УДК 519.21

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НОСІЇВ РОЗПОДІЛІВ ТИПУ ДЖЕССЕНА-ВІНТНЕРА

О.П. Макарчук

Обраховано розмірність Хаусдорфа-Безиковича носія функції розподілу I-роду однієї випадкової величини з незалежними п'ятірковими цифрами.

Been calculated Hausdorff-Besicovitch dimension carrier distribution function of I-sort of a random variable with independent p'yatirkovymy numbers..

Означення 1. Спектром $S_{F_\xi} = S_\xi$ функції розподілу F випадкової величини ξ називається множина всіх точок росту F_ξ, тобто

$$S_{F_\xi} = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 - \forall\varepsilon > 0\}.$$

Означення 2. Точковим спектром розподілу випадкової величини з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина D_ξ його атомів, тобто сукупність всіх точок, в яких $F_\xi(x)$ стрибки.

Означення 3. Носієм розподілу випадкової величини ξ з функцією розподілу $F_\xi(x)$ називається множина

$$N_\xi = N_{F_\xi} = \left\{x : \varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x)}{\varepsilon} > 0\right\}.$$

Очевидно, що носій $N_\xi = \{x : F'_\xi \neq 0\}$ є множиною точок "суттєвого росту" функції розподілу $F_\xi(x)$ і $D_\xi \subseteq N_\xi \subseteq S_\xi$. Якщо функція розподілу $F_\xi(x)$ неперервна і міра Лебега носія N_ξ рівна нулю, то розподіл є сингулярним; якщо тільки міра Лебега N_ξ відмінна від нуля, то $F_\xi(x)$ містить абсолютно неперервну компоненту. Носіями сингулярних розподілів випадкових величин є множини з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0 < 1$, причому їх H_1-міра Хаусдорфа рівна нулю, а розподіли з абсолютно неперервною компонентою мають носії додатної міри Лебега (отже, $\alpha_0(N_\xi) = 1$), тому близькість сингулярного розподілу до розподілу, що містить абсолютно неперервну компоненту, можна оцінювати по близькості розмірності Хаусдорфа- Безиковича носія розподілу до одиниці. Рівність розмірності одиниці не свідчить про те, що розподіл не є сингулярним. Останнє має місце лише тоді, коли H_1-міра Хаусдорфа носія додатня.

Означення 4. Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, визначене рівністю

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E, де H_{α}-міра Хаусдорфа.

Побудуємо приклад сингулярного розподілу з аномальним спектром та носієм.

Теорема 1. Нехай випадкова величина $\xi=\frac{\xi_1}{5}+\frac{\xi_2}{5^2}+\ldots+\frac{\xi_n}{5^n}+\ldots$, де ξ_n – незалежні випадкові величини, які мають розподіл:

ξ_n:

0	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Виконуються рівності $\lambda(S_{\xi})=0$, $\alpha_0(N_{\xi})=\log_5 2$?

Доведення.

За теоремою Джессена-Вінтнера ξ має чистий розподіл, тобто або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або сингулярний.

Покажемо, що спектр є множиною чисел вигляду

$A=\{\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\ldots+\frac{a_k}{5^k}+\ldots \mid a_n\in\{0;2\},\forall n\in N\}$

Нехай $x=\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_k}{5^k}+\ldots, b_n\in\{0;2\},\forall n\in N$ і $\varepsilon>0$, зрозуміло що для

деякого $j\in N: l=[\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_j}{5^j};\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_j}{5^j}+\frac{2}{5^{j+1}}+\frac{2}{5^{j+2}}+\ldots]\subset[x-\varepsilon;x-\varepsilon]$,

бо $l\to\{x\}(j\to\infty)$, тому

$$F_{\xi}(x+\varepsilon)-F_{\xi}(x-\varepsilon)\geq P\{\xi\in[\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_j}{5^j};\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_j}{5^j}+\frac{2}{5^{j+1}}+\frac{2}{5^{j+2}}+\ldots]=$$

$$=\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{2}\prod_{k=j+1}^{\infty}P\{\xi_k\in\{0;2\}\}=(\frac{1}{2})^j>0\Rightarrow x\in S_{\xi}$$

Нехай $x=\frac{b_1}{5}+\frac{b_2}{5^2}+\ldots+\frac{b_k}{5^k}+\ldots\notin A, b_n\in\{0;2\},\forall n\in\{1,\ldots,k-1\}, b_k\notin\{0,2\}$

Тоді при $\varepsilon=\frac{1}{5^{k+2}}: F_{\xi}(x+\varepsilon)-F_{\xi}(x-\varepsilon)\geq P\{\xi\in(x-\varepsilon;x+\varepsilon)\}=0\Rightarrow x\notin A$

Отже, $A\equiv S_{\xi}$.

Якщо, $x\notin A$ то зрозуміло, $F_{\xi}(x)=0$, Якщо, $x\in A$ то зрозуміло,

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\ldots=0,$$

Отже, ξ не містить атомів а тому є неперервним.

Це також можна було довести з використанням теореми Леві, адже максимальний стрибок $\xi_n - 0.5$, нескінченний добуток яких рівний 0.

Як, відомо множина слабонормальних чисел за основою 5 має міру Лебега 1, а множина чисел $A \equiv S_\xi$ не містить в своєму п`ятірковому розкладі цифр 1,3,4 тому $\lambda(S_\xi) = 0$, а тому ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Для випадкових величин такого типу S_ξ і N_ξ співпадають.

