УДК 004.655

**Буй Д. Б., Пузікова А. В.**

# АКСІОМАТИКА БАГАТОЗНАЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ТАБЛИЧНИХ БАЗ ДАНИХ: КОРЕКТНІСТЬ, ПОВНОТА, КРИТЕРІЙ ПОВНОТИ

***Анотація.*** *Розглядаються аксіоматика багатозначних залежностей в табличних базах даних і аксіоматика функціональних та багатозначних залежностей; встановлюється повнота цих аксіоматик через збіжність відношень синтаксичного та семантичного слідувань; наводяться критерії повноти вказаних аксіоматик в термінах потужностей (1) універсального домену* $D$*, який розглядається при інтерпретаціях, та (2) схеми* $R$*, яка є параметром всіх побудов, бо розглядаються тільки таблиці, схеми яких є підсхемами вказаної схеми* $R$*.*

***Ключові слова:*** *табличні бази даних, функціональні залежності, багатозначні залежності, повнота аксіоматики.*

**Аксіоматика багатозначних залежностей.** Всі неозначувані тут поняття та позначення використовуються в розумінні монографії [1]; зокрема, $s \mid X$ – обмеження рядка $s$ за множиною атрибутів $X$. Знак □ означає кінець формулювання або доведення, а знак ▫ – кінець логічної частини доведення.

Нехай $t$ – таблиця, $R$ – схема таблиці $t$ (скінченна множина атрибутів), $X$, $Y$, $W$, $Z$ – підмножини схеми $R$; $s$, $s_1$, $s_2$ – рядки таблиці $t$. В подальшому розгляді множина $R$ зафіксована, крім того, фіксується універсальний домен $D$ – множина, з якої атрибути приймають значення в інтерпретаціях.

Скажемо, що на таблиці $t$ схеми $R$ виконується багатозначна залежність (БЗЗ) (див., наприклад, [1]) $X \to\to Y$, якщо для двох довільних рядків $s_1$, $s_2$ таблиці $t$, які збігаються на множині атрибутів $X$, існує рядок $s_3 \in t$, який дорівнює об'єднанню обмежень рядків $s_1$, $s_2$ на множини атрибутів $X \bigcup Y$ і $R \setminus (X \bigcup Y)$ відповідно:

$$(X \to\to Y)(t) = true \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1, s_2 \in t(s_1 \mid X = s_2 \mid X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists s_3 \in t(s_3 = s_1 \mid (X \bigcup Y) \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Y))).$$

Отже, з семантичної точки зору БЗЗ – це параметричний предикат на таблицях схеми $R$, заданий двома (скінченними) множинами-параметрами атрибутів $X$, $Y$.

Структура таблиці $t$, на якій виконується БЗЗ $X \to\to Y$, може бути представлена за допомогою наступного відношення. Скажемо, що рядки $s_1$, $s_2$ таблиці $t$ знаходяться у відношенні $=_X$, якщо вони збігаються на множині атрибутів $X$:

$$s_1 =_X s_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} s_1 \mid X = s_2 \mid X .$$

Зрозуміло, що відношення $=_X$ є відношенням еквівалентності і тому розбиває множину рядків таблиці $t$ на класи еквівалентності, які мають наступне зображення:

$$[s]_{=X} = \{s \mid X\} \otimes \pi_Y([s]_{=X}) \otimes \pi_{R \setminus (X \bigcup Y)}([s]_{=X}),$$

де $s$ – довільний представник класу.

Скажемо, що таблиця $t(R)$ є *моделлю* множини БЗЗ $G$, якщо кожна БЗЗ $X \to\to Y \in G$ виконується на таблиці $t(R)$:

$$t(R) \text{ } \textit{модель} \text{ } G \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall (X \to\to Y)(X \to\to Y \in G \Rightarrow (X \to\to Y)(t) = true).$$

Вище і всюди далі запис $t(R)$ означає, що таблиця $t$ має схему $R$.

Виконуються наступні аксіоми і правила виведення [2].

*Аксіома рефлексивності:* $\forall t(X \to\to Y)(t) = true$, де $Y \subseteq X$.

*Аксіома:* $\forall t(X \to\to Y)(t) = true$, де $X \bigcup Y = R$.

Правило *повноти*: $(X \to\to Y)(t) = true \Rightarrow (X \to\to R \setminus (X \bigcup Y))(t) = true$.

Правило *поповнення*:

$(X \to\to Y)(t) = true \,\&\, Z \subseteq W \Rightarrow (X \bigcup W \to\to Y \bigcup Z)(t) = true$.

Правило *транзитивності:*
$(X \to\to Y)(t) = true \ \&(Y \to\to Z)(t) = true \Rightarrow (X \to\to Z \setminus Y)(t) = true$.

Побудуємо в якості приклада доведення для аксіоми рефлексивності.

*Доведення.* Розглянемо рядки $s_1$ і $s_2$ таблиці $t$, для яких виконується рівність $s_1 \mid X = s_2 \mid X$. Встановимо, що рядок $s_1 \mid (X \bigcup Y) \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Y)$ належить таблиці $t$, де $R$ – як і раніше схема таблиці $t$. Обмежимо обидві частини рівності $s_1 \mid X = s_2 \mid X$ за множиною $Y$: $(s_1 \mid X) \mid Y = (s_2 \mid X) \mid Y$. За властивістю оператора обмеження $\left((U|Y)|Z = U|(Y \cap Z)\right)$ згідно з [1, с. 24]) маємо $s_1|(X \cap Y) = s_2|(X \cap Y)$. Звідси і з умови $Y \subseteq X$ випливає $s_1|Y = s_2|Y$. З урахуванням дистрибутивності обмеження відносно об'єднання $(U \mid \bigcup_i X_i = \bigcup_i (U \mid X_i))$ (згідно з [1, с. 24]) маємо рівності:
$s_1 \mid (X \bigcup Y) \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Y) = s_1 \mid X \bigcup s_1 \mid Y \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Y) = s_2 \mid X \bigcup$
$\bigcup s_2 \mid Y \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Y) = s_2 \mid (X \bigcup Y \bigcup R \setminus (X \bigcup Y)) = s_2 \mid R = s_2$. □

Доведення інших аксіоми і правил виведення будується аналогічно.

