж аргументу.

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння: $\sqrt{2}\sin^2 x = \cos x$.

Оскільки при будь-яких значеннях x $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то дане рівняння еквівалентне рівнянню $\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right) = \cos x$, або $\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$, звідки

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Розв’язком першого рівняння є $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,$ друге з цих найпростіших рівнянь не має розв’язків.

Відповідь: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння

$4\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos x + 4\cos 2x = 2\cos^3 x - \sin^2 2x + 2$.

Перейдемо до функції cos *x:*

$4\left(1-\cos^2 x\right)^2 - 2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x + 4\left(2\cos^2 x - 1\right) = 2\cos^3 x - 4\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right) + 2,$ тобто

$4 - 8\cos^2 x + 4\cos^4 x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4 - 2\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x - 2 = 0,$

$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0,\ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0, \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2\pi k,\ k \in Z, \\ x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 2\pi k,\quad x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ k \in Z,\ n \in Z.$

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння $2\sqrt{3}\cos^3 x = 9\sin^2 x$.

Подаючи дане рівняння у вигляді $2\sqrt{3}\cos^3 x = 9\left(1-\cos^2 x\right)$, робимо заміну $t=\cos x$. Очевидно, $|t|\le 1$. Дістанемо: $2\sqrt{3}t^3+9t^2-9=0$, або, після ділення обох частин рівняння на $\sqrt{3}$, $2t^3+3\sqrt{3}t^2-3\sqrt{3}=0$.

Це рівняння розв'язуємо так: $2t^3+2\sqrt{3}t^2+\sqrt{3}t^2+3t-3t-3\sqrt{3}=0$,

$2t^2\left(t+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}t\left(t+\sqrt{3}\right)-3\left(t+\sqrt{3}\right)=0, \Leftrightarrow \left(t+\sqrt{3}\right)\left(2t^2+\sqrt{3}t-3\right)=0$.

Оскільки $|t|\le 1$, то $t+\sqrt{3}\ne 0$, тому $2t^2+\sqrt{3}t-3=0$, звідки, враховуючи, що $|t|\le 1$, знаходимо $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отже $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ і $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Відповідь: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $2\sin^2 3x+5\sin 3x=0$;

2. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$;

3. $\cos 2x+3\sin x=2$;

4. $2tg\dfrac{x}{4}-2ctg\dfrac{x}{4}=3$;

5. $1-\cos 8x=\sin 4x$;

6. $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\dfrac{x}{2}$;

7. $tg^3x+tg^2x-3tgx-3=0$;

8. $\dfrac{ctg2x}{ctgx}+\dfrac{ctgx}{ctg2x}+2=0$.

II. РІВНЯННЯ, ЩО РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ МЕТОДОМ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ

Групуючи доданки, зводимо вихідне рівняння до рівняння, у якому ліва частина розкладена на множники, а права частина дорівнює нулю. Таким чином задане рівняння розкладається на сукупність більш простих рівнянь.

При цьому слід пам'ятати: щоб добуток двох або кількох функціональних множників дорівнював нулю, необхідно і достатньо виконання двох умов:

а) принаймні один із співмножників дорівнює 0;

б) кожний із решти співмножників має зміст.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

Розкладемо ліву рівняння на множники $(\cos 9x - \cos 7x) + (\cos 3x - \cos x) = 0$,

$\Leftrightarrow\ -2\sin 8x \sin x - 2\sin 2x \sin x = 0$, $\Leftrightarrow\ -2\sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0$, $\Leftrightarrow$

$$-4\sin x \sin 5x \cos 3x = 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 5x = 0, \\ \cos 3x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi n, \\ 5x_2 = \pi n, \\ 3x_3 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi n, \\ x_2 = \dfrac{\pi n}{5}, \\ x_3 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, \end{array}\right. \quad n \in Z.$$

Відповідь: $\pi n;\ \dfrac{\pi n}{5};\ \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3};\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$.

Перепишемо праву частину рівняння у вигляді: $\sin 2x = \left(\cos^2 \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin^2 \dfrac{x}{2}\right)^2$, тоді

$$\sin 2x = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right), \Leftrightarrow \sin 2x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x, \Leftrightarrow$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0, \Leftrightarrow \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Останнє рівняння буде рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x_2 = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ n, k \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжемо рівняння $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

Розкладемо праву і ліву частини на множники:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x).$$

Інколи на цьому етапі можна припуститися помилки: розділити обидві частини рівняння на вираз $\sin x - \cos x$, не звертаючи уваги, що цей вираз може дорівнювати нулю. Таким чином втрачається корінь $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. Перенесемо всі доданки в одну сторону та винесемо спільний множник за дужки:

$$\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-\sin x-\cos x\right)=0,$$
$$\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\left(1+\sin x\cdot\cos x-\sin x-\cos x\right)=0,$$
$$\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\left(1-\cos x+(\sin x\cdot\cos x-\sin x)\right)=0,$$
$$\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\left((1-\cos x)-\sin x\cdot(1-\cos x)\right)=0,$$
$$\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\left(1-\cos x\right)\cdot\left(1-\sin x\right)=0$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0,\\ 1-\cos x=0,\\ 1-\sin x=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,\\ x_2=2\pi k, k\in Z,\\ x_3=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ x_2=2\pi k,\ x_3=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,$ де $n,m,m\in Z.$

Приклад 4. Розв’яжемо рівняння $\sqrt{3}\sin x-\cos x=-\cos 3x$ **.**

Перепишемо дане рівняння у вигляді: $\cos x-\cos 3x=\sqrt{3}\sin x$.

Тоді $2\sin 2x\cdot\sin x-\sqrt{3}\sin x=0,\Leftrightarrow \sin x\cdot\left(2\sin 2x-\sqrt{3}\right)=0,\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\pi k,\\ x_2=\left(-1\right)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\end{array}\right.\quad n,k\in Z.$$

Відповідь: $x_1=\pi k,\ x_2=\left(-1\right)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\quad n,k\in Z.$

Приклад 5. Розв’яжемо рівняння $3^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}}=3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}-\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}=0,\Leftrightarrow\frac{2\cos^2 x+\cos x-6}{2\cos^2 x-1}=0,\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\cos x+2\right)\left(2\cos x-3\right)}{2\cos^2 x-1}=0,\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\cos x+2\right)\left(2\cos x-3\right)=0,\\ 2\cos^2 x\neq 1\end{cases}$$

Проте ні $\cos x+2\neq 0$, ні $2\cos x-3\neq 0$, тому й дріб $\dfrac{\left(\cos x+2\right)\left(2\cos x-3\right)}{2\cos^2 x-1}\neq 0$.

Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів не має.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$**;**

2. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x$**;**

3. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos 3x$**;**

4. $\sin 2x + \sin x = 2\cos x + 1$**;**

5. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$**;**

6. $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$**;**

7. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$**;**

8. $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$**.**

9. $\cos 3x + \sin 5x = 0$**;**

10. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x - \sin 7x = 0$**.**

АНАЛІЗ ТА ФОРМА ЗАПИСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Вихідне тригонометричне рівняння завдяки перетворенням зводиться (з накладанням або без накладання обмежень за рахунок ОДЗ) до розв'язання:

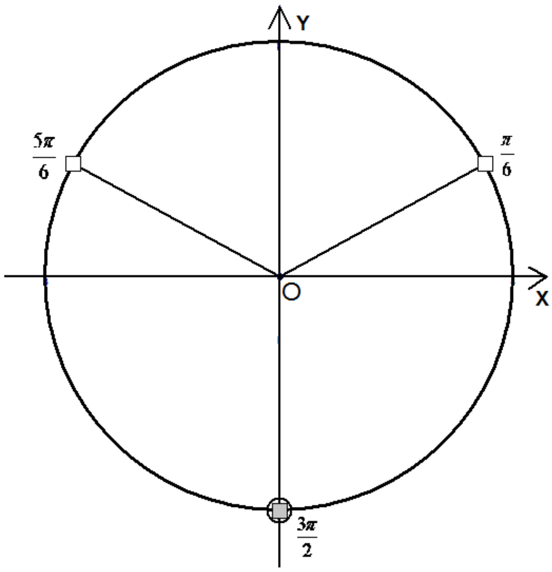
1) одного найпростішого рівняння;
2) сукупності найпростіших рівнянь;
3) системи найпростіших рівнянь.

