УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м.н., проф., Пузікова А.В.

Buy D.B., the doctor of physical and mathematical sciences, the professor, Puzikova A.V.

Повнота аксіоматики Армстронга

Completeness of Armstrong's axiomatic

У статті наведено строге та повне доведення повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке наслідує традиції встановлення повноти в математичній логіці: введені відношення синтаксичного та семантичного слідування та показана їх збіжність. В якості математичного апарата використані властивості теоретико-множинної конструкції обмеження функції за множиною.

Ключові слова: аксіоматика Армстронга, повнота, функціональна залежність, реляційні бази даних.

This paper presents a rigorous and convincing proof of completeness of Armstrong's axiomatic system (as for the functional dependences of relational databases) within the paradigm of mathematical logic: the relations of syntactic and semantic entailment are introduced and it is shown that they coincide. The properties of set-theoretic function restriction have been used as mathematical framework.

Key Words: Armstrong's axiomatic, completeness, functional dependence, relational databases.

*E-mail: buy@unicyb.kiev.ua, anna_inf@mail.ru
Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Огляд наукової та навчальної літератури показав, що в ній відсутнє обґрунтування повноти аксіоматики Армстронга щодо функціональних залежностей в реляційних базах даних, яке б задовольняло стандартним вимогам строгості та повноти математичного доведення.

Метою роботи є побудова повного вичерпного доведення відомого класичного результату в теорії реляційних баз даних про повноту аксіоматики Армстронга для функціональних залежностей.

Всі неозначувані тут поняття та позначення використовуються в розумінні монографії [1], зокрема, $s|X$ – обмеження рядка s за множиною атрибутів X.

Нехай t – таблиця, R – схема таблиці t (скінченна множина атрибутів), X, Y, W, Z – підмножини схеми R, s, s_1, s_2 – рядки таблиці t.

В подальшому розгляді множина R зафіксована, крім того, фіксується універсальний домен D – множина, з якої атрибути приймають значення в інтерпретаціях.

Скажемо, що на таблиці t виконується функціональна залежність (ФЗ) (див., наприклад, [1, с. 71]) $X \to Y$, якщо для двох довільних рядків s_1, s_2 таблиці t, які збігаються на множині атрибутів X, має місце їх рівність і на множині атрибутів Y, тобто:

$$(X \to Y)(t) = True \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall s_1, s_2 \in t(s_1|X = s_2|X \Rightarrow s_1|Y = s_2|Y).$$

Отже, з семантичної точки зору ФЗ – це предикат, заданий двома (скінченними) множинами атрибутів.

Скажемо, що таблиця t схеми R є *моделлю* множини ФЗ F, якщо кожна ФЗ $X \to Y \in F$ виконується на таблиці t:

$$t \text{ модель } F \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall (X \to Y)(X \to Y \in F \Rightarrow (X \to Y)(t) = true).$$

Отже, довільна таблиця є моделлю порожньої множини ФЗ.

Семантичне слідування ($\models$). ФЗ $X \to Y$ *семантично слідує* з множини ФЗ F, якщо на кожній таблиці $t(R)$, яка є моделлю множини ФЗ F, виконується також ФЗ $X \to Y$:

$$F \models X \to Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall t(R)\ (t \text{ модель } F$$
$$\Rightarrow (X \to Y)(t) = true).$$

Вище запис $t(R)$ означає, що таблиця t має схему R.

Лема 1 (*аксіома рефлексивності* Армстронга).

$\forall t\ \ (X \to Y)(t) = true$, де $Y \subseteq X$. □

Доведення. Розглянемо рядки таблиці t, для яких виконується $s_1|X = s_2|X$. Обмежимо обидві частини цієї рівності за множиною *Y*: $(s_1|X)|Y=(s_2|X)|Y$. За властивістю оператора обмеження ($(U|Y)|Z=U|(Y\cap Z)$ згідно з [1, с. 24; 2]) маємо $s_1|(X\cap Y)=s_2|(X\cap Y)$. Звідси і з умови $Y\subseteq X$ випливає $s_1|Y=s_2|Y$, а отже $(X\to Y)(t)=true$.□

Наслідок 1. $\varnothing\models X\to Y$ для $Y\subseteq X$.□

ФЗ вигляду $X\to Y$, де $Y\subseteq X$, називається *тривіальною*.