Скажемо, що БЗЗ $X \to\to Y$ *семантично слідує* з множини БЗЗ $G$ за означенням, якщо на кожній таблиці $t(R)$, яка є моделлю множини БЗЗ $G$, виконується також БЗЗ $X \to\to Y$:

$$G \models X \to\to Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall t(R)(t \text{ модель } G \Rightarrow (X \to\to Y)(t) = true).$$

З наведених аксіом і правил виведення випливають наслідки.

**Лема 1**. Виконуються властивості відношення семантичного слідування:
1) $\varnothing \models X \to\to Y$ для $Y \subseteq X$;
2) $\varnothing \models X \to\to Y$ для $X \bigcup Y = R$;
3) $G \models X \to\to Y \Rightarrow G \models X \to\to R \setminus (X \bigcup Y)$;
4) $G \models X \to\to Y \ \& Z \subseteq W \Rightarrow G \models X \bigcup W \to\to Y \bigcup Z$;
5) $G \models X \to\to Y \ \& \ G \models Y \to\to Z \Rightarrow G \models X \to\to Z \setminus Y$;
6) $G \models X \to\to Y \ \& \ G \models Y \to\to Z \ \& Z \bigcap Y = \varnothing \Rightarrow G \models X \to\to Z$. □

*Доведення*. Твердження 1 і 2 виконуються тривіально з огляду на вказані вище аксіоми.

Побудуємо доведення для твердження 3. Нехай БЗЗ $X \to\to Y$ семантично слідує з множини БЗЗ $G$. Нехай таблиця $t$ – довільна модель множини БЗЗ $G$. Тоді за умовою $(X \to\to Y)(t) = true$. За правилом повноти $(X \to\to R \setminus (X \bigcup Y))(t) = true$. Отже, на довільній моделі множини БЗЗ $G$ виконується БЗЗ $X \to\to R \setminus (X \bigcup Y)$. Значить, за означенням семантичного слідування маємо $G \models X \to\to R \setminus (X \bigcup Y)$. ▫

Доведення тверджень 4-6 будується аналогічно. □

Скажемо, що БЗЗ $X \to\to Y$ *синтаксично слідує* з множини БЗЗ $G$ відносно схеми $R$ ($G \mid -_R X \to\to Y$), якщо існує скінченна послідовність БЗЗ $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, така, що $\varphi_m = X \to\to Y$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна $\varphi_i$ є або аксіома рефлексивності, або належить $G$, або отримана за яким-небудь правилом виведення (повноти, поповнення, транзитивності) для БЗЗ з попередніх у цій послідовності БЗЗ $\varphi_j, \varphi_k$, $j, k < i$ [1].

Послідовність $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$ назвемо доведенням, наслідуючи традиції математичної логіки [3].

Нехай задана деяка множина БЗЗ $G$. *Замиканням* $[G]_R$ називається множина БЗЗ, які синтаксично слідують з $G$ відносно схеми $R$:

$$[G]_R \overset{def}{=} \{X \to\to Y \mid G \mid -_R X \to\to Y\}.$$

Для спрощення позначень далі параметр $R$ явно вказувати не будемо.

**Лема 2**. Виконуються властивості:

1) $G \subseteq [G]$ (*зростання*);

2) $[[G]] = [G]$ (*ідемпотентність*);

3) $G \subseteq H \Rightarrow [G] \subseteq [H]$ (*монотонність*).□

[1] Зауважимо, що правила повноти та поповнення застосовуються до однієї БЗЗ, а правило транзитивності – до двох.

*Доведення*. Доведемо перше твердження. Нехай БЗЗ $X \to\to Y \in G$, тоді $G \mid -X \to\to Y$ оскільки послідовність одиничної довжини $X \to\to Y$ і є доведенням БЗЗ $X \to\to Y$. ▫

Доведемо друге твердження. За властивістю 1) маємо: $[G] \subseteq [[G]]$. Доведемо обернене включення $[[G]] \subseteq [G]$. Нехай $X \to\to Y$ – довільна БЗЗ, така, що $X \to\to Y \in [[G]]$. Тоді існує доведення $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \to\to Y$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна $\varphi_i$ є або аксіома рефлексивності, або належить $[G]$, або отримана за яким-небудь правилом виведення для БЗЗ з попередніх у цій послідовності БЗЗ $\varphi_j, \varphi_k$, $j, k < i$. Утворимо нову послідовність БЗЗ за такими правилами:

- якщо $\varphi_i$ є аксіома рефлексивності, то запишемо її без змін;
- якщо $\varphi_i \in [G]$, то за означенням замикання ця БЗЗ має скінченне доведення $\psi_1, ..., \psi_{l-1}, \psi_l$ з $G$; замість БЗЗ $\varphi_i$ вставимо це її доведення;
- якщо $\varphi_i$ отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності БЗЗ $\varphi_j, \varphi_k$, $j, k < i$, то запишемо її без змін.

