

УДК 519.1+511.0

Ю.І. Волков, Н.М. Войналович

*Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка*

ПЕРРІН–ПОДІБНІ РЕКУРЕНТНІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Розглядається множина послідовностей $\{y_n\}$, які задаються рекурентностями

$$y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2, (a, b, r) \in \{(1,1,1); (1,1, m-1); (-1,1,1); (-1,1, m-1)\}.$$

Ми отримали ефективні формули для y_n і їх можливі застосування в тестах простоти.

Ключові слова: *рекурентності, послідовність Перріна, прості числа, генератриса.*

Постановка проблеми. Числові послідовності часто зустрічаються в різних розділах математики і фізики. В 1964 році американським математиком Слоуном (Neil J.A. Sloane), була створена енциклопедія послідовностей цілих чисел (On-line Enciclopedia of Integer Sequences, коротко QEIS, адреса в інтернеті: <https://qeis.org>). Дослідники й сьогодні поповнюють її новими послідовностями. На січень 2017 року там зафіксовано близько 280 000 послідовностей.

Часто послідовності задаються за допомогою рекурентних співвідношень і тоді виникає цілий ряд задач, як-то: знайти формулу для загального члена послідовності, знайти генератрису послідовності, знайти комбінаторне тлумачення членів послідовності, вивчити ті чи інші властивості членів послідовності й таке інше.

В роботі вивчаються послідовності близькі до добре відомої послідовності Перріна:

$$p_{n+3} = p_{n+1} + p_n, p_0 = 3, p_1 = 0, p_2 = 2, (1)$$

$\{3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, \dots\}$. В QEIS це послідовність A001608.

Аналіз раніше опублікованих праць. Вперше на послідовність (1) звернув увагу відомий французький математик Е.Люка ще в 1876 році, [1]. Він довів: якщо число n просте, то p_n ділиться на n (наприклад, $p_{13} = 39$ ділиться на 13), і висловив гіпотезу що має місце обернене твердження. Якби це було так, то з'явився б зручний тест для перевірки простоти натуральних чисел. Контприклад, який би спростував гіпотезу Люка не було знайдено, бо члени послідовності дуже швидко стають надзвичайно великими.

Пізніше, в 1899 році, послідовність (1) вивчав Перрін, [2], в честь якого вона була названа, але і йому не вдалося спростувати гіпотезу Люка. І тільки в 1982 році Адамс і Шенкс, [3], за допомогою комп'ютера знайшли, що член послідовності (1) з номером $n=271441$ ділиться на це число, але в цьому випадку $n=521^2$, і, отже, не є простим числом. В 1986 році Курц, Шенкс і Вільямс, [4], знайшли всі складені числа, які менші за $50 \cdot 10^9$ для яких гіпотеза Люка не має місця (їх виявилось 55, всі вони більші числа 271441 і були названі псевдопростими Перріна).

Виклад основного матеріалу. Ми розглядаємо послідовності, які подібні до послідовності (1), вивчаємо їхні властивості, в тому числі й властивості, які пов'язані з подільністю на прості числа.

Нам будуть потрібні декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. Якщо p просте число і $m \geq 2$, то кожний поліноміальний коефіцієнт

$$\binom{p}{k_1, \dots, k_m}, k_1 + \dots + k_m = p, k_1 \neq p, \dots, k_m \neq p, \text{ ділиться на } p.$$

Випливає з того, що
$$\binom{p}{k_1, \dots, k_m} = \frac{p!}{k_1! \dots k_m!}.$$

Лема 2. Нехай x_1, \dots, x_m довільні натуральні числа і p просте число. Тоді

$$(x_1 + \dots + x_m)^p - x_1^p - \dots - x_m^p \vdots p.$$

Справді,

$$(x_1 + \dots + x_m)^p - x_1^p - \dots - x_m^p = \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}, k_1 \neq p, \dots, k_m \neq p.$$

І далі використовуємо лему 1.