Оскільки множину $A = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... \mid a_n \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$ можна представити у вигляді об`єднання двох множин $A_1 = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... \mid a_1 = 0, a_{n+1} \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$ та

$A_2 = \{\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + ... + \frac{a_k}{5^k} + ... \mid a_2 = 0, a_{n+1} \in \{0;2\}, \forall n \in N\}$,

кожна з яких подібна до A з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, то розмірність Хаусдорфа-Безиковича є розв'язком рівняння

$2\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = \log_5 2$, тобто, $\alpha_0(N_\xi) = \log_5 2$.

Побудуємо носій функції розподілу випадкової величини з заданими фрактальними властивостями

Теорема 2. Для довільного $a \in [0;1]$ існує випадкова величина ξ, така що $\alpha_0(N_\xi) = a$, де α_0 – розмірність Хаусдорфа-Безиковича, N_ξ - носій випадкової величини ξ.

Доведення.

Розглянемо окремо три випадки:

1) $a \in (0;1)$
2) $a = 1$
3) $a = 0$

1)Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними Q_3 символами: $\xi = \Delta^{Q_3}_{\xi_1\xi_2\xi_3...}$, де ξ_n –незалежні дискретно розподілені випадкові величини(символи), які мають наступні розподіли:

ξ_n:

0	1	2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

також візьмемо $q_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, $q_1=1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$, що можливо адже $q_0,q_2\in(0;1)$ і $q_0+q_2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}}=2^{1-\frac{1}{a}}<2^0=1.$

Оскільки $P\{\xi_n=1\}=0,$ то ξ є , як відомо, (Турбин А.Ф, Працевытий Н.В Фрактальные множества, функции распредиления) випадковою величиною типу Джессена-Вінтнера I-го роду, тобто $S_\xi=N_\xi$. S_ξ – представляє собою множину всіх реалізацій ξ, тобто множину чисел в яких у їх Q_3 є цифри 0 і 2, але немає цифри 1. S_ξ представляє собою самоподібну множину, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої співпадає з самоподібною розмірністю і є розв'язком рівняння $q_0^\alpha+q_2^\alpha=1$, тобто $2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}}=1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{a}}=\frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{a}=1$, $\alpha=a$.(Працьовитий *М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів)

Отже, $\alpha_0(N_\xi)=\alpha_0(S_\xi)=a$.

Потрібно зазначити, що при $q_0=q_1=q_2=\frac{1}{3}$ $F_\xi(x)$ є функцією Кантора, а $S_\xi\equiv N_\xi$ – є множиною Кантора.

2) $a=0$.

Побудуємо випадкову величину у якої носій є аномальним фракталом

Розглянемо випадкову величину $\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^{n^2}}$, де ξ_n – незалежні дискретно розподілені випадкові величини, які мають розподіли

ξ_n :

0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Покажемо, що $\lambda(S_\xi)=0$, тоді $S_\xi\equiv N_\xi$. Дійсно $S_\xi=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^{n^2}}\middle|\varepsilon_n=0\vee 1,\forall n\in N\right\}$.

Нехай $x\in S_\xi$, $x=\Delta^2_{0,\varepsilon_1 0..0\varepsilon_2 0..\varepsilon_3..\varepsilon_{n-1}0..\varepsilon_n 0..\varepsilon_{n+1}}$ $k\in N$, тоді для деякого $n\in N$: $n^2\le k\le(n+1)^2$, маємо: $\frac{N_1(x,k)}{k}\le\frac{n}{k}\le\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$, тобто $v_1(x)=0$ і $v_0(x)=1$, тому $S_\xi\subset E[1;0]$, причому $\lambda(E[1;0])=0$ і $S_\xi\equiv N_\xi$.

За формулою Безиковича-Егглстона $\alpha_0(E[1;0]) = -\frac{\ln 1^1 \cdot 0^0}{\ln 2} = 0$, тобто $0 \le \alpha_0(S_\xi) \le \alpha_0(E[1;0]) = 0 \Rightarrow \alpha_0(N_\xi) = \alpha_0(S_\xi) = 0.$

3) $a = 1$

Побудуємо випадкову величину у якої носій є суперфракталом

Нехай $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]$. Оскільки $\lambda\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = 0 \ \forall n \in N$, то $\lambda(E) = 0$.

Оскільки $E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right] \subset E$, то

$$\alpha_0(E) \ge \alpha_0\left(E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right]\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3n}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}}}{\ln 2} \to -\frac{\ln \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}}{\ln 2} = 1\left(n \to \infty,\right.$$

тому $\alpha_0(E) = 1.)$

ПОСИЛАННЯ

[1] Гонтаренко М.О. Спектри та носії випадкових величин // *VIII Всеукраїнська студентська наукова конференція "Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання"*, 17-18 квітня 2013 р., Ніжин. Матеріали конференції. Ніжин, 2013., 95 с.

[2] Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Критерії сингулярності та абсолютної неперервності випадкової величини в термінах ймовірності суттєвого носія щільності // *Вісник НПУ імені М.П.Драгоманова.* К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2002., Випуск 1. С.156-158.

[3] Гончаренко Я.В. Згортки сингулярних розподілів ймовірностей // *Український математичний конгрес. Теорія ймовірностей і математична статистика.* Тези доповідей..Київ: ІМ НАНУ, 2001, С.8.