Очевидно, побудована таким чином послідовність є доведенням БЗЗ $X \to\to Y$ з $G$, тобто $G \mid -X \to\to Y$, а отже $X \to\to Y \in [G]$. ▫

Доведемо третє твердження. Нехай $X \to\to Y$ – довільна БЗЗ, така, що $X \to\to Y \in [G]$. Тоді існує доведення $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \to\to Y$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна $\varphi_i$ є або аксіома рефлексивності, або належить $G$, або отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності БЗЗ $\varphi_j, \varphi_k$, $j, k < i$. Оскільки множина БЗЗ $G$ є підмножиною множини БЗЗ $H$, то, очевидно, що дане доведення є доведенням для БЗЗ $X \to\to Y$, виходячи з множини БЗЗ $H$: $X \to\to Y \in [H]$. ▫□

Таким чином, за термінологією [4] оператор $G \mapsto [G]$ є оператором замикання.

Зауважимо, що властивості оператора $G \mapsto [G]$, вказані в лемі 2, виконуються в аксіоматичних системах, де вводяться поняття аксіом та правил виведення (див., наприклад, [5]).

З описаних вище аксіоми рефлексивності і правил виведення будуються доведення похідних правил виведення для БЗЗ [2, 6].

Правило *псевдотранзитивності*:

$$\{X \to\to Y, Y \cup W \to\to Z\} \vdash X \cup W \to\to Z \setminus (Y \cup W).$$

Правила *різниці*:

a) $\{X \to\to Y\} \vdash X \to\to Y \setminus X$;

b) $\{X \to\to Y \setminus X\} \vdash X \to\to Y$;

c) $\{X \to\to Y\} \vdash X \to\to R \setminus Y$.

Правило *адитивності*: $\{X \to\to Y_1, X \to\to Y_2\} \vdash X \to\to Y_1 \cup Y_2$.

Правила *декомпозиції*:

a) $\{X \to\to Y_1, X \to\to Y_2\} \vdash X \to\to Y_1 \cap Y_2$;

b) $\{X \to\to Y_1, X \to\to Y_2\} \vdash X \to\to Y_1 \setminus Y_2$. □

Доведемо, наприклад, правило псевдотранзитивності.

*Доведення*. Побудуємо доведення для БЗЗ $X \cup W \to\to Z \setminus (Y \cup W)$, виходячи з БЗЗ $X \to\to Y$ та $Y \cup W \to\to Z$:

1. $X \to\to Y$ (вихідна БЗЗ);
2. $X \cup W \to\to Y \cup W$ (з 1 за правилом поповнення);
3. $Y \cup W \to\to Z$ (вихідна БЗЗ);
4. $X \cup W \to\to Z \setminus (Y \cup W)$ (з 2 і 3 за правилом транзитивності). □

Доведення правил різниці, адитивності та декомпозиції проводиться аналогічно.

**Лема 3**. Для $n = 2, 3, \ldots$ мають місце твердження:

1) $\{X \to\to Y_1, \ldots, X \to\to Y_n\} \vdash X \to\to Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$;

2) $\{X \to\to Y_1, \ldots, X \to\to Y_n\} \vdash X \to\to Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$. □

Доведення тверджень леми 3 проводиться індукцією по $n$, виходячи з правил адитивності та декомпозиції. □

**Аксіоматика багатозначних і функціональних залежностей.** Нагадаймо, що на таблиці $t$ виконується функціональна залежність (ФЗ) $X \to Y$, якщо для двох довільних рядків $s_1$, $s_2$ таблиці $t$, які збігаються на множині атрибутів $X$, має місце їх рівність і на множині атрибутів $Y$ (див., наприклад, [1]):

$$(X \to Y)(t) = true \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall s_1, s_2 \in t\left(s_1\middle|X = s_2\middle|X \Rightarrow s_1\middle|Y = s_2\middle|Y\right).$$

Нехай задані множини ФЗ $F$ і БЗЗ $G$. Скажемо, що таблиця $t(R)$ є *моделлю* множини $F \bigcup G$, якщо кожна залежність $\varphi \in F \bigcup G$ виконується на таблиці $t$:

$$t(R)\ \textit{модель}\ F \bigcup G \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varphi\ (\varphi \in F \bigcup G \Rightarrow \varphi(t) = true).$$

Для ФЗ та БЗЗ виконуються наступні спільні правила виведення [2].

1. Правило *розширення* ФЗ до БЗЗ:
$$(X \to Y)(t) = true \Rightarrow (X \to\to Y)(t) = true.$$
2. $(X \to\to Z)(t) = true$ & $(Y \to Z')(t) = true$ & $Z' \subseteq Z$ &
$Y \bigcap Z = \varnothing \Rightarrow\ \Rightarrow (X \to Z')(t) = true$.

Доведення правила розширення ФЗ до БЗЗ наведено, наприклад, у монографії [1, с. 73]).

Наведемо доведення спільного правила для ФЗ і БЗЗ з пункту 2.

*Доведення.* Нехай $s_1$ і $s_2$ – рядки таблиці $t$ такі, що $s_1 \mid X = s_2 \mid X$, і нехай на цій таблиці виконується БЗЗ $X \to\to Z$; звідси випливає існування в таблиці $t$ рядка $s_3 = s_1 \mid X \bigcup s_1 \mid Z \bigcup s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Z)$. Нехай для множини $Z' \subseteq Z$ на таблиці $t$ виконується ФЗ $Y \to Z'$, де $Y \bigcap Z = \varnothing$.