Наслідком цієї леми є мала теорема Ферма. Візьмемо в якості чисел x_1, \dots, x_m одинички. Тоді отримуємо $m^p - m \vdots p$ для всякого натурального m .

На таке узагальнення малої теореми Ферма звернув увагу ще Е.Люка в 1878 році. (Див. з цього приводу, [5], стор. 52, вправа 15).

Лема 3 (Формули Вієта). Нехай x_1, \dots, x_m корені алгебраїчного рівняння

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0. \text{ Тоді}$$

$$\sigma_1 = x_1 + \dots + x_m = -a_1,$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + \dots + x_{m-1} x_m = a_2,$$

...

$$\sigma_m = x_1 x_2 \dots x_m = (-1)^m a_m.$$

Лема 4 (Перша формула Варінга). Нехай x_1, \dots, x_m корені алгебраїчного рівняння

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0. \text{ Тоді}$$

$$x_1^n + \dots + x_m^n = n \sum_{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m = n} (-1)^{2k_1 + 3k_2 + \dots + (m-1)k_m} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m - 1)!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots \sigma_m^{k_m}.$$

Формули Вієта і формули Варінга добре відомі з курсу алгебри, (див, наприклад, [5], стор. 187, 245-246).

Теорема 1. Нехай послідовність y_n задана рекурентністю

$$y_{n+m} = b_1 y_{n+m-1} + b_2 y_{n+m-2} + \dots + b_{m-1} y_{n+1} + b_m y_n, y_0 = m, y_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_m,$$

$$y_2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2, \dots, y_{m-1} = \lambda_1^{m-1} + \dots + \lambda_m^{m-1}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}, \text{ а } \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ корені}$$

характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння

$$\lambda^m - b_1 \lambda^{m-1} - \dots - b_{m-1} \lambda - b_m = 0. \text{ Тоді, якщо } p \text{ просте число, то } y_p - b_1^p \vdots p.$$

Доведення. Загальний розв’язок нашої рекурентності такий: $y_n = C_1 \lambda_1^n + \dots + C_m \lambda_m^n$, а з початкових умов випливає, що $C_1 = \dots = C_m = 1$. Тому для всякого n загальний член нашої послідовності $y_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n$. Далі, в силу леми 3

$$b_1^p = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m)^p = y_p + \sum_{k_1 + \dots + k_m = p} \frac{p!}{k_1! \dots k_m!} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_m^{k_m}, k_1 \neq p, \dots, k_m \neq p,$$

а в силу леми 1 другий доданок в цій сумі ділиться на p , отже $y_p - b_1^p \div p$.

Теорема 2. Нехай послідовність y_n задана рекурентністю

$$y_{n+m} = y_{n+1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \dots = y_{m-2} = 0, y_{m-1} = m-1, m \geq 3. (2)$$

Тоді

$$1). y_n = n \sum_{k=\lfloor n/m \rfloor}^{\lfloor n/(m-1) \rfloor} \binom{k}{n - (m-1)k} / k, n \geq m,$$

і члени послідовності з простими номерами n діляться на n .

$$2). \text{ Генератрисою послідовності } y_n \text{ буде функція } Y(z) = \frac{z^{m-1} - m}{z^m + z^{m-1} - 1}.$$

Доведення. 1).. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-2} = 0, \sigma_{m-1} = (-1)^m, \sigma_m = -(-1)^m.$$

Тому в силу леми 4

$$y_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m = n} (-1)^{2k_1 + 3k_2 + \dots + (m+1)k_m} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m - 1)!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots \sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_1 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n \sum_{(m-1)k_{m-1} + mk_m = n} \frac{(k_{m-1} + k_m - 1)!}{k_{m-1}! k_m!} = \{\text{замінемо } k_{m-1} + k_m = k, (m-1)k + k_m = n\} =$$

$$n \sum_{(m-1)k + k_m = n} \binom{k}{k_m} / k = n \sum_{k=\lfloor n/m \rfloor}^{\lfloor n/(m-1) \rfloor} \binom{k}{n - (m-1)k} / k.$$

Те, що y_n ділиться на n , якщо n просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності y_n . Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генератриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(Y(z) - m - z^{m-1}) = z^{-m+1}(Y(z) - m) + Y(z),$$

а звідси знаходимо вираз для $Y(z)$.