Таким чином, тривіальні залежності виконуються на довільній таблиці; іншими словами, тривіальні залежності семантично слідують з порожньої множини ФЗ.

Лема 2 (правило *поповнення* Армстронга). $(X\to Y)(t)=true\Rightarrow(X\cup Z\to Y\cup Z)(t)=true$ для $Z\subseteq R$.□

Доведення. Нехай на таблиці *t* виконується ФЗ $X\to Y$, покажемо, що на цій таблиці виконується і ФЗ $X\cup Z\to Y\cup Z$. Для цього розглянемо довільні рядки $s_1,s_2\in t$, такі, що виконується $s_1|(X\cup Z)=s_2|(X\cup Z)$, звідси за аксіомою рефлексивності випливає: $s_1|X=s_2|X$ і $s_1|Z=s_2|Z$. Використовуючи властивість дистрибутивності обмежень відносно об'єднань [1, с. 24; 2], попередні рівності і імплікацію $s_1|X=s_2|X\Rightarrow s_1|Y=s_2|Y$, маємо ланцюжок рівностей $s_1|(Y\cup Z)=s_1|Y\cup s_1|Z=$ $=s_2|Y\cup s_2|Z=s_2|(Y\cup Z)$.□

Наслідок 2.
$F\models X\to Y\Rightarrow F\models X\cup Z\to Y\cup Z$ для $Z\subseteq R$.□

Доведення. Нехай ФЗ $X\to Y$ семантично слідує з множини ФЗ *F*. Нехай далі таблиця *t* – довільна модель множини ФЗ *F*. Тоді за умовою $(X\to Y)(t)=true$. За попередньою лемою 2 (правило поповнення) $(X\cup Z\to Y\cup Z)(t)=true$. Отже, на довільній моделі множини ФЗ *F* виконується ФЗ $X\cup Z\to Y\cup Z$. Значить, за означенням семантичного слідування $F\models X\cup Z\to Y\cup Z$.□

Лема 3 (правило *транзитивності* Армстронга).
$(X\to Y)(t)=true$ & $(Y\to Z)(t)=true$ $\Rightarrow$ $(X\to Z)(t)=true$.□

Доведення. Нехай на таблиці *t* виконуються ФЗ $X\to Y$ і $Y\to Z$; покажемо, що тоді на цій самій таблиці *t* виконується і ФЗ $X\to Z$. Для цього розглянемо довільні рядки $s_1,s_2\in t$, такі, що $s_1|X=s_2|X$. Тоді, очевидно, що $s_1|Y=s_2|Y$. З останньої рівності випливає шукана рівність $s_1|Z=s_2|Z$.□

Наслідок 3.
$F\models X\to Y$ & $F\models Y\to Z\Rightarrow F\models X\to Z$.□

Доведення. Припустимо, що ФЗ $X\to Y$, $Y\to Z$ семантично слідують з множини ФЗ *F*. Нехай далі таблиця *t* – довільна модель множини ФЗ *F*. Тоді за умовою $(X\to Y)(t)=true$ та $(Y\to Z)(t)=true$. Звідси за правилом транзитивності (лема 3) маємо $(X\to Z)(t)=true$. Отже, ФЗ $X\to Z$ виконується на довільній моделі множини ФЗ *F*; тобто $F\models X\to Z$.□

Правила поповнення та транзитивності назвемо *правилами виведення*; вони мають синтаксичну природу.

Синтаксичне слідування $(\vdash)$. Скажемо, що функціональна залежність $X\to Y$ *синтаксично слідує* з множини ФЗ *F* ($F\vdash X\to Y$), якщо існує скінченна послідовність ФЗ $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},\varphi_m$, така, що $\varphi_m=X\to Y$ і $\forall i=\overline{1,m-1}$ кожна φ_i є або аксіома рефлексивності, або належить *F*, або отримана за яким-небудь правилом виведення (поповнення, транзитивності) з попередніх у цій послідовності ФЗ φ_j,φ_k, $j,k<i$ [3, с. 65]. Послідовність $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},\varphi_m$ назвемо доведенням, наслідуючи традиції математичної логіки.