Покажемо спочатку, що для рядків $s_2$ і $s_3$ виконується рівність $s_2 \mid Y = s_3 \mid Y$. З рівностей $s_2 \mid X = s_3 \mid X$ (нагадаймо, що $s_1 \mid X = s_2 \mid X$ за припущенням і $s_1 \mid X = s_3 \mid X$ за побудовою рядка $s_3$) та $s_2 \mid R \setminus (X \bigcup Z) = s_3 \mid R \setminus (X \bigcup Z)$ (за побудовою рядка $s_3$) маємо рівність

$s_2 | (R \setminus (X \bigcup Z) \bigcup X) = s_3 | (R \setminus (X \bigcup Z) \bigcup X)$, тобто[2] $s_2 | (R \setminus Z \bigcup X) = s_3 | (R \setminus Z \bigcup X)$; звідси з урахуванням включення $R \setminus Z \subseteq R \setminus Z \bigcup X$ маємо рівність $s_2 | (R \setminus Z) = s_3 | (R \setminus Z)$. Оскільки за умовою $Y \bigcap Z = \varnothing$, то $Y \subseteq R \setminus Z$, а отже, $s_2 | Y = s_3 | Y$.

За умовою $(Y \to Z')(t) = true$, отже, $s_2 | Z' = s_3 | Z'$. Оскільки $s_1 | Z = s_3 | Z$ (за побудовою рядка $s_3$), то з включення $Z' \subseteq Z$ випливає рівність $s_1 | Z' = s_3 | Z'$. Таким чином для рядків $s_1$ і $s_2$, які збігаються на множині атрибутів $X$, маємо рівність $s_1 | Z' = s_2 | Z'$. Отже ФЗ $X \to Z'$ виконується на таблиці $t$. □

Скажемо, що ФЗ або БЗЗ $\varphi$ *семантично слідує* з множини залежностей $F \bigcup G$ відносно схеми $R$, якщо на кожній таблиці $t(R)$, яка є моделлю множини залежностей $F \bigcup G$, виконується також залежність $\varphi$:

$$F \bigcup G \models \varphi \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall t(R)(t(R) - \textit{модель } F \bigcup G \Rightarrow \varphi(t) = true).$$

Наслідками з спільних правил виведення для ФЗ і БЗЗ є наступні властивості відношення семантичного слідування:

1) $F \models X \to Y \Rightarrow F \models X \to\to Y$;
2) $G \models X \to\to Z \ \& \ F \models Y \to Z' \ \& \ Z' \subseteq Z \ \& \ Y \bigcap Z = \varnothing \Rightarrow F \bigcup G \models X \to Z'$.

**Лема 4**. Нехай $H_1$ і $H_2$ – множини залежностей (ФЗ або БЗЗ), і нехай $T_1$ і $T_2$ відповідно множини всіх їх моделей. Тоді виконується імплікація $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow T_1 \supseteq T_2$. □

*Доведення.* Нехай таблиця $t \in T_2$, тобто $t$ – модель $H_2$. Очевидно, що

---

[2] Треба врахувати ланцюжок загальнозначних теоретико-множинних рівностей $R \setminus (X \bigcup Z) \bigcup Z = (R \setminus X \bigcap R \setminus Z) \bigcup Z = (R \setminus X \bigcup Z) \bigcap \bigcap (R \setminus Z \bigcup Z) = (R \setminus X \bigcup Z) \bigcap R = R \setminus X \bigcup Z$ (де операція різниці має більший пріоритет).

таблиця $t$ – модель $H_1$ і тому $t \in T_1$. □

**Наслідок 1**. Виконуються властивості відношення семантичного слідування:

1) $F \models \varphi \Rightarrow F \bigcup G \models \varphi$;

2) $G \models \varphi \Rightarrow F \bigcup G \models \varphi$. □

*Доведення*. Доведемо перше твердження. Нехай $F \models \varphi$, тоді $\varphi$ виконується на кожній моделі множини ФЗ $F$. Оскільки $F \subseteq F \bigcup G$, то за лемою 4 кожна модель множини $F \bigcup G$ є також моделлю множини $F$, отже, $F \bigcup G \models \varphi$. ▫

Доведення імплікації $G \models \varphi \Rightarrow F \bigcup G \models \varphi$ проводиться аналогічно. ▫□

Зрозуміло, що аналоги леми 4 та її наслідка 1 виконуються в теорії моделей аксіоматичних систем [3, 5] (це проявляється, зокрема, в тому, що в доведеннях леми та її наслідку по суті не використовувалася специфіка залежностей та таблиць).

**Лема 5**. Виконуються властивості відношення семантичного слідування:

1) $F \models X \to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \bigcup Z \to Y \bigcup Z$, де $Z \subseteq R$;

$F \bigcup G \models X \to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \bigcup Z \to Y \bigcup Z$, де $Z \subseteq R$;

2) $F \models X \to Y \,\&\, F \models Y \to Z \Rightarrow F \bigcup G \models X \to Z$;

$F \bigcup G \models X \to Y \,\&\, F \bigcup G \models Y \to Z \Rightarrow F \bigcup G \models X \to Z$;

3) $G \models X \to\to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to R \setminus (X \bigcup Y)$;

$F \bigcup G \models X \to\to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to R \setminus (X \bigcup Y)$;

4) $G \models X \to\to Y \,\&\, Z \subseteq W \Rightarrow F \bigcup G \models X \bigcup W \to\to Y \bigcup Z$;

$F \bigcup G \models X \to\to Y \,\&\, Z \subseteq W \Rightarrow F \bigcup G \models X \bigcup W \to\to Y \bigcup Z$;

