УДК 371.26:51

# РІВНЯННЯ З ЦІЛОЮ ТА ДРОБОВОЮ ЧАСТИНАМИ НА УЧНІВСЬКИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАДАХ В УКРАЇНІ

**О.М. Вороний**

Досліджуються основні способи розв'язування рівнянь з цілою та дробовою частинами, які застосовуються при розв'язуванні задач Українських математичних олімпіад.

The paper examines the basic ways of solving equations with integer and fractional parts, as well as the use there of in solving problems at Ukrainian Mathematical Olympiads.

Рівняння зі змінною під знаком цілої або дробової частин в Україні почали пропонувати учасникам учнівських математичних олімпіад у другій половині минулого століття. З тих пір вони є усталеними завданнями математичних олімпіад. Привабливість цих рівнянь полягає в тому, що їх розв'язання не потребує додаткової теоретичної підготовки – у більшості випадків достатньо знати означення цих понять:

*цілою частиною числа a (її позначають символом* $[a]$*) називається найбільше ціле число, яке не перевищує його:*

$$[a]=k,\ якщо\ k\le a<k+1,\ де\ k - ціле\ число\ ;$$

*дробовою частиною числа a (її позначають символом* $\{a\}$*) називається різницю між числом і його цілою частиною:*

$$\{a\}=a-[a].$$

Також корисно пам'ятати, що: 1) $a=[a]+\{a\}$; 2) $[a+n]=[a]+n$ для будь-яких $a\in R$ і $n\in Z$; 3) $\{a+n\}=\{a\}$ для будь-яких $a\in R$ і $n\in Z$; 4) $0\le\{a\}<1, \{a\}=0\Leftrightarrow a\in Z$; 5) $[a]+[-a]=0$, якщо $a\in Z$, і $[a]+[-a]=-1$, якщо $a\notin Z$.

Одна їх не можна назвати простими. Одні з перших рівнянь з цілою і дробовою частинами в Україні були рівняння

– на Київській олімпіаді – $\lfloor x^3\rfloor+\lfloor x^2\rfloor+[x]=\{x\}-1$, 7 кл., 1972 р.;

– Донецькій обласній олімпіаді у 1968 році:

$$\left[\frac{1-3x}{2}\right]=x^2-2x \text{ – 9 кл. і } \left[\frac{x+3}{3}\right]=\frac{x-1}{2} \text{ – 10 кл.}$$

– Дніпропетровській обласній олімпіаді – $\sqrt{x-\{x\}}-\sqrt{x-[x]}=\frac{2}{3}$, 9 кл., 1974 р.

При розв'язуванні наведених рівнянь використано такі способи:

– *розв'язування за означенням і властивостями цілої і дробової частин;*
– *зведення рівняння з цілою частиною до системи відомих рівнянь і нерівностей з цілим параметром;*
– *локалізація області допустимих значень рівняння.*

Перший і другий способи дають можливість рівняння з цілою і дробовою частинами звести до рівнянь і нерівностей без цілої і дробової частин.

Термін «локалізація» (від латинського *localis* – місцевий, *locus* – місце) означає обмеження місця дії. Під способом *локалізації* розуміється виділення з ОДЗ рівняння обмеженої підмножини, на якій потрібно шукати розв'язки.

Аналіз завдань з цілою і дробовою частинами, які були на різних етапах Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики (далі – ВУОМ) у різні роки, дають підставу зробити висновок, що це основні способи розв'язування таких завдань.

**Рівняння, які розв'язуються за означенням і властивостями**

**1**. Розв'язати рівняння $\lfloor x^3 \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor + [x] = \{x\} - 1$.

Р о з в'я з а н н я. Оскільки ціла частина дійсного числа є цілим числом, то ліва частина рівняння при будь-якому значенні змінної $x$ є цілим числом. Тому й права частина рівняння повинна бути цілим числом. Це можливо тільки за умови, що $\{x\}$ – ціле число. Єдиним цілим значенням дробової частини числа $x$ є число нуль. Дробова частина числа є нулем тільки у випадку, коли число ціле. Тому $x$ – ціле число, а отже: $x^2$, $x^3$ – цілі числа. За означенням ціла частина цілого числа дорівнює самому числу. Як наслідок дістаємо рівносильне рівняння $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, розв'язком якого є $-1$. *Відповідь*: $-1$.