Наслідок 1. Якщо $m=2$, то отримаємо послідовність чисел Люка $l_n: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$; число $l_n - 1$ ділиться на n , якщо n просте число і

$$l_n = n \sum_{k=[n/2]}^n \binom{k}{n-k} / k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

В QEIS це послідовність A000032.

Примітка. Складені числа n і такі, що число $l_n - 1$ діляться на n , називаються псевдопростими Люка, найменші з них: 705, 2465, 2737.

В QEIS є послідовність таких чисел – це A005845.

Наслідок 2. Якщо $t=3$, то отримаємо послідовність Перріна (1) і

$$p_n = n \sum_{k=[n/3]}^{[n/2]} \binom{k}{n-2k} / k.$$

Наслідок 3. Якщо $t=4$, то отримаємо послідовність Перріна четвертого порядку: 4,0,0,3, 4, 0, 3, 7, 4, 3, 10, 11, 7, 13, 21, 18, ... і

$$y_n = n \sum_{k=[n/4]}^{[n/3]} \binom{k}{n-3k} / k.$$

В QEIS це послідовність A050443.

Наслідок 4. Якщо $t=5$, то отримаємо послідовність Перріна n 'ятого порядку: 5,0,0,0, 4, 5, 0, 0, 4, 9, 5, 0, 4, 13, 14, 5, 4, 17, ... і

$$y_n = n \sum_{k=[n/5]}^{[n/4]} \binom{k}{n-4k} / k.$$

В QEIS це послідовність A087935.

Наслідок 5. Якщо $t=6$, то отримаємо послідовність Перріна шостого порядку: 6,0,0,0,0, 5, 6,0, 0, 0, 5,11, 6,0,0,5,... і

$$y_n = n \sum_{k=[n/6]}^{[n/5]} \binom{k}{n-5k} / k.$$

В QEIS це послідовність A087936.

Теорема 3. Нехай послідовність z_n задана рекурентністю

$$z_{n+m} = z_n - z_{n+m-1}, z_0 = m, z_1 = -1, \dots, z_k = (-1)^k, \dots, z_{m-1} = (-1)^{m-1}. \quad (3)$$

Тоді

$$1). z_n = n \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^{n-km} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k), n > 0,$$

і, якщо n просте число, то числа $y_n + 1$ діляться на n .

$$2). \text{ Генератрисою послідовності } y_n \text{ буде функція } G(z) = \frac{z(1-m) - m}{z^m + z^{m-1} - 1}.$$

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-2} = \sigma_{m-1} = 0, \sigma_m = (-1)^m.$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\dots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots \sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_2 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n \sum_{k_1+mk_m=n} (-1)^{2k_1+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_m-1)!}{k_1!k_m!} (-1)^{k_1} (-1)^{mk_m} = \{\text{замінемо } k_1+k_m=k\} =$$

$$n \sum_{k_1+mk_m=n} (-1)^{k_1+k_m} \frac{(k-1)!}{k_1!k_m!} = n \sum_{k=0}^{[n/m]} (-1)^{n-km} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k) ..$$

Те, що $z_n + 1$ ділиться на n , якщо n просте, впливає з теореми 1.

2). Позначимо через $G(z)$ генератрису послідовності y_n . Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генератриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(G(z) - m + z - z^2 + \dots + (-1)^{m-1} z^{m-1}) = z^{-m+1}(G(z) - m + z + \dots + (-1)^{m-2} z^{m-2}) + G(z)$$

а звідси знаходимо вираз для $G(z)$.