Розв'язком тригонометричного рівняння (якщо воно має розв'язки) є, як правило, одна або декілька множин невідомого. При виборі ***форми запису*** остаточного розв'язку рівняння та врахуванні результатів перевірки можуть виникнути наступні завдання:

1) використання більш компактної та зручної форми запису остаточного розв'язку;
2) об'єднання одержаних множин розв'язків;
3) виключення значень невідомого, що повторюються;
4) виключення множини значень невідомого, що не належать до ОДЗ вихідного рівняння.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:



$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}=\pi n,\\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{array}\right.$$

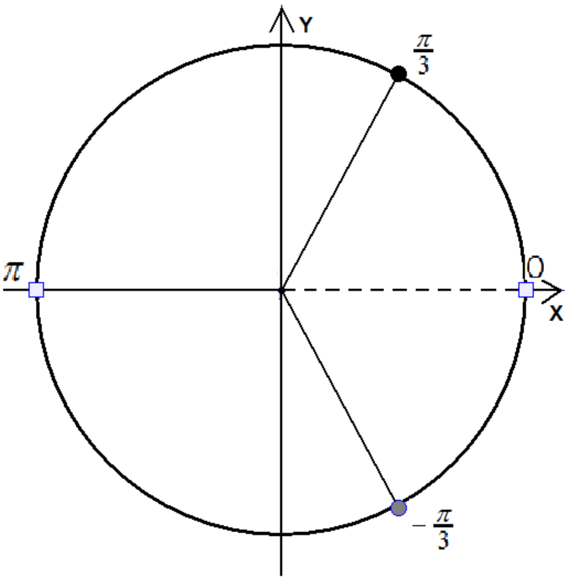
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\ \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\\ x_2=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right. \quad n,k\in Z.$$

Зобразивши на тригонометричному колі обидві серії розв'язків, помічаємо, що серія розв'язків x_2 повністю міститься в серії розв'язків x_1. Отримаємо відповідь $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $\frac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos x}-2\sin x=0, \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{1-\cos x}-\frac{2\sin x}{1}=0, \Leftrightarrow \frac{\sin x(2\cos x-1)}{1-\cos x}=0, \Leftrightarrow$$



$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ \cos x\neq 1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1=\pi k,\\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right.\\ x\neq 2\pi m,\end{array}\right. \quad k,n,m\in Z.$$

Серію розв'язків x_1 зобразимо на тригонометричному колі квадратиками (це точки 0, π, 2π і т.д.), серію x_2 – кружечками (це точки $\frac{\pi}{3}+2\pi n$ та $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$). Тепер потрібно виключити точки $2\pi m$ (позначимо пунктиром). Таким чином розв'язки, що залишилися, можна записати формулою $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi l}{3},\ l\in Z.$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi l}{3},\ l\in Z.$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння, зробити вибірку коренів:

1. $\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}=0$**;** **2.** $tg2x\cdot\sin 4x=0$**;** **3.** $\frac{\sin 2x}{1+\sin x}=-2\cos x$;

4. $(\cos 2x+1)\cdot\left(\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$**;** **5.** $\frac{\sin^3 2x-\sin 2x}{\cos 3x}=0$**;**

6. $(1+\cos x)\cdot\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)=0$**;** **7.** $(1+\cos x)\cdot tg\frac{x}{2}=0$**;**

8. $\frac{\cos^2 x+\cos x}{\sin x}=0$**;** **9.** $\frac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}=0$**;** **10.** $\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos^2 x-\cos x}=0$**.**

III. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

Однорідним рівнянням відносно $\sin x$ та $\cos x$ називають рівняння, кожний член якого має ту ж степінь відносно $\sin x$ і $\cos x$. Наприклад, однорідне рівняння другого степеня відносно sin *x* та cos *x* має вигляд:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

Таке рівняння легко зводиться до рівняння з однією невідомою функцією, діленням обох частин рівняння на $\cos^2 x$ або $\sin^2 x$. Після ділення на $\cos^2 x$ одержуємо квадратне рівняння відносно tg *x*:

$$atg^2x+btgx+c=0.$$

При діленні на $\cos^2 x$ ($\sin^2 x$) необхідно показати, що $\cos^2 x\neq 0$. Дійсно, підставивши $\cos x=0$ в задане рівняння, одержуємо, що $a\sin^2 x=0$, але при $a\neq 0$ це неможливо, бо якщо $\cos x=0$, то sin *x* = ±1.

Аналогічно однорідне відносно sin *x* і cos *x* рівняння *n*-го степеня

$$a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+...+a_1\sin x\cos^{n-1}x+a_0\cos^n x=0$$

діленням на $\cos^n x$ або $\sin^n x$ можна звести до алгебраїчного рівняння *n*-го степеня відносно tg *x* або ctg *x*.

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння $\sqrt{3}\sin^2 2x-2\sin 4x+\sqrt{3}\cos^2 2x=0$.

Перепишемо рівняння у вигляді: $\sqrt{3}\sin^2 2x-4\sin 2x\cos 2x+\sqrt{3}\cos^2 2x=0$.

Дане рівняння є однорідним рівнянням другого степеня відносно $\sin 2x$ та $\cos 2x$. Оскільки $\cos 2x \neq 0$, тому розділимо обидві частини рівняння на вираз $\cos^2 2x$.

Отримаємо рівняння: $\sqrt{3}tg^2 2x - 4tg2x + \sqrt{3} = 0.$

Ввівши нову змінну: $y = tg2x$, останнє рівняння матиме вигляд:

$\sqrt{3}y^2 - 4y + \sqrt{3} = 0,$ звідки $y_1 = \sqrt{3},\ y_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Повернувшись до заміни, отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} tg2x = \sqrt{3}, \\ tg2x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2}, \end{array}\right. \quad n, k \in Z.$$

Відповідь: $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{2},\ x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ n, k \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$.

Враховуючи, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, дане рівняння подаємо у вигляді: $8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, звідки $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$. Оскільки $\cos x \neq 0$, тому розділимо обидві частини рівняння на вираз $\cos^2 x$.

Отримаємо рівняння: $6tg^2 x - tgx - 1 = 0$. Ввівши нову змінну: $y = tgx$, останнє рівняння матиме вигляд:

$6y^2 - y - 1 = 0,$ звідки $y_1 = \dfrac{1}{2},\ y_2 = -\dfrac{1}{3}.$

Повернувшись до заміни, отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = \dfrac{1}{2}, \\ tgx = -\dfrac{1}{3}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = arctg\dfrac{1}{2} + \pi n, \\ x_2 = arctg\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi k, \end{array}\right. \quad n, k \in Z.$$

Відповідь: $x_1 = arctg\dfrac{1}{2} + \pi n,\ x_2 = arctg\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi k,\ n, k \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$; **2.** $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$;

3. $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3$; **4.** $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

5. $\cos^2 x - 3\cos x \sin x + 1 = 0$;

6. $4\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cdot \cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1$;

7. $\sin^3 x + 2\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$;

8. $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$;

9. $4\sin x + 4\cos x = -\operatorname{cosec} x$ (*вказівка*: $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$);

10. $3\sin^3 x - \sin x\cos^2 x - 2\sin x + \cos x = 0$

(*вказівка*: враховуючи, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, дане рівняння подати у вигляді: $3\sin^3 x - \sin x\cos^2 x - (2\sin x - \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0$, звідки після відповідних перетворень отримати однорідне рівняння третього степеня відносно $\sin x$ та $\cos x$: $\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0$).

IV. РІВНЯННЯ ВИДУ $a\sin x + b\cos x = c \ \ (a, b \neq 0)$

Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$, де a, b і c – сталі коефіцієнти, називається **лінійним** відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Оскільки у випадках, коли $a = 0$, або $b = 0$ або $c = 0$, рівняння $a\sin x + b\cos x = c$ розв'язується з допомогою методів, розглянутих вище, то далі вважатимемо, що $a \neq 0$, $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Існує кілька методів розв'язування лінійного рівняння.

1. Зведення до однорідного рівняння другого степеня відносно $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$.

Оскільки $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ і $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$, тоді

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right),$$

звідки $(b + c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c - b)\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Якщо $b \neq -c,$ то отримане рівняння можна розділити на $\cos^2\frac{x}{2}$ (очевидно, що тоді $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$) і таким чином звести до квадратного рівняння відносно $tg\frac{x}{2}$:

$$(b+c)\,tg^2\frac{x}{2} - 2a\,tg\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c-b) = 0.$$

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $4\sin x - 3\cos x = 2$.

Зведемо дане рівняння до однорідного відносно $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$. Маємо:

$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right),$

або $\sin^2\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0$, звідки $tg^2\frac{x}{2} + 8\,tg\frac{x}{2} - 5 = 0$,

тоді $tg\frac{x}{2} = -4 \pm \sqrt{21}$ і $x = -2arctg\left(4 \pm \sqrt{21}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

Відповідь: $x = -2arctg\left(4 \pm \sqrt{21}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$

2. Введення допоміжного аргументу

Розділимо ліву і праву частини рівняння $a\sin x + b\cos x = c$ $(a, b \neq 0)$ на $\sqrt{a^2+b^2}$. Вважатимемо, що $c \neq 0,\ \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.