Нехай задана деяка множина ФЗ *F*. *Замикання* $[F]$ – це множина усіх ФЗ, які синтаксично слідують з *F*:

$$[F]\overset{def}{=}\{X\to Y\mid F\vdash X\to Y\}.$$

В наступній лемі викладено деякі природні властивості замикання.

Лема 4. Виконуються властивості:

1) $F\subseteq[F]$ (*зростання*);

2) $[[F]]=[F]$ (*ідемпотентність*);

3) $F\subseteq G\Rightarrow[F]\subseteq[G]$ (*монотонність*).□

Доведення. Доведемо перше твердження. Нехай ФЗ $X\to Y\in F$, тоді $F\vdash X\to Y$ оскільки послідовність одиничної довжини $\langle X\to Y\rangle$ і є доведенням ФЗ $X\to Y$.□

Доведемо друге твердження. За властивістю 1) маємо: $[F]\subseteq[[F]]$. Доведемо обернене включення $[[F]]\subseteq[F]$. Нехай $X\to Y$ – довільна

ФЗ, така, що $X \to Y \in [[F]]$. Тоді існує доведення $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \to Y$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна φ_i є або аксіома рефлексивності, або належить $[F]$, або отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ φ_j, φ_k, $j,k < i$. Утворимо нову послідовність за такими правилами:

- якщо φ_i є аксіома рефлексивності, то запишемо цю ФЗ без змін;
- якщо $\varphi_i \in [F]$, то за означенням замикання ця ФЗ має скінченне доведення $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ з F. Замість ФЗ φ_i вставимо її доведення;
- якщо φ_i отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ φ_j, φ_k, $j,k < i$, то запишемо ФЗ φ_i без змін.

Очевидно, побудована таким чином послідовність є доведенням ФЗ $X \to Y$ з F, тобто $F \mid\!- X \to Y$, а отже $X \to Y \in [F]$.◦

Ці властивості замикання наведені в [4, с. 57].

Доведемо третє твердження. Нехай $X \to Y$ – довільна ФЗ, така, що $X \to Y \in [F]$. Тоді існує доведення $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \varphi_m$, де $\varphi_m = X \to Y$ і для $\forall i = \overline{1, m-1}$ кожна φ_i є або аксіома рефлексивності, або належить F, або отримана за яким-небудь правилом виведення з попередніх у цій послідовності ФЗ φ_j, φ_k, $j,k < i$. Оскільки множина ФЗ F є підмножиною множини ФЗ G, то, очевидно, що дане доведення є доведенням для ФЗ $X \to Y$, виходячи з множини ФЗ G: $X \to Y \in [G]$.◦□

Таким чином, за термінологією [5] оператор $F \mapsto [F]$ є оператором замикання.

Нехай задана деяка множина ФЗ F, і нехай $\Im_F$ – сімейство усіх множин ФЗ G, які містять F, таких, що при застосуванні до них аксіом та правил виведення Армстронга не можна отримати жодної функціональної залежності, яка б не належала G:

$$\Im_F \stackrel{def}{=} \{G \mid F \subseteq G \wedge [G] \subseteq G\}.$$

Очевидно, що сім'я $\Im_F$ непорожня, вона містить, наприклад, множину всіх ФЗ $\{X \to Y \mid X \subseteq R \wedge Y \subseteq R\}$.

Лема 5. Сім'я $\Im_F$ замкнена відносно довільних перетинів. □

Доведення. Нехай $\Im'_F$ – деяка підсім'я сім'ї $\Im_F$ ($\Im'_F \subseteq \Im_F$); покажемо, що $G^* \stackrel{def}{=} \bigcap_{G \in \Im'_F} G \in \Im_F$. Для цього перевіримо дві умови на множини ФЗ, що є елементами сім'ї $\Im_F$. Покажемо, по-перше, що $F \subseteq G^*$. Дійсно $F \subseteq G$ для всіх $G \in \Im'_F$, тому очевидно, що $F \subseteq \bigcap_{G \in \Im'_F} G = G^*$.◦

Покажемо, по-друге, що $[G^*] \subseteq G^*$. Для цього розглянемо довільну ФЗ $X \to Y$, таку, що $X \to Y \in [G^*]$, і перевіримо, що виконується належність $X \to Y \in G^*$. Оскільки $X \to Y \in [G^*]$, то існує відповідне доведення (послідовність ФЗ). Шукане твердження доведемо індукцією по довжині доведення, де довжина доведення – кількість його елементів.