Теорема 4. Нехай послідовність y_n задана рекурентністю

$$y_{n+m} = y_{n+m-1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \dots = y_{m-2} = y_{m-1} = 1.. \tag{4}$$

Тоді

$$1). y_n = n \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k), n \geq 1, .$$

і, якщо n просте число, то числа $y_n - 1$ діляться на n .

$$2). \text{Генератрисою послідовності } y_n \text{ буде функція } Y(z) = \frac{(m-1)z - m}{z^m + z - 1}.$$

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-2} = \sigma_{m-1} = 0, \sigma_m = (-1)^{m+1}.$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\dots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots \sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_2 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0\} =$$

$$n \sum_{k_1+m k_m=n} (-1)^{2k_1+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_m-1)!}{k_1!k_m!} (-1)^{(m+1)k_m} = \{ \text{замінемо } k_1+k_m=k \} =$$

$$n \sum_{k_1+m k_m=n} \frac{(k-1)!}{k_1!k_m!} = n \sum_{k=0}^{[n/m]} \binom{n-(m-1)k}{k} / (n-(m-1)k).$$

Те, що $y_n - 1$ ділиться на n , якщо n просте, випливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності y_n . Перейдемо від рекурентності послідовності y_n до генератрис. Отримаємо лінійне рівняння для генератрис:

$$z^{-m}(Y(z) - m - z - \dots - z^{m-1}) = z^{-m+1}(Y(z) - m - z - \dots - z^{m-2}) + Y(z),$$

а звідси знаходимо вираз для $Y(z)$

Наслідок 6. Нехай послідовність y_n задана рекурентністю

$$y_{n+5} = y_{n+4} + y_n, y_0 = 5, y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1.$$

Тоді

$$y_n = n \sum_{k=0}^{[n/5]} \binom{n-4k}{k} / (n-4k) = n \sum_{k=[n/3]}^{[n/2]} \binom{k}{n-2k} / k + 2 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Характеристичне рівняння для даної рекурентності таке:

$$\lambda^5 - \lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Тому $y_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n + \lambda_5^n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корені рівняння

$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$, а λ_4, λ_5 корені рівняння $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. В такому разі

$$\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n \text{ це члени послідовності Перріна, а } \lambda_4^n + \lambda_5^n = 2 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Звідси, порівнюючи цей результат з результатом наслідку 3, отримаємо для членів послідовності Перріна ще й таку формулу

$$p_n = n \sum_{k=0}^{[n/5]} \binom{n-4k}{k} / (n-4k) - 2 \cos \frac{n\pi}{3}, n \geq 1.$$

Випишемо 50 перших членів цієї послідовності.

{ 5, 1, 1, 1, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 23, 31, 40, 50, 66, 89, 120, 160, 210, 276, 365, 485, 645, 855, 1131, 1496, 1981, 2626, 3481, 4612, 6108, 8089, 10715, 14196, 18808, 24916, 33005, 43720, 57916, 76724, 101640, 134645, 178365, 236281, 313005, 414645, 549290, 727655, 963936 }

В QEIS ця послідовність відсутня.

Наслідок 7. Якщо послідовність y_n , яка задана рекурентністю

$y_{n+m} = y_{n+1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \dots = y_{m-2} = 0, y_{m-1} = m - 1$, продовжити на від'ємні індекси, то $y_{-n} = z_n$, де z_n послідовність (3).

Доведення. Справді, нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної

рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda - 1 = 0$. Тоді

$$y_{-n} = \lambda_1^{-n} + \dots + \lambda_m^{-n} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^n, \text{ але числа } \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_m} \text{ це корені}$$

характеристичного рівняння рекурентності (3), тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda^{m-1} - 1 = 0$

Теорема 5. Нехай послідовність y_n задана рекурентністю

$$z_{n+m} = z_n - z_{n+1}, z_0 = m, z_1 = z_2 = \dots = z_{m-2} = 0, z_{m-1} = 1 - m. \quad (5)$$

Тоді

$$1). z_n = n \sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} (-1)^{mk-p} \binom{k}{mk-n} / k, n \geq m,$$

і, якщо n просте число, то числа z_n діляться на n .