Маємо: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то існує такий кут φ, що $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можна назвати синусом і косинусом цього кута.

Тоді рівняння $a\sin x + b\cos x = c$ може бути подано у вигляді: $\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, якщо $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Якщо ж $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, а $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то рівняння набуде вигляду:

$$\cos x\cdot\cos\varphi+\sin x\cdot\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Рівняння $a\sin x+b\cos x=c\ \ (a,b\neq 0)$ можна розв'язати в тому і лише в тому випадку, якщо $c^2\leq a^2+b^2$.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $8\cos x+15\sin x=17$ введенням допоміжного аргументу.

Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{64+225}=17$, одержимо:

$\frac{8}{17}\cos x+\frac{15}{17}\sin x=1;\ \sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=1;\ \sin(x+\varphi)=1,$ де $\varphi=arctg\frac{8}{15}$, отже

$$x=-\varphi+\frac{\pi}{2}+2\pi n;\quad x=-arctg\frac{8}{15}+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідь: $x=-arctg\frac{8}{15}+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Приклад 3. Розв'яжемо рівняння $5\sin x+12\cos x+13\sin 3x=0$.

Скористаємось методом введення допоміжного аргументу.

Маємо $\sqrt{5^2+12^2}=13$, тоді $5\sin x+12\cos x=13\left(\sin x\cdot\frac{5}{13}+\cos x\cdot\frac{12}{13}\right)$.

Нехай $\cos\varphi=\frac{5}{13},\ \sin\varphi=\frac{12}{13}$, тоді

$$5\sin x+12\cos x=13(\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi)=13\sin(x+\varphi).$$

Це перетворення дозволяє записати задане рівняння у вигляді

$$13\sin(x+\varphi)+13\sin 3x=0.$$

Далі маємо: $13\cdot 2\sin\left(2x+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\varphi}{2}\right)=0;\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(2x+\frac{\varphi}{2}\right)=0;\\ \cos\left(x-\frac{\varphi}{2}\right)=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\varphi}{2}=\pi n;\\ x-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2};\\ x=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi n.\end{array}\right.\quad(n\in Z)$$

Відповідь: $x_1=-\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x_2=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}+\pi n$, де $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$, $n\in Z$.

3. Застосування універсальної тригонометричної підстановки

Рівняння виду $a\sin x+b\cos x=c\ \ (a,b\neq 0)$ можна звести до раціонального алгебраїчного рівняння відносно $tg\frac{x}{2}$ за допомогою формул універсальної підстановки:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}.$$

Універсальна підстановка – метод досить ефективний, але інколи небезпечний. Використання формул універсальної підстановки звужує область визначення – з неї «випадають» значення *x*, при яких $\cos\frac{x}{2}=0$, тобто $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$, що може призвести до втрати розв'язків даного виду. Тому ті значення *x*, які могли бути втраченими при використанні універсальної підстановки, потрібно спеціально перевіряти.

Формули універсальної підстановки, як правило, застосовують тоді, коли не знаходять іншого способу розв'язування, оскільки отримане в результаті такої підстановки рівняння може бути степеня вище другого.

Приклад 4. Розв'яжемо рівняння $\sin x + 7\cos x = 5$.

Використавши формули універсальної підстановки:

$\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, отримаємо: $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 7\cdot\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$.

Використаємо заміну $u = tg\frac{x}{2}$, тоді рівняння набуде вигляду $\dfrac{2u}{1+u^2}+7\cdot\dfrac{1-u^2}{1+u^2}=5$.

Далі маємо: $2u+7-7u^2=5+5u^2$; $12u^2-2u-2=0$; $6u^2-u-1=0$, звідки $u_1=\frac{1}{2}$; $u_2=-\frac{1}{3}$. Повертаючись до заміни, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=\frac{1}{2}; \\ tg\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2arctg\frac{1}{2}+2\pi n, \\ x_2=-2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, \end{array}\right. \quad n\in Z.$$

Відповідь: $x_1 = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi n,\ x_2 = -2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $2\sin x - 3\cos x = 3$;

2. $5\sin x - 6\cos x = 5$;

3. $3\sin x + 4\cos x = 2$;

4. $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$;

5. $\sin x + \cos x = 1$;

6. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

7. $\sin x + 7\cos x = 5$;

8. $5\sin x - 12\cos x = -13\sin 3x$;

9. $3\sin x + 4\cos x = 5$;

10. $2\sin x + 3\cos x = 4$.

V. ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛ ПОНИЖЕННЯ СТЕПЕНЯ

Для зниження степеня тригонометричних функцій використовують наступні формули:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}; \qquad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння: $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

Використавши формулу пониження степеня для $\sin^2 x$, запишемо задане рівняння у вигляді:

$$\cos 4x + 1 - \cos 2x = 0,\ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0,\ \Leftrightarrow \cos 2x \cdot (2\cos 2x - 1) = 0,\ \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння: $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \cos 10x$.

Знизимо степені тригонометричних функцій: $\cos 8x + \cos 12x + 2\cos 10x = 0$ і виконаємо додавання $\cos 8x + \cos 12x = 2\cos 10x \cdot \cos 2x$.

Тоді $2\cos 10x \cdot \cos 2x + 2\cos 10x = 0, \Leftrightarrow 2\cos 10x \cdot (\cos 2x + 1) = 0, \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 10x = 0, \\ \cos 2x + 1 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{10}, \ k \in Z, \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{10}, \ \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n, k \in Z$.

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння: $\cos^6\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \cos^6\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Застосуємо формулу пониження степеня для $\cos^2 x$ та запишемо задане рівняння у вигляді:

$$\left(\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Використавши формули зведення, отримаємо:

$$\left(\frac{1 - \sin 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}; \quad \text{тоді}$$

$$\frac{1 - 3\sin 2x + 3\sin^2 2x - \sin^3 2x + 1 + 3\sin 2x + 3\sin^2 2x + \sin^3 2x}{8} = \frac{1}{2}; \Leftrightarrow$$

$$2 + 6\sin^2 2x = 4; \ \Leftrightarrow 3\sin^2 2x = 1; \ \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{3}; \ \Leftrightarrow \sin 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{звідки}$$

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \ \ x = \frac{(-1)^n \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2} + \frac{\pi n}{2}, \ \ n \in Z.$$

Відповідь: $\dfrac{(-1)^n \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2} + \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння:

1. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$ **;** **2.** $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$ **;**

3. $\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}$ **;**

4. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cos x\cdot\cos 3x$ **;**

5. $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\sin^2 2x=0$ **;**

6. $\sin^6 x+\cos^6 x=1$ **;**

7. $\cos^4 x+\sin^4 x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ **;**

8. $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$

(*підказка: скористайтеся формулою*: $a^4+b^4=\left((a+b)^2-2ab\right)^2-2a^2b^2$).

3.3. РІВНЯННЯ З УМОВАМИ

У ряді випадків ставиться завдання не лише знайти всі корені вихідного рівняння, але й вибрати ті із них, що відповідають одній з умов.

Типові умови:

- ✓ знайти корені (або вказати їх кількість), що належать заданому проміжку;
- ✓ знайти суму (різницю) коренів, що належать заданому проміжку;
- ✓ знайти найменший додатній корінь;
- ✓ знайти найбільший від'ємний корінь;
- ✓ знайти корені, що задовольняють одну з рівностей або нерівностей.

У цих випадках потрібно проаналізувати знайдені загальні розв'язки вихідного рівняння на предмет виконання сформульованої умови.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $3\cos 2x=1-\cos 4x$ і знайдемо найменший додатний корінь.

$$3\cos 2x=1-\left(2\cos^2 2x-1\right),\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+3\cos x-2=0,\Rightarrow$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2},\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Найменше додатне значення $x=\frac{\pi}{6}$ матимемо при $n = 0$.

Відповідь: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z$; найменше додатне значення $x=\frac{\pi}{6}$.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $\cos^2 2x-\sin^2 2x+6=7\cos 2x$ і знайдемо суму його коренів на проміжку $[0;10\pi]$.

Скористаємося формулою $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$. Тоді

$\cos^2 2x - \left(1 - \cos^2 2x\right) + 6 = 7\cos^2 2x$, $\Leftrightarrow$ $2\cos^2 2x - 7\cos 2x + 5 = 0$, $\Rightarrow$

$\cos 2x = 1$, $\Leftrightarrow$ $x = \pi n,\ n \in Z$.