Базис індукції. Довжина доведення дорівнює одиниці. Тобто ФЗ $X \to Y$ є тривіальною або $X \to Y \in G^*$. В обох випадках $X \to Y \in G^*$ (використали той очевидний факт, що кожна множина G, $G \in \Im'_F$ містить всі тривіальні залежності, отже, і перетин $G^* = \bigcap_{G \in \Im'_F} G$ містить всі тривіальні залежності. ◦

Індуктивний крок. Нехай $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$, $m \geq 2$, – доведення ФЗ $X \to Y$, виходячи з множини ФЗ G^*. Розглянемо всі можливі випадки для $\varphi_m = X \to Y$.

Випадок, коли ФЗ $X \to Y$ тривіальна або $X \to Y \in G^*$, розглядається аналогічно як в базисі індукції. ◦

Нехай ФЗ $X \to Y$ отримується з ФЗ φ_i, φ_j, де $1 < i, j < m$ за правилом транзитивності. Очевидно, що послідовності $\varphi_1, ..., \varphi_i$, $\varphi_1, ..., \varphi_j$ є доведеннями довжини відповідно i та j, де $i, j < m$. Очевидно, що $\varphi_i, \varphi_j \in [G^*]$, причому довжини доведень менші ніж m. Згідно з індуктивним припущенням $\varphi_i, \varphi_j \in G^*$. Отже, $\varphi_i, \varphi_j \in G$ для всіх $G \in \Im'_F$; звідси за означенням сім'ї $\Im_F$, ФЗ $X \to Y \in G$ для всіх $G \in \Im_F$, тобто $X \to Y \in G^* = \bigcap_{G \in \Im'_F} G$.◦

Випадок, коли ФЗ $X \to Y$ отримується з попереднього елемента доведення за правилом поповнення, розглядається повністю аналогічно. ◦□

Нехай $F^* \overset{def}{=} \bigcap_{G \in \Im_F} G$ перетин всіх множин ФЗ з сім'ї $\Im_F$. З попередньої леми безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. $F^* \in \Im_F$.□

Зауважимо, що сім'я ФЗ $\Im_F$ по суті є муровською сім'єю в розумінні абстрактної теорії решіток (див., наприклад, [6, глава V, §1, с. 148]).

Лема 6. Виконується рівність: $[F] = F^*$.□

Доведення. Покажемо спочатку включення $F^* \subseteq [F]$. Дійсно, оскільки $F \subseteq [F]$ та $[[F]] = [F]$ згідно з першими двома пунктами леми 4, то множина $[F]$ належить сім'ї $\Im_F$: $[F] \in \Im_F$.▫

Покажемо тепер обернене включення $[F] \subseteq F^*$. Дійсно, для довільної множини ФЗ $G \in \Im_F$ маємо включення $F \subseteq G$, звідси за третім пунктом леми 4 маємо включення $[F] \subseteq [G]$; оскільки $[G] \subseteq G$, то $[F] \subseteq G$. Оскільки останнє включення виконується для всіх $G \in \Im_F$, то $[F] \subseteq F^*$.▫□

Висновок. Замикання $[F]$ – це найменша (в розумінні включення $\subseteq$) множина, що містить F, така, що при застосуванні до неї аксіом та правил виведення Армстронга не можна отримати жодної функціональної залежності, яка б не належала $[F]$.

З описаних вище аксіом і правил виведення можна отримати інші правила виведення (для спрощення практичного обчислення замикання $[F]$ множини ФЗ F).

Лема 7 (правило *композиції*).

$\{X_1 \to Y_1,\ X_2 \to Y_2\} \mid\!- X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$.□

Доведення. Побудуємо доведення для ФЗ $X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$:

1. $X_1 \to Y_1$;
2. $X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup X_2$ (з 1 за правилом поповнення);
3. $X_2 \to Y_2$;
4. $Y_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$ (з 3 за правилом поповнення);
5. $X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$ (з 2 і 4 за правилом транзитивності). □

Звідси безпосередньо випливає наступний наслідок, якщо скористатися ідемпотентністю теоретико-множинного об'єднання.