$$2). \text{ Генератрисою послідовності } z_n \text{ буде функція } Y(z) = \frac{z^{m-1} + m}{1 - z^m + z^{m-1}}.$$

Доведення. 1). Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda - 1 = 0$. Застосуємо лему 3. Матимемо:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-2} = 0, \sigma_{m-1} = (-1)^{m-1}, \sigma_m = (-1)^{m+1}.$$

Тому в силу леми 4 числа

$$z_n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n =$$

$$n \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+mk_m=n} (-1)^{2k_1+3k_2+\dots+(m+1)k_m} \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m-1)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \dots \sigma_m^{k_m} =$$

$$= \{k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{m-2} = 0\}$$

$$n \sum_{(m-1)k_{m-1}+mk_m=n} (-1)^{mk_{m-1}+(m+1)k_m} \frac{(k_{m-1}+k_m-1)!}{k_{m-1}!k_m!} (-1)^{(m-1)k_{m-1}+(m+1)k_m} = \{\text{замінемо}$$

$$k_{m-1} + k_m = k\} =$$

$$n \sum_{mk-k_{m-1}=n} (-1)^{k_{m-1}} \frac{k!}{k_{m-1}!(k-k_{m-1})!} / k = n \sum_{k=[n/m]}^{[n/(m-1)]} (-1)^{mk-n} \binom{k}{mk-n} / k ..$$

Те, що z_n ділиться на n , якщо n просте, впливає з теореми 1.

2). Позначимо через $Y(z)$ генератрису послідовності z_n . Перейдемо від рекурентності послідовності z_n до генератриси. Отримаємо лінійне рівняння для генератриси:

$$z^{-m}(Y(z) - m - (1 - m)z^{m-1}) = Y(z) - z^{-1}(Y(z) - m),$$

а звідси знаходимо вираз для $Y(z)$

Наслідок 8. Нехай послідовність z_n задана рекурентністю

$$z_{n+5} = z_n - z_{n+1}, y_0 = 5, z_1 = z_2 = z_3 = 0, z_4 = -4..$$

Тоді

$$z_n = n \sum_{k=\lfloor n/5 \rfloor}^{\lfloor n/4 \rfloor} (-1)^{5k-p} \binom{k}{5k-n} / k = n \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{(-1)^{n+k}}{n-2k} \binom{n-2k}{k} + 2 \cos \frac{n\pi}{3}, n \geq 5.$$

Характеристичне рівняння для даної рекурентності таке:

$$\lambda^5 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^3 + \lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Тому $y_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n + \lambda_5^n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корені рівняння

$\lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 0$, а λ_4, λ_5 корені рівняння $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. В такому разі

$\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$ це члени послідовності $u_{n+3} = u_n - u_{n+2}, u_0 = 3, u_1 = -1, u_2 = 1$, а тому

$$u_n = n \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \frac{(-1)^{n+k}}{n-2k} \binom{n-2k}{k}, \text{ а } \lambda_4^n + \lambda_5^n = 2 \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Випишемо 50 перших членів цієї послідовності.

{ 5,0,0,0,-4,5,0,0,4,-9,5,0,-4,13,-14,5,4,-17,27, -19,1,21,-44,46,-20,-20,65,-90,66,0,-85,155,-156,66, 85,-240, 311,-222,-19,325,-551,533,-203,-344,876,-1084, 736,141,-1220,1960 }

В QEIS ця послідовність відсутня.

Наслідок 9. Якщо послідовність v_n , яка задана за допомогою рекурентності

$$y_{n+m} = y_{n+m-1} + y_n, y_0 = m, y_1 = y_2 = \dots = y_{m-2} = y_{m-1} = 1,$$

продовжити на відємні індекси, то $y_{-n} = z_n$, де z_n послідовність (5).

Доведення. Справді, нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ корені характеристичного рівняння даної

рекурентності, тобто, рівняння $\lambda^m - \lambda^{m-1} - 1 = 0$. Тоді

$$y_{-n} = \lambda_1^{-n} + \dots + \lambda_m^{-n} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^n, \text{ але числа } \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_m} \text{ це корені харак-}$$

теристичного рівняння рекурентності (4), тобто, рівняння $\lambda^m + \lambda - 1 = 0$.