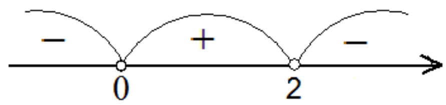
Проміжку $[0; 10\pi]$ належать корені 0; π; 2π;…; 10π, одержані внаслідок підстановки у формулу $x = \pi n$ значень параметра $n = 0, 1, \ldots, 10$. Помічаємо, що знайдені корені утворюють арифметичну прогресію. Якщо прийняти за перший член $a_1 = \pi$, останній член $a_{10} = 10\pi$, кількість членів $n = 10$, то суму S_{10} всіх членів можна визначити за формулою: $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} n = \frac{\pi + 10\pi}{2} \cdot 10 = 55\pi$.

Відповідь: $x = \pi n$, $S_{10} = 55\pi$ ($n \in Z$).

Приклад 3. Знайдемо корені рівняння $\cos 4x \cdot \cos 8x - \cos 5x \cdot \cos 9x = 0$, що задовольняють нерівність $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.

Спочатку розв'яжемо нерівність $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$, $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} > 0$, $\Leftrightarrow$ $\frac{2 - x}{x} > 0$.

Знайдемо критичні точки: $x_1 = 2$, $x_2 \neq 0$, нанесемо їх на числовий промінь і перевіримо, яких знаків буде набувати функція $y = \frac{2 - x}{x}$ на кожному з отриманих проміжків:



Оскільки нас цікавлять проміжки, на яких функція додатна, то $0 < x < 2$.

Переходимо до тригонометричного рівняння.

Використовуючи формули перетворення добутку косинусів двох функцій в суму $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$, дістанемо рівняння:

$\frac{\cos 12x + \cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x + \cos 4x}{2} = 0$, звідки $\cos 12x - \cos 14x = 0$.

Перетворимо різницю косинусів двох функцій в добуток: $\sin 13x \cdot \sin x = 0$.

Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$\left[\begin{array}{l} \sin 13x = 0, \\ \sin x = 0. \end{array}\right.$ Звідки $\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{13} k, \\ x_2 = \pi n, \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{13} k.$

Надаючи параметру k цілі значення, потрібно обрати ті, при яких $0 < \frac{\pi}{13} k < 2$, тобто k = 1, 2, 3, … 7, 8.

Відповідь: $\frac{\pi}{13}; \frac{2\pi}{13}; \frac{3\pi}{13}; \frac{4\pi}{13}; \frac{5\pi}{13}; \frac{6\pi}{13}; \frac{7\pi}{13}; \frac{8\pi}{13}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти корені рівняння $\sin 4x = \frac{1}{2}$, що належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Знайти корені рівняння $\sqrt{3} tg^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = ctg\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, що належать проміжку $[-\pi; \pi]$.

3. Розв'язати рівняння $\cos 10x - \cos 12x = 0$ і знайти корені, що задовольняють нерівність $0 < x < 1{,}5$.

4. Розв'язати рівняння $\sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 1$ і знайти суму його коренів на відрізку $[0; 100\pi]$.

5. Розв'язати рівняння $1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}$ і знайти корені, що задовольняють нерівність $\frac{1}{x} > \frac{1}{8}$.

6. Скільки коренів рівняння $\frac{\cos 3x + \cos x}{1 - \sin x} = 0$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

7. Знайти усі корені рівняння $\frac{5\sin x + \cos x}{3\sin x + \cos x} = 2$, що належить проміжку $[-\pi; \pi]$.

8. Скільки коренів рівняння $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$ належить проміжку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

9. Знайти найменше значення $tg\frac{x}{2}$, якщо x – корінь рівняння $\sin x + 2\cos x = 1$.

10. Знайти розв'язок рівняння $\sin x + tg\frac{x}{2} - 2 = 0$ на інтервалі $(0; \pi)$.

3.4. СИСТЕМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Системами тригонометричних рівнянь звичайно прийнято називати такі системи, які утворено з рівнянь, що містять невідомі під знаком тригонометричних функцій, або з рівнянь з невідомими під знаками обернених тригонометричних функцій і алгебраїчних рівнянь відносно невідомих.

Для систем тригонометричних рівнянь, як і для будь-яких систем трансцендентних рівнянь, немає загальних методів точного аналітичного розв'язування їх. Тому далі розглянемо лише окремі випадки таких систем, для яких вдається аналітично знайти їх розв'язки. В основному це стосується тих випадків, коли дану систему можна звести до системи алгебраїчних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Друге рівняння системи перетворимо так:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

У це рівняння підставляємо значення $x - y = -\dfrac{\pi}{6}$ з першого рівняння системи.

Дістанемо: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $\cos(x+y) = 0$ і $x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Дана система рівнянь еквівалентна системі двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{6}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}k,\ k \in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k, \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}k\right), k \in Z.$

Приклад 2. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{4}, \\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Перетворимо ліву частину першого рівняння системи у суму тригонометричних функцій. Знайдемо: $\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\frac{1}{4}$, або $\sin x+\sin y=\frac{1}{2}$.

З цього рівняння та з другого рівняння системи утворимо нову систему рівнянь $\begin{cases} \sin x+\sin y=\dfrac{1}{2}, \\ \sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ еквівалентну даній системі.

Розв'язуючи цю систему, дістаємо дві системи найпростіших тригонометричних рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x=1, \\ \sin y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \sin x=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin y=1, \end{cases}$$

звідки $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ y_1=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$; $x_2=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ y_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n,k\in Z$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n\right)$; $\left((-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n,k\in Z$.

Приклад 3. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y, \\ \cos^4 x=\cos y. \end{cases}$

Ліві і праві частини кожного з рівнянь системи піднесемо до квадрата і додамо. Дістанемо: $\cos^8 x+\sin^4 x=1$, звідси, враховуючи, що $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, знаходимо: $\cos^2 x\left(\cos^6 x+\cos^2 x-2\right)=0$. Розв'язуючи це рівняння відносно $\cos^2 x$, знаходимо: $\cos^2 x=0$, або $\cos^2 x=1$.

а) Якщо $\cos^2 x=0$, то $\sin^2 x=1$. Тоді з першого рівняння системи можна знайти $\sin y=1$. Перевіркою встановлюємо, що $\cos x=0$ і $\sin y=1$ задовольняють задану систему рівнянь. Отже, $\begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \\ y_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ k,n\in Z. \end{cases}$

б) Якщо $\cos^2 x = 1$, то $\sin x = 0$ і з другого рівняння заданої системи визначаємо, що $\cos y = 1$. Перевіркою впевнюємося, що $\sin x = 0$ і $\cos y = 1$ задовольняють задану систему рівнянь. Отже, $\begin{cases} x_2 = \pi k, \\ y_2 = 2\pi n, \ \ k, n \in Z. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $(\pi k, 2\pi n)$, $k, n \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи тригонометричних рівнянь:

1. $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 2\pi, \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} tgx + tgy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} tg\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Завдання для самоперевірки

Розв'яжіть тригонометричні рівняння:

1. $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 5$ (відп.: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$; $x_2 = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n, k \in Z$);

2. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$ (відп: $x = 15^\circ + 360^\circ n, \quad n \in Z$);

3. $1 - \sin 3x = \left(\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2$ (відп: $x_1 = \pi n$; $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n, \quad n \in Z$);

4. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$ (відп: $x_1 = \frac{\pi}{2}n;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$);

5. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ (відп.: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n,k \in Z$);

6. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$ (відп.: $x_1 = \frac{\pi k}{5};\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n,k \in Z$);

7. $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ (відп.: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n,k \in Z$);

8. $\sin x + 7\cos x = 5$ (відп.: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{50}} + 2\pi k,\ k \in Z$);

9. $4\cos^2 6x + 16\cos^2 3x = 13$ (відп.: $x = \frac{\pi}{18}(6n \pm 1)$);

10. $2\cos 2x + 2tg^2 x = 5$ (відп: $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$);

11. $tg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 6x = 0$ (відп.: $x_1 = \frac{\pi k}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{12}(4n - 1),\ n,k \in Z$);

12. $2(1 + \sin 2x) = tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ (відп: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$);

13. $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2$ (відп.: $x = 4\pi l,\ l \in Z$);

14. $\sin\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$ (відп.: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$);

15. $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$ (відп.: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$).

РОЗДІЛ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівність, до складу якої невідоме входить тільки під знаком тригонометричних функцій, називається **тригонометричною**.