Наслідок 5.

$\{X \to Y_1,\ X \to Y_2\} \mid\!- X \to Y_1 \cup Y_2$.□

Наслідок 6. Для $n = 2, 3, \ldots$ має місце $\{X \to Y_1, \ldots, X \to Y_n\} \mid\!- X \to Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$.□

Доведення проводиться індукцією по n .□

Лема 8. (правило *декомпозиції*).

$X \to Y_1 \cup Y_2 \mid\!- X \to Y_1$, $X \to Y_1 \cup Y_2 \mid\!- X \to Y_2$.□

Доведення. Побудуємо доведення для ФЗ $X \to Y_1$:

1. $X \to Y_1 \cup Y_2$;
2. $Y_1 \cup Y_2 \to Y_1$, (аксіома рефлексивності);
3. $X \to Y_1$ (з 1 і 2 за правилом транзитивності).

Аналогічно будується доведення для ФЗ $X \to Y_2$.□

Правила композиції і декомпозиції наведені в [7].

Замиканням $[X]_F$ множини X (відносно множини ФЗ F) називається об'єднання правих частин всіх ФЗ вигляду $X \to Y$, які слідують (синтаксично) з множини F:

$$[X]_F \overset{def}{=} \bigcup_{X \to Y \in [F]} Y .$$

В наступній лемі викладено властивості замикання множини X.

Лема 9. Виконуються властивості.

1) $X \subseteq [X]$;

2) $F \mid\!- X \to [X]$;

3) $X \to Z \notin [F] \Rightarrow Z \not\subseteq [X] \wedge [X] \subset R$.□

Доведення. Перший пункт випливає з того факту, що тривіальні ФЗ містяться в замиканні довільної множини ФЗ; тобто $X \to X \in [F]$.▫

Доведемо другий пункт. Замикання $[X]$ є скінченною множиною, нехай, для визначеності $[X] \overset{def}{=} \{A_1, \ldots, A_n\}$, де A_i – атрибути. Тоді, згідно з означенням замикання $[X]$, для кожного $i = 1, \ldots, n$ існує схема Y_i, така, що $A_i \in Y_i$ та $F \mid\!- X \to Y_i$. Згідно з правилом декомпозиції (лема 8) для кожного $i = 1, \ldots, n$ маємо $X \to Y_i \mid\!- X \to \{A_i\}$. Таким чином, маємо твердження $F \mid\!- X \to \{A_1\}$, … , $F \mid\!- X \to \{A_n\}$. Залишається застосувати наслідок 6, згідно з яким $\{X \to \{A_1\}, \ldots, X \to \{A_n\}\} \mid\!- X \to [X]$.▫

Доведемо останній пункт від супротивного. Нехай $X \to Z \notin [F]$, але заключення імплікації хибне. Тут можливі два випадки.

$[X]=R$. Оскільки за доведеним другим пунктом $F \mid -X \to [X]$, а значить $[X] \to Z$ тривіальна (нагадаймо, що $[X]=R$, а $Z \subseteq R$), то $F \mid -X \to Z$, тобто $X \to Z \in [F]$, прийшли до протиріччя.▫

$Z \subseteq [X]$. Цей випадок розглядається аналогічно попередньому: $F \mid -X \to [X]$, $[X] \to Z$ тривіальна, звідки $F \mid -X \to Z$, що суперечить припущенню. ▫□

Твердження 1 (коректність аксіоматики Армстронга). Якщо ФЗ $X \to Y$ синтаксично виводиться з множини ФЗ F, то ФЗ $X \to Y$ виводиться з F семантично:

$$F \mid -X \to Y \Rightarrow F \models X \to Y. \square$$

Доведення проводиться індукцією по довжині доведення.

Базис індукції. Довжина доведення дорівнює одиниці. Тобто ФЗ $X \to Y$ є або тривіальною або $X \to Y \in F$. В обох випадках (для першого треба скористатися наслідком 1) виконується $F \models X \to Y$.▫

Індуктивний крок. Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, $m \ge 2$, доведення ФЗ $X \to Y$, виходячи з множини ФЗ F. Розглянемо всі можливі випадки для останнього елемента доведення $\varphi_m = X \to Y$.