5) $G \models X \to\to Y \,\&\, G \models Y \to\to Z \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to Z \setminus Y$;

$F \bigcup G \models X \to\to Y \,\&\, F \bigcup G \models Y \to\to Z \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to Z \setminus Y$;

6) $F \models X \to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to Y$;

$F \bigcup G \models X \to Y \Rightarrow F \bigcup G \models X \to\to Y$;

7) $F \bigcup G \models X \to\to Z$ & $F \bigcup G \models Y \to Z'$ & $Z' \subseteq Z$ & $Y \bigcap Z = \varnothing \Rightarrow$
$F \bigcup G \models X \to Z'$. □

Скажемо, що ФЗ або БЗЗ $\varphi$ *синтаксично слідує* з об'єднання множин ФЗ і БЗЗ $F \bigcup G$ відносно схеми $R$ ($F \bigcup G \mid -_R \varphi$), якщо існує скінченна послідовність ФЗ або БЗЗ $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, така, що $\varphi_m = \varphi$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна $\varphi_i$ є або аксіома рефлексивності (для ФЗ або БЗЗ), або належить $F \bigcup G$, або отримана за яким-небудь правилом виведення (повноти (для БЗЗ), поповнення (для ФЗ або БЗЗ), транзитивності (для ФЗ або БЗЗ), спільних правил для ФЗ і БЗЗ) з попередніх у цій послідовності ФЗ або БЗЗ $\varphi_j, \varphi_k$, $j, k < i$.

Як і раніше, послідовність $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$ назвемо доведенням $\varphi$ з об'єднання множин $F \bigcup G$.

Нехай задані деякі множини $F$ і $G$ ФЗ та БЗЗ відповідно. *Замикання* $[F \bigcup G]_R$ – це множина усіх ФЗ і БЗЗ, які синтаксично слідують з $F \bigcup G$ відносно схеми $R$:

$$[F \bigcup G]_R \stackrel{def}{=} \{\varphi \mid F \bigcup G \mid - \varphi\}.$$

**Лема 6**. Виконуються властивості:

1) $F \bigcup G \subseteq [F \bigcup G]$ (*зростання*);

2) $[[F \bigcup G]] = [F \bigcup G]$ (*ідемпотентність*);

3) $F' \bigcup G' \subseteq F \bigcup G \Rightarrow [F' \bigcup G'] \subseteq [F \bigcup G]$[3] (*монотонність*);

4) $[F] \subseteq [F \bigcup G]$, $[G] \subseteq [F \bigcup G]$;

5) $[F] \bigcup [G] \subseteq [F \bigcup G]$. □

*Доведення.* Доведення тверджень 1-3 проводиться аналогічно до доведення відповідних пунктів леми 2.

---

[3] Зауважимо, що оскільки множини ФЗ і БЗЗ не перетинаються, то включення $F' \bigcup G' \subseteq F \bigcup G$ еквівалентне кон'юнкції включень вигляду $F' \subseteq F$ & $G' \subseteq G$.

Доведемо твердження 4. Дійсно, за твердженням 3 з включень $F \subseteq F \bigcup G$ і $G \subseteq F \bigcup G$ випливають відповідно включення $[F] \subseteq [F \bigcup G]$ і $[G] \subseteq [F \bigcup G]$. ▫

Твердження 5 випливає безпосередньо з твердження 4: $[F] \subseteq [F \bigcup G]$ & $[G] \subseteq [F \bigcup G] \Rightarrow [F] \bigcup [G] \subseteq [F \bigcup G]$. ▫□

З тверджень 1-3 леми 6 випливає, що оператор $F \bigcup G \mapsto [F \bigcup G]_R$ є оператором замикання.

Вкажемо ще одне спільне правило для БЗЗ і ФЗ [2]:

$\{X \to\to Y, X \bigcup Y \to Z\} |- \ X \to Z \setminus Y$.

*Замиканням* $[X]_{F \bigcup G, R}$ множини атрибутів $X$ (відносно множини залежностей $F \bigcup G$ і схеми $R$) називається сім'я усіх правих частин БЗЗ, які синтаксично слідують з множини $F \bigcup G$:

$$[X]_{F \bigcup G, R} \overset{def}{=} \{Y \mid X \to\to Y \in [F \bigcup G]_R\}.$$

Очевидно, що $[X]_{F \bigcup G, R} \neq \varnothing$, оскільки, наприклад, $X \in [X]_{F \bigcup G, R}$, (бо $X \to\to X$, $X \to X$ є аксіомами рефлексивності); можна посилити останнє твердження: насправді виконується включення $2^X \subseteq [X]_{F \bigcup G, R}$, де $2^X$ – булеан множини атрибутів $X$.

Нехай $[X]_F$ – замикання множини атрибутів $X$ відносно множини ФЗ $F$ [6]. Зауважимо, що за означенням $[X]_F \subseteq R$.

**Лема 7**. Виконуються властивості:

1) $Y \subseteq [X]_F \Rightarrow Y \in [X]_{F \bigcup G, R}$;

2) $[X]_{F \bigcup G, R} = [[X]_F]_{F \bigcup G, R}$. □

*Доведення*. Для доведення першого твердження леми побудуємо доведення БЗЗ $X \to\to Y$, виходячи з множини залежностей $F \bigcup G$. Дійсно, маємо:

1. доведення ФЗ $X \to [X]_F$ з $F$ ([7], лема 9);

2. $[X]_F \to Y$ (аксіома рефлексивності для ФЗ; нагадаймо, що за припущенням $Y \subseteq [X]_F$);
3. $X \to Y$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності для ФЗ);
4. $X \to\to Y$ (з 3 за правилом розширення ФЗ до БЗЗ).