**2.** Розв'язати рівняння $\lfloor x^3 \rfloor = [3x+2] + \{x+2003\}$. (*ВУОМ, IV етап, 2003 р., 9 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Рівність може виконуватися тільки за умови, що $\{x+2003\} = 0$. Це станеться тоді, коли $x$ – ціле число. Але тоді $x^3$ і $3x+2$ – цілі числа. Тому дістаємо рівняння $x^3 = 3x + 2$, коренями якого є числа $1, 1, 2$. *Відповідь*: $1, 1, 2$.

**3.** Розв'язати рівняння $\{3\{3\{3\{3\{3x\}\}\}\}\} = x$. (*ВУОМ, ІІІ етап, 2012 р., 10 кл.*)

Р о з в'я з а н н я. За означенням $\{3x\} = 3x - [3x]$. Тому за властивістю 3) $\{3\{3x\}\} = \{9x - 3[3x]\} = \{9x\}$. Продовжуючи міркування, дістанемо $\{3\{3\{3\{3\{3x\}\}\}\}\} = \{243x\}$. Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $\{243x\} = x$. Звідси випливає, що $0 \le x < 1$ і

$243x - [243x] = x$. Оскільки $242x = [243x]$ – ціле число і $0 \le x < 1$, то $x = \frac{k}{242}, k = 0, 1, .., 241$.

**4.** Розв'язати рівняння $[x\{x[x]\}] = x^2$. (*ВУОМ, IV етап, 2013 р., 9 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Рівність $[x\{x[x]\}] = x^2$ буде виконуватися, якщо $x^2$ – ціле число і

$$x^2 \le x\{x[x]\} < x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x \le \{x[x]\} < 1. \end{cases}.$$

Тому $x \in [0;1)$. Єдиним числом з цього проміжку, квадрат якого є цілим числом, є число 0. *Відповідь*: 0.

**5.** Розв'язати рівняння $[|x|] + |[x]| = 1$. (*Кіровоградська обл. ол., 1996 р., 8 кл.*).

1-*й спосіб* . Рівняння рівносильне сукупності двох систем: $\begin{cases} |[x]| = 1, \\ [|x|] = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} |[x]| = 0, \\ [|x|] = 1. \end{cases}$

Розв'язки першої системи рівнянь утворюють проміжок $(-1; 0)$, друга система несумісна.

2-*й спосіб.* $[|x|] + |[x]| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [x] + [x] = 1, \text{ якщо } x \ge 0, \\ [-x] - [x] = 1, \text{ якщо } x < 0, \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-1;0).$

**6.** Розв'язати рівняння $\left[x + \left[x + ... + \left[x + [x]\right]...\right]\right] = |x + |x| + ... + |x + |x|...||$, якщо в обох частинах рівняння по 8 знаків «+». (*Кіровоградська обл. ол., 2008 р., 9 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Використаємо рівність $[a+n]=[a]+n$ де $a$ – довільне число, $n$ – ціле число. Прийдемо до рівняння $9[x]=\left|x+\left|x+\ldots+\left|x+|x|\right|\ldots\right|\right|$. Звідси $[x]\ge 0$, отже $x\ge 0$, і знак модуля можна розкрити. Отримуємо рівняння $[x]=x$, розв'язком якого є кожне невід'ємне ціле число.

**7.** Серед усіх натуральних чисел $n$, які задовольняють рівність

$$\left[\frac{n}{2}\right]-2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=2001,$$

знайти найменше і найбільше. (*ВУОМ, IV етап, 2001 р., 10 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Подамо число $n$ у вигляді $n=12k+r$, де $12=$НСК(2, 3, 4), $r\in\{0,1,\ldots,11\}$. Тоді рівність запишеться так:

$$\left[\frac{12k+r}{2}\right]-2\left[\frac{12k+r}{3}\right]+\left[\frac{12k+r}{4}\right]=2001\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[6k+\frac{r}{2}\right]-2\left[4k+\frac{r}{3}\right]+\left[3k+\frac{r}{4}\right]=2001\Leftrightarrow 6k+\left[\frac{r}{2}\right]-8k-2\left[\frac{r}{3}\right]+3k+\left[\frac{r}{4}\right]=2001\Leftrightarrow$$

$$k=2001-\left(\left[\frac{r}{2}\right]-2\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]\right).$$