Випадок, коли ФЗ $X \to Y$ тривіальна або належить множині ФЗ F, розглядається повністю аналогічно як в базисі індукції. ▫

Нехай ФЗ φ_m отримується з ФЗ φ_i, де $i < m$, за правилом поповнення. Очевидно, що $F \mid -\varphi_i$; за індуктивним припущенням маємо $F \models \varphi_i$. Залишається скористатися наслідком 2. ▫

Випадок, коли ФЗ φ_m отримується з попередніх ФЗ доведення за правилом транзитивності, розглядається аналогічно з заміною наслідку 2 на наслідок 3. ▫□

Зауважимо, що логічна схема доведення попереднього твердження та сама, що і для доведення леми 5 (точніше кажучи, доведення включення $[G^*] \subseteq G^*$).

Твердження 2 (повнота аксіоматики Армстронга). Якщо ФЗ $X \to Y$ семантично виводиться з множини ФЗ F, то ФЗ $X \to Y$ синтаксично виводиться з F:

$$F \models X \to Y \Rightarrow F \mid -X \to Y. \square$$

Доведення проводиться від супротивного. Отже, нехай множина ФЗ F та ФЗ $X \to Y$ такі, що $F \models X \to Y$, але не виконується $F \mid -X \to Y$, тобто $X \to Y \notin [F]$.

Прийдемо до протиріччя (з $F \models X \to Y$), побудувавши таку модель множини ФЗ F, що на ній ФЗ $X \to Y$ не буде виконуватися.

Зафіксуємо в універсальному домені два різних елементи a та b. Нехай схема R складається з атрибутів $A_1, \dots, A_n$. Таблиця t схеми R містить рядки s_1, s_2, які задані наступним чином:

$$s_1(A_1) = \dots = s_1(A_n) = a,$$

$$s_2(A_i) = \begin{cases} a, & \textit{якщо } A_i \in [X], \\ b, & \textit{якщо } A_i \notin [X], \end{cases}$$

де $i = 1, \dots, n$.

З третього пункту леми 9 випливає, що $[X] \subset R$; значить, рядки s_1, s_2 розрізняються на всіх атрибутах з $R \setminus [X]$ (див. рис. 1).

	$[X]$			$R\setminus[X]$		
	A_1	...	A_{i_m}	$A_{i_{m+1}}$	...	A_n
s_1	a	...	a	a	...	a
s_2	a	...	a	b	...	b

Рисунок 1. Таблиця $t \overset{def}{=} \{s_1, s_2\}$ з доведення твердження 2

Згідно з пунктом 1 леми 9 $X \subseteq [X]$, а згідно з пунктом 3 – $Y \not\subseteq [X] \subset R$, тобто $Y \cap (R \setminus [X]) \ne \varnothing$. З побудови рядків s_1, s_2 випливає, що $s_1 \mid X = s_2 \mid X$, але $s_1 \mid Y \ne s_2 \mid Y$, таким чином $(X \to Y)(t) = \mathit{false}$.▫

Залишається показати, що таблиця t є моделлю множини ФЗ F. Для цього розглянемо довільну ФЗ $W \to Z$ з F та покажемо, що $(W \to Z)(t) = \mathit{true}$, тобто імплікація $s_1 \mid W = s_2 \mid W \Rightarrow s_1 \mid Z = s_2 \mid Z$ виконується.

Для множини атрибутів W можливі два випадки.

По-перше, нехай $W \cap (R \setminus [X]) \ne \varnothing$, тоді $s_1 \mid W \ne s_2 \mid W$ і імплікація тривіально істинна.