Отже, за означенням замикання $[X]_{F \bigcup G,R}$ множина $Y$ йому належить. ▫

Доведемо друге твердження. Нехай $Y \in [X]_{F \bigcup G,R}$, покажемо, що $Y \in [[X]_F]_{F \bigcup G,R}$. За означенням замикання $[X]_{F \bigcup G,R}$ існує доведення БЗЗ $X \to\to Y$ з множини залежностей $F \bigcup G$. Побудуємо доведення БЗЗ $[X]_F \to\to Y$ з множини залежностей $F \bigcup G$.

1. $[X]_F \to\to X$ (аксіома рефлексивності для БЗЗ; нагадаймо, що $X \in [X]_F$ згідно [7, лема 9]);
2. доведення БЗЗ $X \to\to Y$ з $F \bigcup G$, яке існує за припущенням;
3. $[X]_F \to\to Y \setminus X$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності для БЗЗ);
4. $[X]_F \to\to Y$ (з 3 за правилом поповнення для БЗЗ в результаті спрощення БЗЗ $[X]_F \bigcup (X \bigcap Y) \to\to Y \setminus X \bigcup (X \bigcap Y)$; дійсно, $Y \setminus X \bigcup (X \bigcap Y) = Y$; $[X]_F \bigcup (X \bigcap Y) = [X]_F$, оскільки $X \bigcap Y \subseteq [X]_F$).

Отже, маємо належність $Y \in [[X]_F]_{F \bigcup G,R}$. ▫

Нехай тепер $Y \in [[X]_F]_{F \bigcup G,R}$, покажемо, що $Y \in [X]_{F \bigcup G,R}$. За означенням замикання $[[X]_F]_{F \bigcup G,R}$ існує доведення БЗЗ $[X]_F \to\to Y$ з множини залежностей $F \bigcup G$. Побудуємо доведення БЗЗ $X \to\to Y$ з множини залежностей $F \bigcup G$.

1. доведення ФЗ $X \to [X]_F$ з $F$ ([7], лема 9);
2. $X \to\to [X]_F$ (з 1 за правилом розширення ФЗ до БЗЗ);
3. доведення БЗЗ $[X]_F \to\to Y$ з множини $F \bigcup G$, яке існує за

припущенням;

4. $X \to\to Y \setminus [X]_F$ (з останніх БЗЗ в послідовностях доведень пунктів 2 і 3 за правилом транзитивності для БЗЗ);
5. $[X]_F \to [X]_F \cap Y$ (аксіома рефлексивності для ФЗ);
6. $X \to [X]_F \cap Y$ (з 1 і 5 за правилом транзитивності для ФЗ);
7. $X \to\to [X]_F \cap Y$ (з 6 за правилом розширення ФЗ до БЗЗ);
8. $X \to\to Y$ (з 4 і 7 за правилом адитивності для БЗЗ в результаті спрощення правої частин БЗЗ $X \to\to (Y \setminus [X]_F) \cup ([X]_F \cap Y)$.

Отже, $Y \in [X]_{F \cup G,R}$. ▫□

Зауважимо, що оператор $X \mapsto [X]_{F \cup G,R}$ не є оператором замикання; для обґрунтування достатньо вказати, що даний оператор не володіє властивістю ідемпотентності (поняття множини атрибутів і замикання множини атрибутів відносно об'єднання множин ФЗ і БЗЗ $F \cup G$ та схеми $R$ мають різну природу, тому вираз $[[X]_{F \cup G}]_{F \cup G,R}$ просто не має сенсу).

*Базисом* $[X]^{bas}_{F \cup G,R}$ множини атрибутів $X$ відносно множини залежностей $F \cup G$ і схеми $R$ називається підсім'я замикання $[X]_{F \cup G,R}$, така, що:

1) $\forall W (W \in [X]^{bas}_{F \cup G,R} \Rightarrow W \neq \varnothing)$ (тобто базис містить тільки непорожні множини атрибутів);
2) $\forall W_i W_j (W_i W_j \in [X]^{bas}_{F \cup G,R} \,\&\, W_i \neq W_j \Rightarrow W_i \cap W_j = \varnothing)$ (тобто різні множини атрибутів базису не перетинаються);
3) $\forall Y (Y \in [X]_{F \cup G,R} \Rightarrow \exists \Im (\Im \subseteq [X]^{bas}_{F \cup G,R} \,\&\, \Im$ – скінченна & $\& \, Y = \bigcup_{W \in \Im} W$ ) (тобто кожна множина атрибутів з замикання $[X]_{F \cup G,R}$ є скінченним об'єднанням деяких множин атрибутів з базису).

**Лема 8**. Виконуються властивості:

1) $\bigcup_{W\in[X]_{F\cup G,R}^{bas}} W = R$ для $X \subseteq R$ (тобто базис є розбиттям множини атрибутів $R$);

2) $A\in[X]_F \Rightarrow \{A\}\in[X]_{F\cup G,R}^{bas}$. □

*Доведення*. Доведемо перше твердження. Покажемо спочатку, що $\bigcup_{Y\in[X]_{F\cup G,R}} Y = R$. Оскільки сім'я множин $[X]_{F\cup G,R}$ непорожня, то виберемо множину $Y\in[X]_{F\cup G,R}$, тобто $X \to\to Y\in[F\cup G]_R$, тоді за правилом повноти $X \to\to R\setminus(X\cup Y)\in[F\cup G]_R$; отже, $R\setminus(X\cup Y)\in[X]_{F\cup G,R}$. Врахувавши, що $X\in[X]_{F\cup G,R}$ ($X\to\to X$ є аксіомою рефлексивності), маємо $\bigcup_{Z\in[X]_{F\cup G,R}} Z \supseteq Y\cup X\cup R\setminus(X\cup Y)=R$. Залишається врахувати тривіальне включення $\bigcup_{Z\in[X]_{F\cup G,R}} Z \subseteq R$. ▫