Знайдемо найменше і найбільше значення функції $f(r)=\left[\frac{r}{2}\right]-2\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ на множині $\{0,\ 1,\ \ldots,\ 11\}$. Не складно переконатися, що $\min\limits_{r} f(r)=-1=f(3)$, $\max\limits_{r} f(r)=2=f(8)$. Тому $n=12(2001-2)+8=23996$ – найменше, а $n=24027$ – найбільше шукане число.

**7.** Розв'язати рівняння $\cos\pi x=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]$. (*ВУОМ, IV етап, 2011 р., 11 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Оскільки права частина рівняння є ціле число, а цілими значення косинуса є числа $0,\pm 1$, то рівняння рівносильне сукупності таких трьох систем:

$$\begin{cases}\cos\pi x=0,\\ \left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\cos\pi x=-1,\\ \left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}\cos\pi x=1,\\ \left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]=1.\end{cases}.$$

Уведемо позначення $C(x)=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]$.

Якщо $\cos\pi x=0$, то $\pi x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}+2k$, де $k$ – ціле число. Водночас

$$C\left(\pm\frac{1}{2}+2k\right)=\left[\frac{\pm\frac{1}{2}+2k}{2}-\left[\frac{\pm\frac{1}{2}+2k}{2}\right]-\frac{1}{2}\right]=\left[\pm\frac{1}{4}+k-\left[\pm\frac{1}{4}+k\right]-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\left[\pm\frac{1}{4}+k-\left[\pm\frac{1}{4}\right]-k-\frac{1}{2}\right]=\left[\pm\frac{1}{4}-\left[\pm\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}\right]=\left[\begin{array}{l}\left[\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}\right]=-1,\\ \left[-\frac{1}{4}-\left[-\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{2}\right]=0.\end{array}\right.$$

Оскільки $C(x)=0,$ якщо $x=-\frac{1}{2}+2k$, то $-\frac{1}{2}+2k,\ k\in\mathbf{Z},$ розв’язки рівняння.

Не складно переконатися, що дві інші системи несумісні.

**9.** Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases}2|x|+|y|=1,\\ [\![|x|]\!]+[2|y|]=2.\end{cases}$ (*ВУОМ, IV етап, 1998 р., 8 кл.*).

Р о з в’я з а н н я. З першого рівняння системи випливає, що $|x|\le\frac{1}{2}, |y|\le 1$. Оскільки $[\![|x|]\!]=0$, то $[2|y|]=2\Rightarrow|y|\ge 1$. Маємо $|y|=1$, а $|x|=0$. Тому розв’язки системи $x=0, y=\pm 1$.

**Зведення до системи з цілим параметром**

**10.** Розв’язати рівняння $\left[\frac{x+3}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$ .

Р о з в’я з а н н я. Якщо $k\le\frac{x+3}{3}<k+1$, то $\left[\frac{x+3}{3}\right]=k$ і $\frac{x-1}{2}=k$. Тому розв’язування рівняння зводиться до розв’язування мішаної системи

$$\begin{cases}\left[\frac{x+3}{3}\right]=k,\\ k\le\frac{x+3}{3}<k+1,\\ \frac{x-1}{2}=k\end{cases}$$

з цілим параметром $k$. Знайдемо ті значення параметра при яких система сумісна. Для цього з останнього рівняння системи виразимо $x$ через $k$ і підставимо його у подвійну нерівність:

$$k \le \frac{(2k+1)+3}{3} < k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3k \le 2k+4, \\ 2k+4 < 3k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \le 4, \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow k = 2, 3, 4\,.$$

Отже, мішана система сумісна за умови, що $k = 2, 3, 4$, і її розв'язками є відповідні значення змінної $x$: $5, 7, 9$, які дістаємо з останнього рівняння системи. Здобуті значення $x$ є розв'язками даного рівняння.