4.1. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

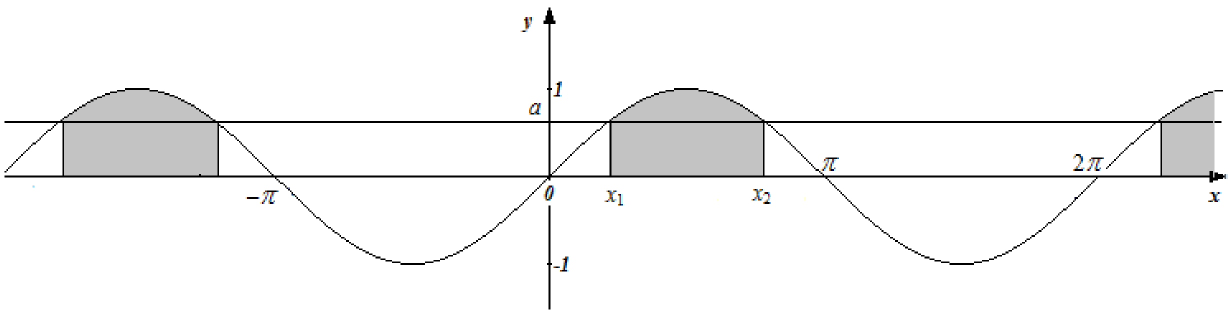
До найпростіших тригонометричних нерівностей відносяться нерівності виду: $\sin x \gtrless a$, $\cos x \gtrless a$, $\operatorname{tg} x \gtrless a$, $\operatorname{ctg} x \gtrless a$.

I. Нерівність $\sin x > a$.

Якщо $a < -1$, то розв'язком нерівності буде будь-яке дійсне число.

Якщо $a \geq 1$, то нерівність не має розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $-1 \leq a < 1$. На рисунку позначено значення x, що задовольняють нерівність $\sin x > a$.

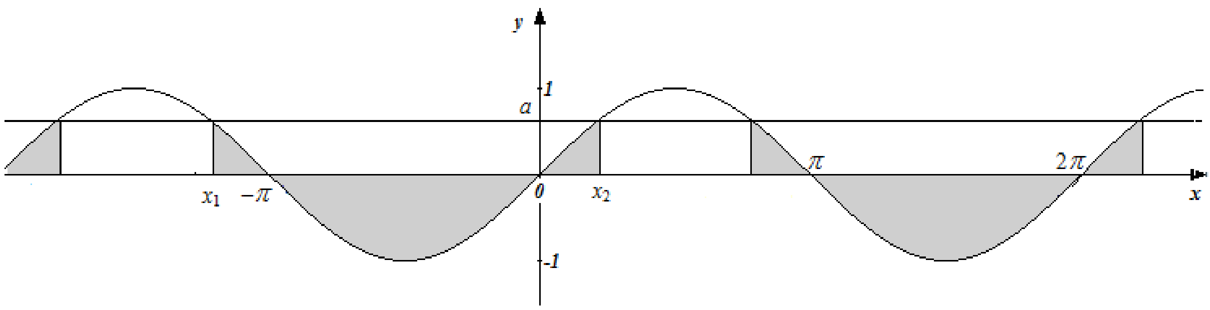


Очевидно, що $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$. Враховуючи період функції $y = \sin x$, отримаємо $x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z$.

II. Нерівність $\sin x < a$.

Якщо $a > 1$, то розв'язком нерівності буде будь-яке дійсне число.

Якщо $a \leq -1$, то нерівність не має розв'язків.



Розглянемо випадок, коли $-1 < a \leq 1$. На рисунку позначено значення

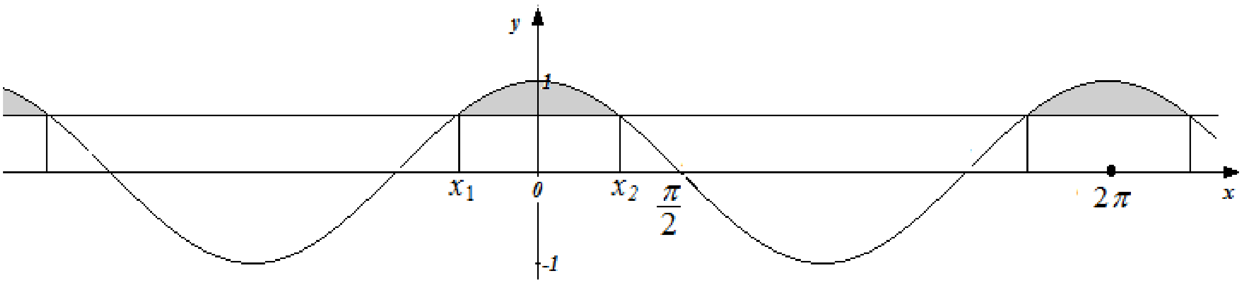
x, що задовольняють нерівність $\sin x < a$. За допомогою графіка можна визначити, що $x_2 = \arcsin a$, тоді $x_1 = -\pi - \arcsin a$. Враховуючи період функції $y = \sin x$, отримаємо $x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z$.

III. Нерівність cos *x* > *a*.

Якщо $a < -1$, то розв'язком нерівності буде будь-яке дійсне число.

Якщо $a \geq 1$, то нерівність не має розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $-1 \leq a < 1$. На рисунку позначено значення x, що задовольняють нерівність $\cos x > a$.

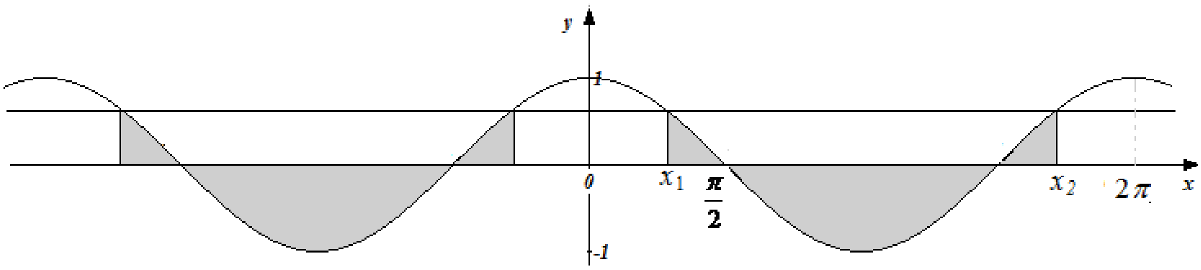


Очевидно, що $x_1 = -\arccos a$, $x_2 = \arccos a$. Враховуючи період функції $y = \cos x$, отримаємо $x \in (-\arccos x + 2\pi n;\ \arccos x + 2\pi n),\ n \in Z$.

IV. Нерівність cos *x* < *a*.

Якщо $a > 1$, то розв'язком нерівності буде будь-яке дійсне число.

Якщо $a \leq -1$, то нерівність не має розв'язків.



Розглянемо випадок, коли $-1 < a \leq 1$. На рисунку позначено значення x, що задовольняють нерівність $\cos x > a$. За допомогою графіка визначимо значення $x_1 = \arccos a$, $x_2 = 2\pi - \arccos a$. Враховуючи період функції $y = \cos x$, отримаємо $x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z$.

V. Нерівність tg*x* > *a* має своїми розв'язками значення x із проміжків

$$x \in \left(arctga + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z .$$

VI. Нерівність tg*x* < *a* має своїми розв'язками значення x із проміжків

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctga + \pi n \right), n \in Z .$$

VII. Розв'язки **нерівності ctg*x* > *a*** знаходяться у проміжках

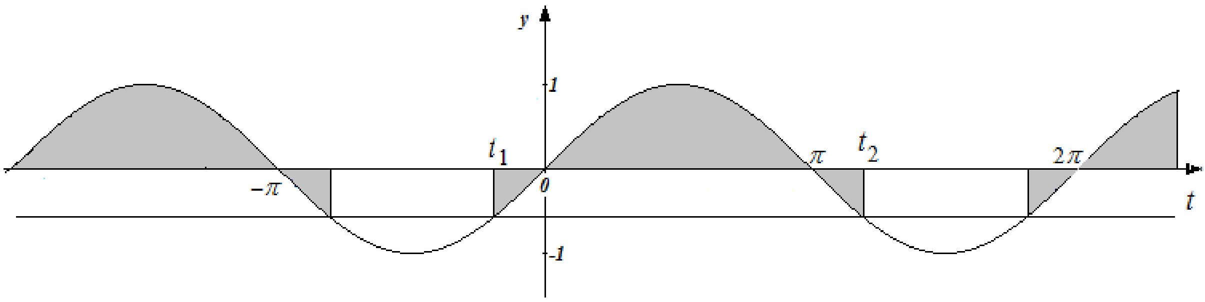
$$x \in (\pi n;\ arcctga + \pi n), n \in Z .$$

VIII. Розв'язки **нерівності ctg*x* < *a*** знаходяться у проміжках

$$x \in (arcctga + \pi n;\ \pi + \pi n), n \in Z .$$

Приклад 1. Розв'яжемо нерівність $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \le 1$.

Враховуючи непарність функції $y = \sin\ x$, запишемо отриману нерівність у вигляді: $-2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1$. Розділимо обидві частини нерівності на (–2): $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \ge -\frac{1}{2}$. Позначимо $3x - \frac{\pi}{6}$ через t, тоді $\sin t \ge -\frac{1}{2}$. На графіку $y = \sin t$ виділимо значення t, що задовольняють цю нерівність.