Отже, сім'я $[X]_{F\cup G,R}$ є покриттям схеми $R$. Для завершення доведення першого твердження леми 8 залишається скористатися п. 3 з означення базису. ▫

Доведемо друге твердження. Побудуємо доведення для БЗЗ $X\to\to\{A\}$, де $A\in[X]_F$:

1. доведення ФЗ $X\to[X]_F$ з $F$ ([7], лема 9);
2. $[X]_F\to\{A\}$ (за аксіомою рефлексивності для ФЗ; нагадаймо, що $A\in[X]_F$);
3. $X\to\{A\}$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності для ФЗ);
4. $X\to\to\{A\}$ (з 3 за правилом розширення ФЗ до БЗЗ),

отже, $\{A\}\in[X]_{F\cup G,R}$.

Покажемо тепер, що $\{A\}\in[X]_{F\cup G,R}^{bas}$. Ідея доведення полягає в тому, що сінглітон $\{A\}$ представити у вигляді об'єднання непорожніх підмножин можна єдиним способом $\{A\}=\bigcup_{B=A}\{B\}$.

Більш формальне доведення проводиться від супротивного. Нехай

$\{A\} \notin [X]^{bas}_{F \bigcup G,R}$. За п. 3 означення базису існують такі різні елементи базису $W_1,...,W_n$, що $\{A\} = W_1 \bigcup ... \bigcup W_n$. Оскільки всі $W_1,...,W_n$ непорожні та $W_1,...,W_n$ попарно не перетинаються, то, очевидно, що $n = 1$ та $\{A\} = W_1$; прийшли до суперечності. ▫□

**Коректність та повнота аксіоматики ФЗ та БЗЗ**. Нехай $\varphi$ – ФЗ або БЗЗ.

*Твердження 1* (коректність аксіоматики БЗЗ і ФЗ). Якщо залежність $\varphi$ синтаксично виводиться з множини залежностей $F \bigcup G$, то $\varphi$ виводиться з $F \bigcup G$ семантично:

$$F \bigcup G \mid - \varphi \Rightarrow F \bigcup G \models \varphi . \square$$

*Доведення*. Доведення проводиться індукцією за довжиною доведення.

Базис індукції. Довжина доведення дорівнює одиниці. Тобто залежність $\varphi$ є або тривіальною (ФЗ або БЗЗ) або $\varphi \in F \bigcup G$. В обох випадках (для першого треба скористатися п. 1 леми 1 для БЗЗ або наслідком 1 роботи [7] для ФЗ) виконується $F \bigcup G \models \varphi$.▫

Індуктивний крок. Нехай $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, $m \geq 2$, доведення залежності $\varphi$ (ФЗ або БЗЗ), виходячи з множини $F \bigcup G$. Розглянемо всі можливі випадки для останнього елемента доведення $\varphi_m$, де $\varphi_m$ – ФЗ або БЗЗ.

Випадок, коли $\varphi_m$ є або тривіальною (ФЗ або БЗЗ) або належить $F \bigcup G$, розглядається повністю аналогічно як в базисі індукції. ▫

Нехай $\varphi_m$ – ФЗ, яка отримується з ФЗ $\varphi_i$, де $i < m$ за правилом поповнення. Очевидно, що $F \bigcup G \mid - \varphi_i$, за індуктивним припущенням маємо $F \bigcup G \models \varphi_i$. Залишається скористатися п. 1 леми 5. ▫

Аналогічно розглядаються випадки, коли:

– $\varphi_m$ – ФЗ, яка отримується з попередніх ФЗ доведення за правилом транзитивності (використовується п. 2 леми 5);
– $\varphi_m$ – БЗЗ, яка отримується з БЗЗ $\varphi_i$, де $i < m$, за правилами повноти або поповнення (використовуються п. 3 леми 5 для правила повноти

або п. 4 леми 5 для правила поповнення);

- $\varphi_m$ – БЗЗ, яка отримується з попередніх БЗЗ доведення за правилом транзитивності (використовується п. 5 леми 5);
- $\varphi_m$ – БЗЗ, яка отримується з ФЗ $\varphi_i$, де $i<m$, за правилом розширення ФЗ до БЗЗ (використовується п. 6 леми 5);
- $\varphi_m$ – ФЗ, яка отримується з попередніх БЗЗ $\varphi_i$ і ФЗ $\varphi_j$ за спільним правилом для ФЗ і БЗЗ (використовується п. 7 леми 5). ▫□

*Твердження 2* (повнота аксіоматики БЗЗ і ФЗ). Якщо залежність $\varphi$ семантично виводиться з множини залежностей $F\bigcup G$, то $\varphi$ виводиться з $F\bigcup G$ синтаксично за умови $|R|\geq 2$ та $|D|\geq 2$ [4] (при розгляді моделей):

$$F\bigcup G\models\varphi\Rightarrow F\bigcup G\mid-\varphi. \square$$

Доведення твердження 2 в даній роботі не наводиться, оскільки його детальне викладення є досить громіздким.