По-друге, нехай $W \cap (R \setminus [X]) = \varnothing$, тобто $W \subseteq [X]$; тоді (нагадаймо, що $X \subseteq [X]$ згідно з першим пунктом леми 9) $s_1 \mid W = s_2 \mid W$, тому треба перевірити рівність $s_1 \mid Z = s_2 \mid Z$. Цю рівність ми доведемо, довівши включення $Z \subseteq [X]$. Для цього розглянемо наступне доведення, виходячи з множини ФЗ F:

1. доведення ФЗ $X \to [X]$ з F (нагадаймо, що згідно другого пункту леми 9 $F \mid - X \to [X]$);
2. $[X] \to W$, (аксіома рефлексивності; нагадаймо, що розглядається випадок $W \subseteq [X]$);
3. $X \to W$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $X \to [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 1, та ФЗ $[X] \to W$ з пункту 2);
4. $W \to Z$ (елемент множини F);
5. $X \to Z$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ з пунктів 3 та 4).

Отже, маємо $F \mid - X \to Z$, тобто $Z \subseteq [X]$; звідси випливає, що $s_1 \mid Z = s_2 \mid Z$ за побудовою рядків s_1, s_2. ▫□

Твердження про повноту аксіоматики Армстронга наводиться в [4, с. 58].

Теорема 1. Відношення семантичного та синтаксичного слідування збігаються:

$$F \models X \to Y \Leftrightarrow F \mid - X \to Y. \square$$

Детальний аналіз наведеного доведення основного результату про збіжність відношень про $\mid -$ та $\models$ показує, що воно проведено в припущенні: $\mid D \mid \geq 2$ та $\mid R \mid \geq 2$, тобто універсальний домен містить не менше 2 елементів та схема R має щонайменше 2 атрибути. Для повноти викладення треба розглянути і решту випадків, коли $\mid D \mid \leq 1$ або $\mid R \mid \leq 1$, це буде зроблено в наступній роботі.

Наприкінці зробимо декілька зауважень про отриманий побічний результат. Виявляється, що оператор $X \mapsto [X]$ є теж оператором замикання.

Твердження 3. Виконуються властивості:

1) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$ (монотонність);

2) $[[X]] = [X]$ (ідемпотентність).□

Доведення. Доведемо перший пункт. Покажемо включення $[X] \subseteq [Y]$, побудувавши доведення для ФЗ $Y \to [X]$ (виходячи з множини ФЗ F):

1. $Y \to X$, (аксіома рефлексивності; нагадаймо, що $X \subseteq Y$);
2. доведення ФЗ $X \to [X]$ з F (згідно другого пункту леми 9 $F \mid - X \to [X]$);
3. $Y \to [X]$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $Y \to X$ з пункту 1 та ФЗ $X \to [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 2).

Отже, $F \mid - Y \to [X]$, а це означає, що множина атрибутів $[X]$ включається в замикання $[Y]$ множини атрибутів Y, тобто $[X] \subseteq [Y]$.▫

Доведемо другий пункт. Включення $[X] \subseteq [[X]]$ випливає з пункту 1) леми 9, тому доведемо обернене включення $[[X]] \subseteq [X]$. Нехай атрибут $A \in [[X]]$; покажемо, що $A \in [X]$. Для цього побудуємо доведення для ФЗ $X \to \{A\}$ (виходячи з множини ФЗ F):

1. доведення ФЗ $[X] \to \{A\}$ з F ($F \mid - [X] \to \{A\}$ за означенням замикання $[[X]]$ множини $[X]$);
2. доведення ФЗ $X \to [X]$ з F (згідно другого пункту леми 9 $F \mid - X \to [X]$);
3. $X \to \{A\}$ (правило транзитивності застосовано до ФЗ $X \to [X]$, яка є останнім елементом доведення з пункту 2, та ФЗ $[X] \to \{A\}$, яка також є останнім елементом доведення з пункту 1).

Отже, $F \mid - X \to \{A\}$; за означенням замикання $[X]$ множини X випливає, що $A \in [X]$.▫□

Список використаних джерел

1. *Редько В.Н.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім – Академперіодика, 2001. – 198 с.
2. *Буй Д.Б.* Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
3. *Линдон Р.* Заметки по логике / Линдон Р. – Москва: Мир, 1968. – 128 с.
4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
5. *Скорняков Л.А.* Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.
6. *Биркгоф Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 564 с.
7. *Дейт К.Дж.* Введение в системы баз данных, 8-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом – Вильямс, 2005. – 1328 с.

Надійшла до редколегії 05.09.11