**11.** Розв'язати рівняння $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x.$

Р о з в'я з а н н я. Спочатку виконаємо рівносильні перетворення рівняння

$$\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1-3x}{2}\right] + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\frac{3-3x}{2}\right] = (x-1)^2.$$

Перейдемо від здобутого рівняння до мішаної системи

$$\begin{cases} \left[\frac{3-3x}{2}\right] = k, \\ k \le \frac{3-3x}{2} < k+1, \\ (x-1)^2 = k \end{cases}$$

з цілим параметром $k$, який, враховуючи останнє рівняння системи, повинен бути невід'ємним. Оскільки подвійна нерівність системи рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} 4k^2 \le 9(x-1)^2 < 4(k+1)^2, \\ 1-x \ge 0, \end{cases}$$

то дослідження сумісності системи зводиться до розв'язування подвійної нерівності

$$4k^2 \le 9k < 4(k+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4k^2 \le 9k, \\ 9k < 4(k+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k \le 9, \\ 4k^2 - k + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le k \le 2.$$

При знайдених значеннях параметра $k$ мішана система сумісна. Відповідні значення змінної $x$ знаходимо з рівняння $(x-1)^2=k$, враховуючи, що $x\le 1$. Маємо $1-\sqrt{2},\ 0,\ 1$ – розв'язки рівняння.

**12.** Знайти усі такі дійсні числа $x$, що не є цілими і при цьому задовольняють рівність $x+\dfrac{2004}{x}=[x]+\dfrac{2004}{[x]}$. (*ВУОМ, ІІІ етап, 2004 р., 10 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Виконуючи очевидні рівносильні перетворення, отримаємо рівняння

$$(x-[x])\left(1-\frac{2004}{x[x]}\right)=0.$$

Оскільки $x$ не є цілим числом, то $x-[x]\neq 0$, а тому

$$1-\frac{2004}{x[x]}=0 \Leftrightarrow x[x]=2004 \Leftrightarrow \begin{cases}[x]=k,\ 0\neq k\in Z,\\ k<x<k+1,\\ kx=2004,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2004}{k},\\ k<\dfrac{2004}{k}<k+1.\end{cases}$$

Спочатку з подвійної нерівності знаходимо $k=-45$, а потім $x=-\dfrac{2004}{45}$.

**13.** Розв'язати рівняння $[2x-1]-[3-x]=2$. (*Кіровоградська ол., 2005 р., 9 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Якщо $[2x-1]=k$, то $[3-x]=k-2$. Тому маємо систему подвійних нерівностей $\begin{cases}k\le 2x-1<k+1,\\ k-2\le 3-x<k-1\end{cases}$ з цілим параметром $k$. Для визначення тих значень параметра, при яких система буде сумісною кожну подвійну нерівність перетворимо так, щоб середня частина в обох подвійних нерівностях була однакова:

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2}\le x<\dfrac{k+2}{2},\\ 4-k<x\le 5-k.\end{cases}$$

Необхідною умовою існування розв'язків здобутої системи нерівностей є нерівності $\dfrac{k+1}{2}\le 5-k$ і $4-k<\dfrac{k+2}{2}$. Звідси знаходимо $k=3$. З останньої системи нерівностей дістаємо $x=2$:

**4.** Розв'язати рівняння $\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\left[x+\frac{1}{2}\right]}$. (*Харківська обл. ол., 2010 р., 10 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Уведемо позначення $\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]=k,\ k\geq 0$ – ціле число.

Тоді $\sqrt{\left[x+\frac{1}{2}\right]}=k\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=k^2$. Ці рівності будуть виконуватися за умови, що

$$\begin{cases} k\leq\sqrt{x}+\frac{1}{2}<k+1, \\ k^2\leq x+\frac{1}{2}<k^2+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k-\frac{1}{2}\leq\sqrt{x}<k+\frac{1}{2}, \\ k^2-\frac{1}{2}\leq x<k^2+\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Якщо $k=0$, то

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\leq\sqrt{x}<\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow 0\leq x<\frac{1}{4}.$$

Якщо $k$ – натуральне, то дістаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\leq x<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2, \\ k^2-\frac{1}{2}\leq x<k^2+\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Не складно переконатися, що $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<k^2-\frac{1}{2},\ k^2+\frac{1}{2}\leq\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$. Тому розв'язки цієї системи утворюють проміжки $\left[k^2-\frac{1}{2},k^2+\frac{1}{2}\right),\quad k=1,2,\dots$ .