**Теорема 1**. Відношення семантичного та синтаксичного слідування для аксіоматики БЗЗ та ФЗ за умови $|D|\geq 2$ та $|R|\geq 2$ збігаються:

$$F\bigcup G\models\varphi\Leftrightarrow F\bigcup G\mid-\varphi. \square$$

Доведення випливає безпосередньо з тверджень 1 і 2.

Аналогічна теорема має місце і для аксіоматики БЗЗ (для аксіоматики ФЗ див. [7]).

**Критерій повноти аксіоматики ФЗ і БЗЗ**. Аналіз доведення основного результату про збіжність відношень синтаксичного та семантичного слідування для аксіоматики БЗЗ та ФЗ (теорема 1) показує, що воно проведено в припущенні: $|D|\geq 2$ та $|R|\geq 2$.

Залежність збіжності відношень синтаксичного та семантичного слідувань при різних значеннях потужностей множин $R$ та $D$ вказана відповідно у табл. 1 і табл. 2. Символ “+” (відповідно “–”) в комірці означає, що при вказаних припущеннях відношення $\models$ та $\mid-$ збігаються (не збігаються відповідно).

[4] Подробиці див. далі.

Табл. 1. Всі варіанти потужностей множин $R$ та $D$ для аксіоматики БЗЗ

| D \ R | $\|R\|=0$ | $\|R\|=1$ | $\|R\|\geq 2$ |
|---|---|---|---|
| $\|D\|=0$ | + | + | – |
| $\|D\|=1$ | + | + | – |
| $\|D\|\geq 2$ | + | + | + |

Табл. 2. Всі варіанти потужностей множин $R$ та $D$ для аксіоматики БЗЗ та ФЗ

| D \ R | $\|R\|=0$ | $\|R\|=1$ | $\|R\|\geq 2$ |
|---|---|---|---|
| $\|D\|=0$ | + | – | – |
| $\|D\|=1$ | + | – | – |
| $\|D\|\geq 2$ | + | + | + |

З наведених таблиць випливають наступні основні результати.

**Теорема 2**. Відношення семантичного $\models$ та синтаксичного $\vdash$ слідувань для аксіоматики БЗЗ співпадають тоді і тільки тоді, коли $|R| \leq 1$ або $|R| \geq 2$ та при цьому $|D| \geq 2$. □

**Теорема 3**. Відношення семантичного $\models$ та синтаксичного $\vdash$ слідувань для аксіоматики БЗЗ і ФЗ співпадають тоді і тільки тоді, коли $|D| \geq 2$ або $|R| = 0$. □

**Висновки**. В роботі розглянута аксіоматика багатозначних залежностей в табличних базах даних і аксіоматика функціональних та багатозначних залежностей; встановлені критерії повноти цих аксіоматик в термінах потужностей універсального домену та множини атрибутів. Наступний крок полягає в дослідженні незалежності аксіом та правил виведення для розглянутих аксіоматизацій.

1. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – Київ : Видавничий дім «Академперіодика», 2001. – 198 с.
2. *Beeri C.* A complete axiomatization for functional and multivalued dependencies / C. Beeri, R. Fagin, J. Howard // Proceedings of the ACM-SIGMOD Conference, August 3-5, 1977, Toronto, Canada. – P. 47-61.
3. *Линдон Р.* Заметки по логике / Р. Линдон. – Москва : Мир, 1968. – 128 с.

4. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур / Л. А. Скорняков. – Москва : Наука, 1982. – 160 с.
5. *Шенфильд Дж.* Математическая логика / Дж. Шенфилд. – Москва : Наука, 1975. – 529 с.
6. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва : Мир, 1987. – 608 с.
7. *Буй Д. Б.* Повнота аксіоматики Армстронга / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, № 3, 2011. – С.103-108.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ
*E-mail:* buy@unicyb.kiev.ua
anna_inf@mail.ru

*Надійшла 31.01.2015*

**Буй Д. Б., Пузикова А. В.**
АКСИОМАТИКА МНОГОЗНАЧНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТАБЛИЧНЫХ БАЗ ДАННЫХ: КОРРЕКТНОСТЬ, ПОЛНОТА, КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ
***Аннотация.*** *Рассматриваются аксиоматика многозначных зависимостей в табличных базах данных и аксиоматика функциональных и многозначных зависимостей; устанавливается полнота этих аксиоматик в терминах совпадения отношений синтаксического и семантического следований; приводятся критерии полноты указанных аксиоматик в терминах мощностей (1) универсального домена* $D$*, который рассматривается в интерпретациях, и (2) схемы* $R$*, которая является параметром всех построений, поскольку рассматриваются только таблицы, схемы которых являются подсхемами указанной схемы* $R$.
***Ключевые слова:*** *табличные базы данных, функциональные зависимости, многозначные зависимости, полнота аксиоматики.*

**Bui D. B., Puzikova A. V.**
AXIOMATIC SYSTEM FOR MULTIVALUED DEPENDENCIES IN TABLE DATABASES: CORRECTNESS, COMPLETENESS, COMPLETENESS CRITERION
***Annotation.*** *Axiomatic system for multivalued dependencies in table databases and axiomatic system for functional and multivalued dependencies are reviewed; the completeness of these axiomatic systems is established in terms of coincidence of syntactic*

*and semantic consequence relations; the completeness criteria for these axiomatic systems are formulated in terms of cardinalities (1) of the universal domain* $D$ *, which is considering in interpretations, and (2) the scheme* $R$ *, which is a parameter of all constructions, because only the tables with schemes which are subschemas of this scheme* $R$ *are considering.*

***Keywords:*** *table databases, functional dependencies, multivalued dependencies, completeness of axiomatic system.*