Оскільки $t_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, а $t_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, тоді $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$.

Повернемося до змінної x: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 3x - \frac{\pi}{6} \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 3x \le \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$2\pi n \le 3x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$$

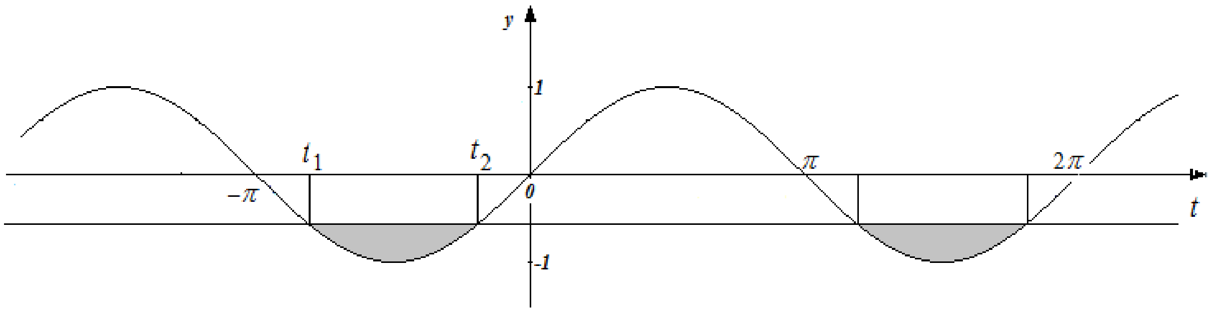
$$\frac{2}{3}\pi n \le x \le \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n,\ \ n \in Z.$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{2}{3}\pi n;\ \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n\right],\ n \in Z.$

Приклад 2. Розв'яжемо нерівність $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < -1$.

Розділимо обидві частини нерівності на $\sqrt{2}$: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Позначимо $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ через t, тоді $\sin t<-\frac{1}{\sqrt{2}}$.



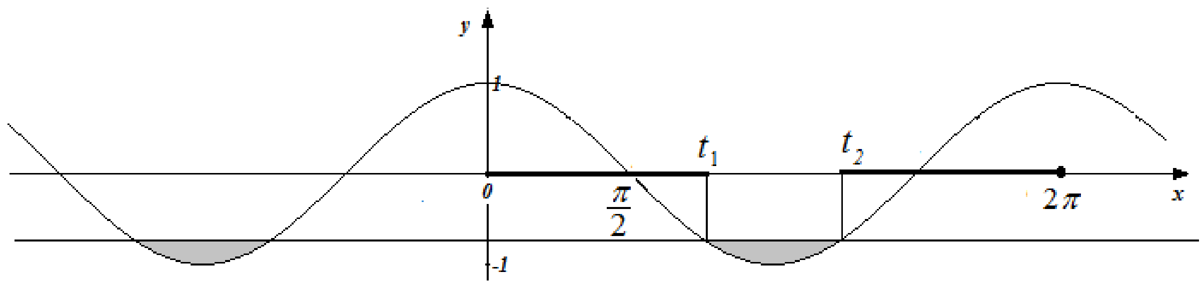
Очевидно, що $t_2=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{4}$, $t_1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$, тоді $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<t<-\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Повернемося до змінної x:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$
$$-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n<\frac{x}{2}<-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$
$$-\pi+2\pi n<\frac{x}{2}<-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$
$$-2\pi+4\pi n<x<-\pi+4\pi n,\ \ n\in Z.$$

Відповідь: $x\in(-2\pi+4\pi n;-\pi+4\pi n),\ \ n\in Z.$

Приклад 3. Розв'яжемо нерівність $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\le-\sqrt{3}$.

Враховуючи парність функції $y=\cos x$, запишемо отриману нерівність у вигляді $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le-\sqrt{3}$ та розділимо обидві частини нерівності на 2: $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Позначимо $2x-\frac{\pi}{4}$ через t, тоді $\cos t\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



За допомогою графіка функції $y=\cos t$ можна визначити t_1 та t_2:

$$t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},\ t_2 = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

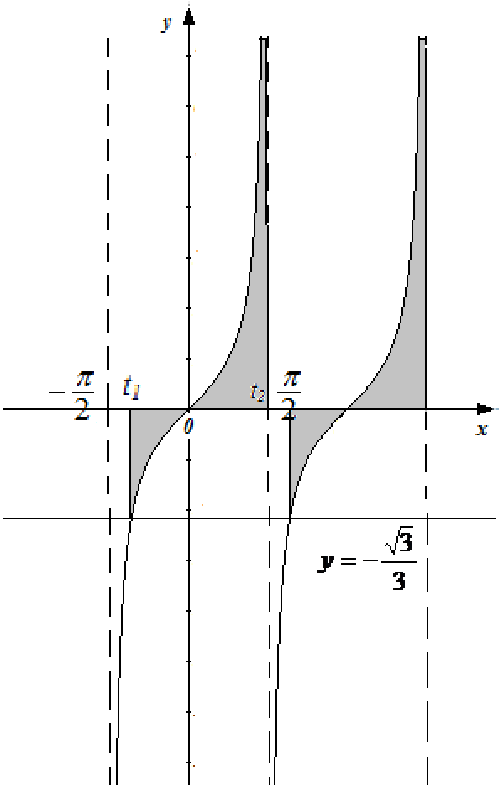
Тоді $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. Повернемося до змінної x:

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le 2x - \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$$
$$\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le 2x \le \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$
$$\frac{13\pi}{12} + 2\pi n \le 2x \le \frac{17\pi}{12} + 2\pi n,$$
$$\frac{13\pi}{24} + \pi n \le x \le \frac{17\pi}{24} + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{13\pi}{24} + \pi n; \frac{17\pi}{24} + \pi n\right],\ n \in Z.$

Приклад 4. Розв'яжемо нерівність $3tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) \le \sqrt{3}$.

Перетворивши даний вираз, отримаємо: $3tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow -3tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow$ $tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Позначимо $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ через t, тоді $tgt \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$. На рисунку позначено значення t, що задовольняють нерівність $tgt \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$. За допомогою графіка визначимо t_1 та t_2: $t_1 = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $t_2 \to \frac{\pi}{2}$. Тоді можна записати $-\frac{\pi}{6} + \pi n \le t < \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Повернувшись до змінної x, отримаємо:

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi n,$$
$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$\frac{\pi}{6}+\pi n \le \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6}+\pi n,$$

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n \le x < \frac{5\pi}{3}+2\pi n, \;\; n \in Z.$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right), \; n \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати тригонометричні нерівності:

1. $\sin 3x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; **2.** $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) > -1$; **3.** $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right) > 1$;

4. $\cos 2x \ge \frac{1}{2}$; **5.** $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) > -1$; **6.** $2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \le \sqrt{3}$;

7. $\sqrt{2}\cos 4x < -1$; **8.** $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}$; **9.** $2\cos(\pi-2x) \le 1$;

10. $tg(\pi-2x) \le 1$; **11.** $tg\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)+\sqrt{3} \ge 0$; **12.** $ctg\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3} \le 0$;

13. $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x < \frac{1}{2}$; **14.** $\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

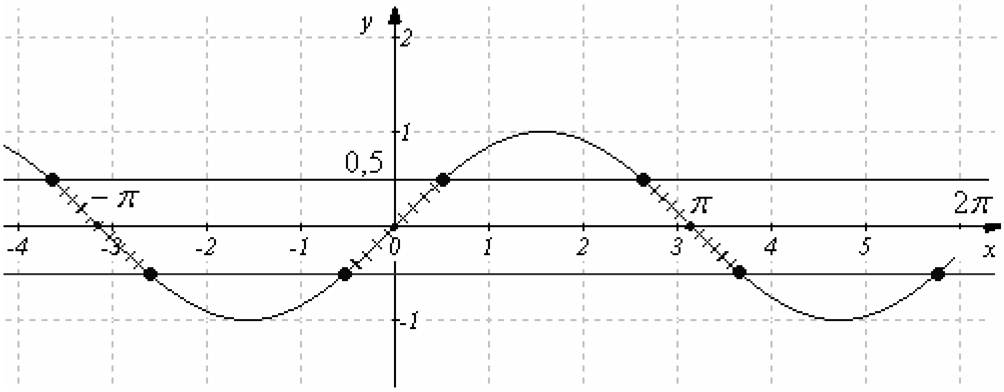
15. $\sin 2x\sin x-\cos 2x\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; **16.** $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \le -1$.