Об'єднання проміжків $\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[k^2-\frac{1}{2},k^2+\frac{1}{2}\right)\right)$ утворює множину розв'язків рівняння.

**15.** Розв'язати рівняння $\left[\frac{1}{\sin x}\right]+\left[\frac{1}{\cos x}\right]=0$. (*ВУОМ, ІІІ етап, 2014 р., 10, 11 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. ОДЗ рівняння складають числа, відмінні від $\pi m$ і $\frac{\pi}{2}+\pi n,$ де

$m, n$ – цілі числа. Якщо $\left[\frac{1}{\sin x}\right]=k$, то $\left[\frac{1}{\cos x}\right]=-k$. Тому дістаємо систему подвійних нерівностей $\begin{cases} k \le \dfrac{1}{\sin x} < k+1, \\ -k \le \dfrac{1}{\cos x} < -k+1 \end{cases}$ з цілим параметром $k$. Нескладно переконатися, що вона несумісна, якщо $k=0$ або $k=\pm 1$.

Якщо $k \ge 2$, то ця система рівносильна такій:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+k} < \sin x \le \dfrac{1}{k}, \\ \dfrac{1}{1-k} \le \cos x < \dfrac{1}{-k}. \end{cases} \tag{1}$$

Розв'язки системи потрібно шукати у другій чверті координатної площини. Нехай $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Розв'язуючи подвійні нерівності, дістаємо систему

$$\begin{cases} \pi - \arcsin\dfrac{1}{k} \le x < \pi - \arcsin\dfrac{1}{1+k}, \\ \arccos\dfrac{1}{-k} < x \le \arccos\dfrac{1}{1-k}. \end{cases} \tag{2}$$

Вона може бути сумісною тільки за умови, що

$$\begin{cases} \pi - \arcsin\dfrac{1}{k} \le \arccos\dfrac{1}{1-k}, \\ \arccos\dfrac{1}{-k} < \pi - \arcsin\dfrac{1}{1+k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{k}\right) \ge \sin\left(\arccos\dfrac{1}{1-k}\right), \\ \sin\left(\arccos\dfrac{1}{-k}\right) > \sin\left(\pi - \arcsin\dfrac{1}{1+k}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k} \ge \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{1-k}\right)^2}, \\ \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{-k}\right)^2} > \dfrac{1}{1+k}. \end{cases}$$

Єдиним цілим розв'язком здобутої системи є $k=2$. Розв'яжемо систему (2) при установленому значенні параметра:

$$\begin{cases} \pi - \arcsin\dfrac{1}{2} \le x < \pi - \arcsin\dfrac{1}{3}, \\ \arccos\dfrac{1}{-2} < x \le \arccos(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} \le x < \pi - \arcsin\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{2\pi}{3} < x \le \pi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5\pi}{6} \le x < \pi - \arcsin\dfrac{1}{3}.$$

Якщо $k \le -2$, то в четвертій чверті аналогічно знаходимо розв'язки системи (2). Вони утворюють проміжок $\left(-\arccos\frac{1}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

Враховуючи періодичність синуса і косинуса, дістаємо множину $X$ розв'язків даного рівняння –

$$X = \bigcup_{n-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, (1+2n)\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\pi n - \arccos\frac{1}{3}, 2\pi n - \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

**16.** Знайти всі натуральні числа $n$ такі, що числа $n, \left[n\sqrt{2}\right], \left[\left[n\sqrt{2}\right]\sqrt{2}\right]$ утворюють арифметичну прогресію. (*ВУОМ, IV етап, 2002 р., 10 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Якщо задані числа утворюють арифметичну прогресію, то повинна виконуватися рівність $n + \left[\left[n\sqrt{2}\right]\sqrt{2}\right] = 2\left[n\sqrt{2}\right]$. Увівши позначення $\left[n\sqrt{2}\right] = p$, $p \in \mathrm{N}$, дістанемо рівняння $2p = \left[\sqrt{2}p\right] + n$.

Утворимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left[n\sqrt{2}\right] = p, \\ \left[\sqrt{2}p\right] = 2p - n \end{cases}$$

з цілим додатним параметром $p$. Знайдемо ті значення $p$, при яких система може мати розв'язки. За означенням цілої частини маємо систему подвійних нерівностей

$$\begin{cases} p < n\sqrt{2} < p+1, \\ 2p - n < \sqrt{2}p < 2p - n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < n\sqrt{2} < p+1, \\ 2\sqrt{2}p - 2p < n\sqrt{2} < 2\sqrt{2}p - 2p + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Оскільки $2\sqrt{2}p - 2p < p + 1$, то система може бути сумісною тільки за умови, що $p < 2\sqrt{2}p - 2p + \sqrt{2} \Rightarrow p < 3\sqrt{2} + 4 < 9 \Rightarrow p \le 8$. З нерівності $n\sqrt{2} < 2\sqrt{2}p - 2p + \sqrt{2}$ випливає, що $n \le 5$. Не складно переконатися, що шуканими числами є 1, 2, 3, 5.

### Локалізація області допустимих значень рівняння

**17**. Розв'язати рівняння $\sqrt{x - \{x\}} - \sqrt{x - [x]} = \frac{2}{3}$.

Р о з в'я з а н н я. Оскільки $x - [x] = \{x\}$, а $x - [x] = \{x\}$ для будь-якого значення $x$, то задане рівняння рівносильне ірраціональному рівнянню $\sqrt{[x]} = \frac{2}{3} + \sqrt{\{x\}}$.

Областю допустимих значень $[x]$ є множина цілих невід'ємних чисел. З властивості 4) дробової частини випливає, що $\frac{2}{3} \le \frac{2}{3} + \sqrt{\{x\}} < \frac{5}{3}$. Тому ліва частина рівняння також повинна міститися на цьому і тільки на цьому проміжку:

$$\frac{2}{3} \le \sqrt{[x]} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \le [x] < \frac{25}{9} \Rightarrow [x] \in \{1;2\} \subset \{0,1,\cdots\}.$$

Якщо $[x]=1$, то спочатку з рівняння $\sqrt{1} = \frac{2}{3} + \sqrt{\{x\}}$ дістаємо $\{x\} = \frac{1}{9}$, а потім знаходимо $x = \frac{10}{9}$. У випадку, коли $[x]=2$, знаходимо $\{x\} = \frac{22}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ і $x = \frac{40}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

**18.** Розв'язати рівняння $x^2 + 2^{[x]} = 2$. (*Кіровоградська ол., 2002 р., 10 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Очевидно, що кожен доданок лівої частини рівняння не може бути більшим за 2. Тому $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ – проміжок, на якому треба шукати розв'язки рівняння. Розв'язуючи рівняння на проміжках $[-\sqrt{2}, -1), [-1, 0), [0;1), [1;\sqrt{2})$ дістаємо $x = -\frac{\sqrt{7}}{2} \in [-\sqrt{2}, -1)$. На інших проміжках рівняння розв'язків не має.

**19.** Розв'язати рівняння $[tgx]\sqrt{1 - tg^2 x} = tgx$. (*Київська районна ол., 2006 р., 11 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Значення тангенса не повинні виходити за межі відрізка $[-1, 1]$. Нехай $tgx \in [-1, 0)$. Тоді $[tgx] = -1$. Дістаємо рівняння

$$-\sqrt{1 - tg^2 x} = tgx \Leftrightarrow 2tg^2 x - 1 \Rightarrow tgx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -arctg\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Якщо $tgx \in [0, 1)$, то $[tgx] = 0$. Маємо рівняння $tgx = 0$. Звідси $x = k\pi, k \in Z$. У випадку, коли $tgx = 1$, приходимо до суперечності $0 = 1$. *Відповідь*: $-arctg\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi m, \pi n; m, n \in Z.$

**20.** Розв'язати рівняння $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$. (*ВУОМ, IV етап, 2012 р., 8 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. Локалізуємо ОДЗ рівняння. За властивістю 4)

$$3x^2 = \{x\}^2 + 2\{x\} < 3 \Rightarrow x^2 < 1.$$

Розв'язки шукатимемо на проміжку $(-1, 1)$. Перейдемо до цілої частини:

$$\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2 \Leftrightarrow (x-[x])^2 + 2(x-[x]) = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x[x] + [x]^2 + 2x - 2[x] = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$-2x[x] + [x]^2 + 2x - 2[x] = 2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 2x + 1 + 2x + 2 = 2x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ -2x = 2x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 2x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0. \end{array}\right.$$

*Відповідь*: $\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}, 0$.

