УДК 004.658.2

НЕЗАЛЕЖНІСТЬ АКСІОМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ АРМСТРОНГА

Буй Дмитро, Пузікова Анна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація

У роботі показано, що аксіоматика Армстронга щодо функціональних залежностей, яка складається з аксіоми рефлексивності та двох правил виведення, є незалежною в тому розумінні, що без втрати повноти не можна опустити ні єдину аксіому, ні жодне з правил виведення.

Abstract

It is shown that Armstrong's axiomatic system (as for the functional dependences of relational databases), which consist of the axiom of reflexivity and two inference rules is independent, i.e. completeness of Armstrong's axiomatic system is violated if removed one of its components.

В попередніх роботах авторів було побудовано строге та повне доведення повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке наслідує традиції встановлення повноти аксіоматичних систем в математичній логіці: введені відношення синтаксичного та семантичного слідування та показана їх збіжність [1], а також наведено критерій повноти аксіоматики Армстронга в термінах потужностей множини атрибутів та універсального домена [2].

Метою даної роботи є доведення незалежності складових аксіоматики Армстронга.

Аксіоматика Армстронга при зафіксованій множині атрибутів R складається з:

$-$аксіом рефлексивності $X \to Y$, $Y \subseteq X$;

$-$правил поповнення $\dfrac{X \to Y}{X \bigcup Z \to Y \bigcup Z}$ для $Z \subseteq R$;

$-$правил транзитивності $\dfrac{X \to Y, Y \to Z}{X \to Z}$.

Лема 1. Аксіома рефлексивності є незалежною від правил виведення аксіоматики Армстронга.

Доведення є тривіальним, оскільки інших аксіом в аксіоматиці Армстронга немає.

Лема 2. Правила транзитивності є незалежними від аксіом рефлексивності і правил поповнення.

Доведення. Для доведення достатньо вказати множину ФЗ F, для якої $[F]_{|-tr} \subset [F]_{|-}$, де $[F]_{|-tr}$ – замикання множини ФЗ F, побудоване за допомогою аксіом рефлексивності і правил поповнення, а $[F]_{|-}$ – замикання множини ФЗ F відносно всіх аксіом і правил виведення.

Зафіксуємо множини атрибутів X, Y, Z, причому $X \bigcap Z = \varnothing$ і розглянемо множину ФЗ F, яка задовольняє умовам $\forall Y \subseteq R(X \to Y \in F \wedge Y \to Z \in F \Rightarrow X \to Z \notin F)$.

Покажемо, що ФЗ $X \to Z$ не може бути виведена лише із застосуванням аксіом рефлексивності та правил поповнення.

Оскільки $Z \bigcap X = \varnothing$, то $Z \not\subseteq X$, отже, ФЗ $X \to Z$ не є тривіальною. ▫

Припустимо, що ФЗ $X \to Z$ отримана з деякої ФЗ $U \to V$ за правилом поповнення, тобто існує така множина атрибутів $W \neq \varnothing$, що $U \bigcup W = X$ і $V \bigcup W = Z$. Тоді $Z \bigcap X = (V \bigcup W) \bigcap (U \bigcup W) \subseteq W \neq \varnothing$, що суперечить умові $Z \bigcap X = \varnothing$.

Таким чином, для вказаної множини ФЗ F ФЗ $X \to Z$ не може бути отримана за аксіомами рефлексивності і правилами поповнення, отже, $[F]_{|-tr} \subset [F]_{|-}$ і правило транзитивності є незалежним.

Лема 3. Правило поповнення є незалежним від аксіом рефлексивності і правил транзитивності.

Доведення. Розглянемо множину ФЗ $F = \{X \to \{A\} \mid A \notin X \wedge X \neq \varnothing\}$. Покажемо, що ФЗ вигляду $X \to X \bigcup \{A\}$, де $A \notin X$ і $X \neq \varnothing$, не можна вивести лише із застосуванням аксіом рефлексивності і правил транзитивності.

Припустимо, що ФЗ $X \to X \bigcup \{A\} \in F$, тоді її права частина є одноелементною множиною. Останнє виконується, якщо:

- $A \in X$ і $X = \{A\}$;
- $A \notin X$ і $X = \varnothing$.

Кожен з зазначених випадків суперечить означенню множини ФЗ F. Отже, $X \bigcup \{A\}$ не є одноелементною множиною і ФЗ $X \to X \bigcup \{A\}$ не належить множині F.

Оскільки $A \notin X$, то ФЗ $X \to X \bigcup \{A\}$ не є тривіальною.

Припустимо, ФЗ $X \to X \bigcup \{A\}$ отримана за правилами транзитивності. Враховуючи, що

1) множина тривіальних ФЗ замкнена відносно правила транзитивності ([2, лема 3]);

2) результатом застосування правила транзитивності до ФЗ з одноелементною правою частиною є ФЗ, права частина якої є знову одноелементною множиною;

3) результатом застосування правила транзитивності до тривіальної ФЗ і ФЗ з одноелементною правою частиною є ФЗ з одноелементною правою частиною;

4) результатом застосування правила транзитивності до ФЗ виду $X \to \{A\}$ і тривіальної ФЗ $\{A\} \to \{A\}$ є ФЗ виду $X \to \{A\}$,

приходимо до висновку, що ФЗ $X \to X \bigcup \{A\}$ повинна бути або тривіальною або її права частина є одноелементною множиною, що суперечить означенню цієї ФЗ.

Таким чином, для вказаної множини ФЗ F ФЗ $X \to X \bigcup \{A\}$ не може бути отримана за аксіомами рефлексивності і правилами транзитивності, отже, правило транзитивності є незалежним.

Теорема 1. Аксіоматика Армстронга є незалежною.

Доведення випливає безпосередньо з лем 1, 2 і 3.

Список використаних джерел:

1. Буй Д. Повнота аксіоматики Армстронга / Дмитро Буй, Анна Пузікова // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – № 3. – С. 103-108.
2. Буй Д. Критерій повноти аксіоматики Армстронга / Дмитро Буй, Анна Пузікова // Матеріали 8-ої міжнародної конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» – TAAPSD’2011 (Україна, Ялта, 19-23 вересня 2011 року). – С. 30-34.