4.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводиться, як правило, до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей, а також до розв'язування сукупності, систем або сукупності систем найпростіших тригонометричних нерівностей. Для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей використовують одиничне тригонометричне коло, на якому множину значень змінної, що задовольняє заданій найпростішій нерівності, зображають у вигляді однієї або декількох дуг. Інколи використання графіка відповідної функції більш наочне та простіше.

Приклад 1. Розв’яжемо нерівність $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)<\frac{1}{4}$.

І спосіб



З рисунку випливає,

$$-\frac{1}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)<\frac{1}{2},\Leftrightarrow \frac{1}{2}>\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{1}{2},\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}<\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\pi n,\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n<2x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\Leftrightarrow$$
$$\frac{\pi}{12}+\pi n<2x<\frac{5\pi}{12}+\pi n,\Leftrightarrow \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},n\in Z.$$

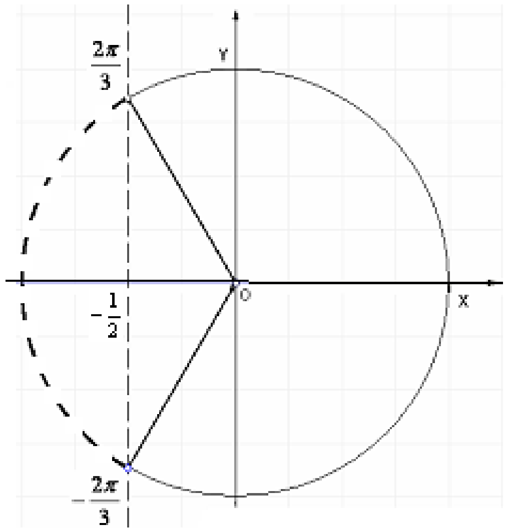
ІІ спосіб

Використаємо формулу пониження степеня $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. Тоді задана нерівність набуде вигляду: $\frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{2}<\frac{1}{4};\Leftrightarrow\ 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)<\frac{1}{2};\Leftrightarrow$ $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)<\frac{1}{2}-1;\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)>\frac{1}{2}$.

Застосувавши формулу зведення, отримаємо: $\sin 4x>\frac{1}{2}$, звідки $\frac{\pi}{6}+2\pi n<4x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, тоді $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Відповідь: $x\in\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right),n\in Z$.

Приклад 2. Розв’яжемо нерівність $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$.



Застосувавши формулу $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, отримаємо:

$$1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2x > 0.$$

Тоді

$$-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2x > -1, \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x > -1, \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x > -\frac{1}{2}.$$

Представимо $\frac{1}{2}$ як $\sin\frac{\pi}{6}$, а $\frac{\sqrt{3}}{2}$ як $\cos\frac{\pi}{6}$, тоді остання нерівність буде мати вигляд $\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x > -\frac{1}{2}$, звідки $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$, $\Rightarrow$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < 2x-\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4}+\pi k < x < \frac{5\pi}{12}+\pi k.$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{5\pi}{12}+\pi k\right), k \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжемо нерівність $\sin 4x - \cos 4x \cdot tg 2x \le \sqrt{3}.$

Виразимо і зведемо отримані вирази до спільного знаменника.

Оскільки $tg 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$, тоді

$$\sin 4x - \frac{\cos 4x \cdot \sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3}.$$

Скориставшись формулою $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, маємо:

$$\frac{\sin(4x-2x)}{\cos 2x} \le \sqrt{3}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \le \sqrt{3}, \quad \Leftrightarrow \quad tg 2x \le \sqrt{3}, \Leftrightarrow$$

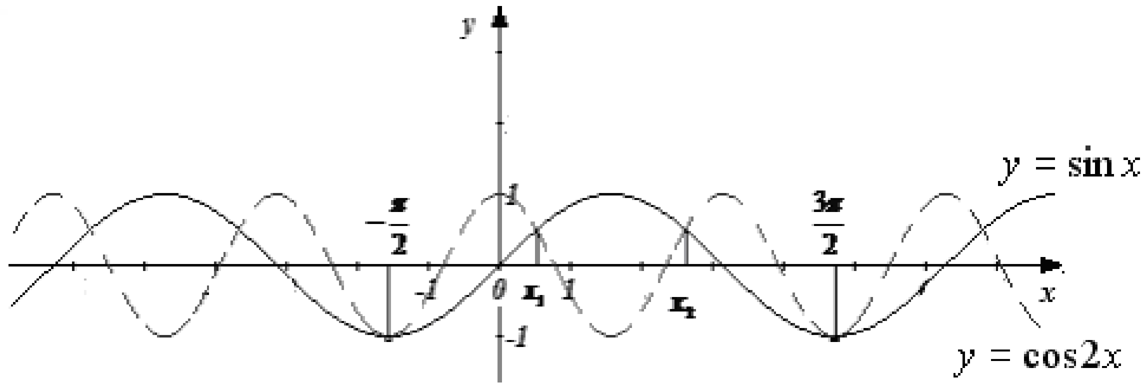
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < 2x \le \frac{\pi}{3}+\pi n, \quad \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x \le \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$.

Приклад 4. Розв'яжемо нерівність $\cos 2x \le \sin x$.

І спосіб

Розв'яжемо цю нерівність графічним способом. Для цього в одній системі координат побудуємо графіки функцій $y=\cos 2x$ і $y=\sin x$ і виберемо ті проміжки, на яких графік функції $y=\cos 2x$ лежить нижче графіка $y=\sin x$, або мають спільні точки.



Розв'язок буде складатися з проміжку [$x_1+2\pi n$, $x_2+2\pi n$] та точки $x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, де $n, k\in$Z.

Знайдемо x_1 та x_2: $\cos 2x=\sin x, \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=0, \Leftrightarrow x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{5\pi}{6}$,

звідки $x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $n, k\in$ Z.

II спосіб

Скористаємося формулою $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos 2x-\sin x\le 0, \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x\le 0,\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x+\sin x-1\ge 0$. Ввівши заміну $t=\sin x$, отримаємо нерівність $2t^2+t-1\ge 0$, звідки $t\in(-\infty;-1]\cup[0{,}5;+\infty)$, або $\left[\begin{array}{l} t\le -1, \\ t\ge 0{,}5. \end{array}\right.$

Повернувшись до змінної x, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} \sin x\le -1, \\ \sin x\ge 0{,}5. \end{array}\right.$

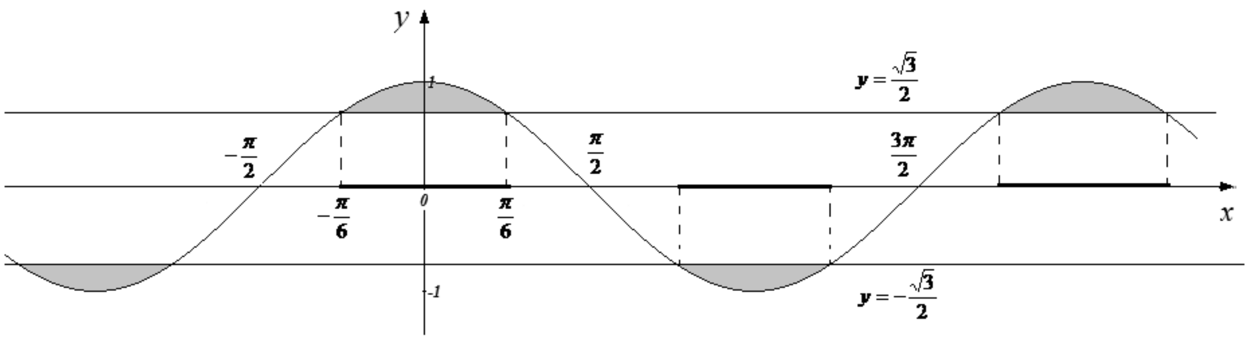
Враховуючи, що $|\sin x|\le 1$, перша нерівність перетвориться у рівняння $\sin x=-1$, звідки $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in$ Z. З другої нерівності отримаємо $x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in$ Z.

Відповідь: $x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $n, k\in$ Z.

Приклад 5. Розв’яжемо нерівність $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)>\frac{3}{4}$.

Дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)>\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$



$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<3x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{6}+\pi n,$$
$$\frac{\pi}{12}+\pi n<3x<\frac{5\pi}{12}+\pi n,$$
$$\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ \ n\in Z.$$

Відповідь: $x\in\left(\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3};\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z.$

Приклад 6. Розв’яжемо нерівність $\sin x+\sin 3x<\sin 2x+\sin 4x$.

Перенесемо всі члени нерівності, що містять невідоме, в одну частину, тоді одержимо: $\sin x+\sin 3x-\sin 2x-\sin 4x<0$.