**21.** Розв'язати рівняння $x^{2013} - x^{2014} = \left\{\dfrac{2015+x}{1+[x]}\right\}$**.** (*ВУОМ, IV етап, 2013 р., 9 кл.*).

Р о з в'я з а н н я. З урахуванням обмеженості дробової частини дістаємо нерівність

$$0 \le x^{2013} - x^{2014} < 1 \Rightarrow x^{2013}(x-1) \le 0 \Rightarrow x \in [0, 1].$$

Якщо $x \in [0, 1)$, то $[x] = 0$, а $\left\{\dfrac{2015+x}{1+[x]}\right\} = x$. Тому дістаємо рівняння

$$x^{2013} - x^{2014} = x \Leftrightarrow x(x^{2013} - x^{2012} + 1) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Перевіркою встановлюємо, що $1$ – розв'язок рівняння. *Відповідь*: $0, 1$.

Використовуючи наведені способи, можна розв'язати рівняння:

**1.** $\left[x^{2003}\right] + \left[x^{2002}\right] + \ldots + \left[x^2\right] + \left[x\right] = \{x\} - 1$. (*ВУОМ, IV етап, 2003 р., 8 кл.*).

**2.** $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$. (*ВУОМ, IV етап, 1998 р., 11 кл.*).

**3** $ctg^2 x = \{\sin^2 x\} + [\cos^2 x]$. (*ВУОМ, IV етап,1994 р., 11 кл.*).

**4** $[x] + \dfrac{1999}{[x]} = \{x\} + \dfrac{1999}{\{x\}}$. (*ВУОМ, IV етап, 1999 р., 9 кл.*).

**5** $[|x|] = |[x]|$. (*ВУОМ, IV етап, 2003 р., 8 кл.*).

**6** $\left[|x|\right] + \left|[x]\right| = a, a \in$ **R** (*Кіровоградська ол., 2001 р., 10 кл.*).

**7** $\left[x + \left[x + \ldots + \left[x + [x]\right]\ldots\right]\right] = \left|x + |x| + \ldots + |x + |x|\ldots|\right|$, де:

1) у лівій частині рівняння 10 знаків «+», а в правій – 11 знаків «+»,

2) у лівій частині рівняння 11 знаків «+», а в правій – 10 знаків «+». (*Кіровоградська обл. ол., 2008 р., 10, 11 кл.*).

**8.** Знайти найменший корінь рівняння $x-[\sqrt{x}]^2-2011=0$. (*Львівська обл. ол. 2011 р., 8 кл.*).

**9.** Знайти значення виразу $\lfloor x^2 \rfloor-[x]^2$ для всіх таких дійсних $x$, що задовольняють рівність $[x]\{x\}=\frac{2007}{2}$. (*Одеська обл. ол., 2007 р., 10кл.*).

*Відповіді*: **1.** $-1$. **2.** $-1{,}5,\ -0{,}5$. **3.** $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ \pm 0{,}5\arccos(2-\sqrt{5})+k\pi,\ k\in Z$.
**4.** $n+\frac{1999}{n},\ n=2000, 2001, \ldots$ **5.** $x\in\{-n, n\in N\}\cup[0,+\infty)$. **6.** $x\in\{-k\}\cup\ [k;k+1)$, *якщо* $a=2k, k=0,1,2,\ldots$; $x\in(-k;1-k)$, *якщо* $a=2k-1, k=1,2,\ldots$ .
**7.**1). 0. **7.**2). $\frac{12k}{11},\ k=0,1,\ldots,10$. **8.** 1014047. **9.** 2007.