Висновки. В роботі отримані ефективні формули для знаходження загальних членів розглядуваних послідовностей, які дозволяють швидко виявляти та перевіряти ті чи інші властивості послідовностей.

Розроблена в роботі методика дозволяє досліджувати послідовності, заданих рекурентностями $y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2$, і для значень параметрів (a, b, r) , які відмінні від тих, що розглянуто в статті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Lucas E. Sur la recherche des grands nombres premiers // A..F. Congres du Clermont-Ferrand, -1876, - pp.61-68.
2. Perrin LR. // Item 1484, L'Intermediatre des Math. - 1899. -v.6. - pp. 76-77.
3. Adams W. and Shanks D. Strong primality tests that are not sufficient, // Math. Comp.-1982. - v.35. - pp.225-300.
4. Kurtz G.C., Shanks D., Williams H.C. Fast Primality Tests for Numbers Less Than $50 \cdot 10^9$ // Math. Comp. -1986. - v.46, N.174. - pp.681-701.
5. Мишина А.П. Высшая алгебра/ Мишина А.П., Проскуряков И.В. -М.:ФМ, -1962, -300 с.
6. Виноградов И.М. Теория чисел / -М.:ФМ, -1965, -172 с.

Ю.И. Волков, Н.М. Войналович

*Кировоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка*

ПЕРРИН-ПОДОБНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается множество последовательностей $\{y_n\}$, которые задаются рекуррентностями

$$y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2, (a, b, r) \in \{(1,1,1); (1,1, m-1); (-1,1,1); (-1,1, m-1)\}.$$

Мы получили эффективные формулы для y_n и их возможные применения в тестах простоты.

Ключевые слова: рекуррентности, последовательность Перрина, простые числа, производящая функция..

Yrii Volkov, Nataliya Vojnalovich

The Kirovograd Volodymyr Vynychenko state pedagogical university

PERRIN-LIKE RECURRING SEQUENCES

Consider the set of sequences $\{y_n\}$ give be recurrences

$$y_{n+m} = ay_{n+r} + by_n, m \geq 2, (a, b, r) \in \{(1,1,1); (1,1, m-1); (-1,1,1); (-1,1, m-1)\}.$$

We get the effectie formulae for y_n and their possible use in primality tests.

Keywords: recurrences, Perrin sequences, prime numbers, generating function.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна – доцент кафедри математики, доцент, кандидат педагогічних наук.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович – професор кафедри математики, професор, доктор фізико-математичних наук.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей і математична статистика, дискретна математика.

УДК 004.4+378.2

В.В. Концедайло

Житомирський державний університет імені Івана Франка

ВИКОРИСТАННЯ СЕРЙОЗНИХ ІГОР ТА СИМУЛЯЦІЙ З РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВИТКУ НЕТЕХНІЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ-ПРОГРАМІСТІВ

У статті розглянуто використання серйозних ігор та симуляцій з розробки програмного забезпечення для розвитку нетехнічних компетентностей майбутніх інженерів-програмістів. З'ясовано, що типовій освіті інженерів-програмістів бракує практичного опанування процесів розробки програмного забезпечення. Це пов'язано з тим, що розробку програмного забезпечення, а, особливо, великих систем програмного забезпечення, прийнято вважати суто технічним завданням, проте на практиці виявляється інакше: у більшості випадків розробка великих (і не тільки) систем є завданням, здебільшого, "нетехнічного" характеру. Виявлено, що єдиним можливим способом надання студентам досвіду участі у реальних процесах розробки програмного забезпечення (ПЗ) в академічному середовищі є використання ігрових симуляторів та симуляцій у поєднанні з лекціями і навчальними проектами. Доведено, що симулятори можуть принести в освіту інженерів-програмістів ту ж користь, яку вони принесли і у інші галузі (медицина, авіація та інші). Зокрема,