Функція $f(x)=\sin x+\sin 3x-\sin 2x-\sin 4x$ має найменший додатний період, рівний 2π, тому досить знайти розв’язки цієї нерівності на відрізку [0; 2π], а потім з урахуванням періоду записати всю множину розв’язків.

Перетворивши за допомогою формули $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ліву частину попередньої нерівності в добуток, матимемо

$$-4\sin\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5x}{2}<0,\ \text{або}\ \sin\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{5x}{2}>0.$$

Знайдемо розв’язки останньої нерівності на відрізку [0; 2π]. Оскільки в проміжку [0; 2π] множник $\sin\frac{x}{2}>0$, то розв’язування вихідної нерівності зводиться до розв’язування нерівності $\cos x\cos\frac{5x}{2}>0$.

Для розв’язання останньої нерівності в проміжку [0; 2π] нанесемо нулі лівої частини цієї нерівності, тобто значення аргументу $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{5}$; π; $\frac{7\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{5}$. Можна легко переконатися, що вирази $\cos x$ та $\cos\frac{5x}{2}$ мають однакові знаки на проміжках: $x\in\left(0;\frac{\pi}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5}\right)\cup\left(\pi;\frac{7\pi}{5}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{9\pi}{5}\right)$, які позначено на рисунку.

$0 \quad \frac{\pi}{5} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{5} \quad \pi \quad \frac{7\pi}{5} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{9\pi}{5} \quad 2\pi \quad x$

$\cos x$	+	+	–	–	–	–	+	+
$\cos\frac{5x}{2}$	+	–	–	+	–	+	+	–

Тоді множина розв’язків початкової нерівності записується у вигляді:

$$x\in\left(2\pi k;\frac{\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k;\frac{7\pi}{5}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\frac{9\pi}{5}+2\pi k\right), k\in Z.$$

Приклад 7. Розв’яжемо систему нерівностей $\begin{cases}2^{\cos x}\ge 1,\\ \frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}>0.\end{cases}$

$$\begin{cases}2^{\cos x}\ge 2^0,\\ \frac{2x-2+2-x}{2(2-x)}>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \frac{x}{2(x-2)}<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z;\\ x\in(0;2).\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Відповідь: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Приклад 8. Розв’яжемо рівняння $\log_{\sin 3x}(\cos x-\cos 2x)=1$.

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} \cos x - \cos 2x > 0, \\ \sin 3x > 0, \\ \sin 3x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), \\ x \in \left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right), \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}. \end{cases}$, $n \in Z$.

$$\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = \log_{\sin 3x} \sin 3x, \quad \Leftrightarrow \quad \cos x - \cos 2x = \sin 3x, \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2} = 0, \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{3x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0. \end{array}\right.$$

Розв’язком першого рівняння буде $x_1 = \frac{2\pi m}{3}$, при $m \in Z$.

Розв’яжемо друге рівняння:

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 0, \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right) = 0, \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi m, \\ x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m. \end{array}\right.$$

Враховуючи ОДЗ, виключимо сторонні корені. Отримаємо $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in Z$.

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати тригонометричні нерівності:

1. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$**;**

2. $\cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x < -\sqrt{2}$**;**

3. $\cos^2\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}x\right) > \frac{1}{2}$**;**

4. $\sin 8x - \cos 8x \cdot tg 4x \leq 1$**;**

5. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) > 1$**;**

6. $\sin x + \sin 2x > 0$**;**

7. $\sin^4 x + \cos^4 x > \frac{5}{8}$**;**

8. $\sin^6 x + \cos^6 x \leq \frac{7}{16}$**;**

9. $(\cos x - \sin x)\sqrt{3x - x^2} \geq 0$**;**

10. $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$**,** якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Завдання для самоперевірки

Розв’язати тригонометричні нерівності:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\le\frac{1}{2}$ (відп.: $x\in\left[\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3};\frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}\right], n\in Z$);

2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x<\frac{1}{2}$ (відп.: $x\in\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right], n\in Z$);

3. $\sin^2 x-\cos^2 x-3\sin x+2<0$

(відп.: $x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$);

4. $tg^3x+3>3tgx+tg^2x$ (відп.: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$);

5. $\cos 2x+\cos x>0$ (відп.: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in$ Z);

6. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x<1$ (відп.: $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in$ Z);

7. $\sin 4x+\cos 4x\cdot ctg 2x>1$ (відп.: $x\in\left(\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in$ Z);

8. $2\sin^2\frac{x}{2}+\cos 2x<0$ (відп.: $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in$ Z);

9. $\cos^2 2x+\cos^2 x\le 1$ (відп.: $x\in\left[\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in$ Z);

10. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$

(відп.: $x\in\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5};\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right), n\in Z$).

Зразки завдань для модульного контролю

I варіант

1. Довести тотожність: $\dfrac{\sin 4\alpha - 1}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2} = -1$

2. Спростити: $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}} - \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, де $0^0 < \alpha < 90^0$.

3. Розв’язати рівняння:

а) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$; б) $\cos^4 x + \cos^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$;

в) $\sin 2x + 2\sin x + 2\cos x = 2$; г) $\cos 2x + \cos\dfrac{8x}{5} = 2$.

4. Розв’язати нерівності:

а) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) > \dfrac{3}{4}$; б) $\sin 2x + tgx \geq 2$.

5. Побудувати графіки функцій:

а) $f(x) = \sqrt[6]{\sin x - 1}$; б) $y = tg2x \cdot ctg2x$.

II варіант

1. Довести тотожність: $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot tg\dfrac{\alpha}{8}}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\alpha}{4} - 3\pi\right)\cdot tg\dfrac{\alpha}{8}} = tg\dfrac{\alpha}{8}$.

2. Спростити: $\dfrac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha}$.

3. Розв’язати рівняння:

а) $\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\cos x - \sin x = 4\cos x \cdot \sin^2 x$;

в) $\sin x + \sin 3x + \cos x = 0$; г) $\cos 2x + \cos\dfrac{8x}{5} = 2$.

4. Розв’язати нерівності:

а) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) > \dfrac{3}{4}$; б) $\sin 2x + tgx \geq 2$.

5. Побудувати графіки функцій:

а) $f(x) = -2\cos x + 1$; б) $y = tgx \cdot |\cos x|$.

III варіант

1. Довести тотожність: $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

2. Спростити:

а) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{2}\right)-4+4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$; **б)** $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}+2$.

3. Обчислити: $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-2\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-2\alpha\right)$.

4. Розв’язати рівняння:

а) $\sin^2\dfrac{5x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin^2 2x=2$; б) $2\cos^2\dfrac{x}{2}(1-\sin x)-\cos^2 x=0$.

5. Розв’язати нерівності:

а) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)\le -1$; б) $tg\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{3}\right)+\sqrt{3}\ge 0$.

6. Знайти амплітуду, частоту, період і початкову фазу гармонійного коливання, заданого формулою $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Побудувати графік цієї функції.

7. Побудувати графік функції: $y=\sin x+|\sin x|$.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1972.
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Радянська школа, 1991. – 224 с.
3. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Швацбург С.И. Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. – М.: Просвещение, 1986.
4. Вдовенко В.В., Сальник І.В., Шевченко Н.Г. Задачі заочної фізико-математичної школи: Навч.-метод. посіб. – Кіровоград: РВВКДПУ ім. В. Винниченка, 2008.
5. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. 11 клас / За ред. З.І. Слєпкань. – Х.: Гімназія, 2002.
6. Каплан Я.Л. Рівняння. – К.: Радянська школа, 1968.
7. Корнієнко Т.Л. Алгебра. 10-11 класи. Методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем: Розробки занять. – Х.: Ранок, 2010.
8. Макаренко О.І. Конкурсні завдання вступних іспитів з математики: Навч. посібник. – КНЕУ, 2004.
9. Макаричев Ю.М., Миндюк Н.Г., Нєшков К.І. Алгебра: Підручник для 9 класу середньої школи / За ред. С.О. Теляковського. – К.: Освіта, 1994.
10. Олешко Т.І., Ластівка І.О. Математика. Вступні завдання в НАУ. – К.: НАУ, 2005.
11. Петраков И.С. Математические кружки в 8 – 10 классах. – М.: Просвещение, 1987. – 224 с.
12. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: Учеб.-метод. Пособие. – М.: ОНИКС, Мир и образование, 2008.
13. Литвиненко Г.М., Федченко Л.Я., Швець В.О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 1. Алгебра та початки аналізу. – Львів: ВНТЛ, 1997.
14. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия. – М.: Просвещение, 1991.
15. Письменный Д.Т. Математика: пособие для старшеклассников. – К.: Станица, 1997.
16. Чудутов Ю.В. Тригонометричні рівняння. Методи розв'язування (в 3-х частинах). – К., 1995.
17. Ясінський В.В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ». – К.: НТУУ «КПІ», 2003.