ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ УМІНЬ ІНТЕГРАТИВНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯ НАБОРІВ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ, УТВОРЕНИХ ЗАДАЧНОЮ ТЕМОЮ

Василь КУШНІР, Ренат РІЖНЯК

У статті досліджуються проблеми організації розв'язування множин математичних задач (у тому числі з використанням інформаційних технологій), що утворені задачними темами, з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів.

This article investigates the problem of solving sets of mathematical problems (including those that use information technology), which are formed by themes of the exercises, to organize integrative learning activities of students.

При вивченні різних понять математики з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій (ІКТ) важливу роль можуть відігравати графічні, обчислювальні, моделювальні та імітаційні можливості інформаційно-комп'ютерних технологій, зокрема пакетів математичних програм. Потребує ретельного дослідження проблема вивчення впливу ІКТ на особистість учнів, рівень їх математичної підготовки, здатність учнів проявити на підсумковій стадії шкільного навчання математики інтегративні уміння узагальнення теоретичних або практичних результатів, систематизації та продуктивного використання отриманих знань.

Зазначена проблема набуває особливого значення з огляду на запровадження в системі української освіти зовнішнього незалежного оцінювання випускників. Це спонукає методистів та вчених-педагогів сконцентрувати свою увагу не лише на теоретичній, а саме на продуктивно-практичній підготовці випускників. А тому досить важливого значення набуває формування в учнів умінь орієнтуватися в наявних інтегративних зв'язках між окремими компонентами шкільного курсу математики та, як наслідок, формування в учнів умінь та навичок інтегративної навчальної діяльності.

Основні фактори методичного та методологічного впливу використання інформаційно-комп'ютерних технологій (у контексті реалізації можливостей комп'ютерного моделювання) на еволюцію математичної освіти можна визначити так: а) ІКТ є складовою частиною забезпечення інтеграції змісту шкільної математичної освіти; б) ІКТ є одним з чинників забезпечення організації навчання розв'язування математичних задач з використанням моделей та модельних переходів; в) ІКТ є чинником забезпечення інтеграції математичних знань із загальними науковими, енциклопедичними та популярними знаннями про інформацію; г) ІКТ розширюють можливості для розв'язування нових класів шкільних задач, які без застосування ІКТ розв'язати неможливо у межах «класичної математики».

З іншого боку – актуальним та важливим у навчанні є інтегративний підхід, зокрема він дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами, співставляти закономірності та закони навчальної дисципліни, яка вивчається, із закономірностями та законами природи. У [1] та [2] ми вже відзначали, що інтегративна лінія у шкільному курсі математики поступово знаходить більш детальну реалізацію у використанні навчальних математичних задач інтегративного змісту (описове означення поняття задачі інтегративного змісту було надане у цих роботах). Розв'язування таких задач потребує глибоких знань та винахідливості; тут не лише використовуються знання учнів з певної теми, а й виникає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільної математики (а то й з інших навчальних дисциплін) в плані актуалізації основних змістовних ліній шкільної математики ([1], [3]), що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури ([2], [3]).

У даній статті автори мають намір детально розглянути процес роботи над задачною темою, де підхід до формулювання умови конкретної задачі буде змінюватися в залежності від рівня (репродуктивного, продуктивного, творчого) умінь, необхідних для розв'язування задачі (класів математичних компетентностей – [4]). Раніше ми досліджували використання способів організації етапів розв'язування задач (див. [1], [2], [5]). У даній роботі дослідимо методичну доцільність використання складання та розв'язування (в тому числі з використанням ІКТ) різних задач, породжених заданою задачною темою у формуванні в учнів інтегративних знань і умінь при оперуванні математичним матеріалом. Під ***інтегративним образом задачної теми*** будемо розуміти цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для дослідження «множини задач», що породжені задачною темою на предмет їх розв'язування та дослідження. Зазначимо, що як не можна говорити про необхідність організації розв'язування всіма суб'єктами навчання усіх задач з «множини задач», породжених задачною темою, так і немає сенсу говорити про найбільший (найповніший) обсяг згаданої «множини задач». ***Обсяг інтегрованого образу задачної теми*** будемо визначати у відповідності до поставлених цілей навчальної діяльності.

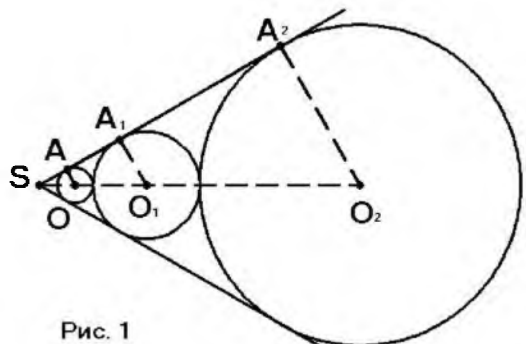

Рис. 1

Отже, ***основна мета нашого дослідження*** буде полягати у тому, щоб визначити методичні умови, при яких використання розв'язування та дослідження «множини задач» (в тому числі з використанням ІКТ), породжених заданою задачною темою, буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом. Розглянемо детальніше висловлені ідеї на прикладах. Задамо задачну тему як ***вписування в кут величиною*** α ***комбінацій геометричних фігур*** (коло, трикутник, квадрат і т.п.). Складемо задачу на задану тему:

Задача 1. У кут величиною 60° вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга? (задача № 4.085 з [6]).

Спочатку будуємо кут 60° (рис. 1). Проаналізувавши ситуацію, приходимо до висновку, що центр даного кола знаходитиметься на бісектрисі даного кута , а дане коло будується за допомогою прямокутного трикутника ΔSAO (так як $\angle ASO = \frac{1}{2} \cdot 60^0 = 30^0$, то ΔSAO – прямокутний з гострими кутами 30^0 та 60^0, а тому $SO = 2OA$). З'ясовуємо, що центр наступного вписаного кола буде лежати також на бісектрисі даного кута, позначаємо через R_1 радіус шуканого кола, з'ясовуємо подібність трикутників SAO та SA_1O_1, визначаємо, що коефіцієнт подібності рівний $\frac{1}{2}$, визначаємо у цих трикутниках пари пропорційних сторін: $\frac{OA}{SO} = \frac{O_1A_1}{SO_1} = \frac{1}{2}$, визначаємо з останньої рівності $O_1A_1 = \frac{1}{2}SO_1$, враховуємо рівності $O_1A_1 = R_1$ та $SO_1 = 3R + R_1$, приходимо до висновку $R_1 = 3R$. Отже, здійснивши ряд міркувань, приходимо до висновку, що радіус шуканого кола буде втричі більший, ніж радіус даного кола. Побудова трьох наступних кіл аналогічна до попередньої побудови. Далі можна запропонувати розв'язати задачу, здійснивши перехід від геометричної мови до алгебраїчної − представивши компоненти умови задачі у вигляді зростаючої геометричної прогресії, перший член якої рівний S_1, а знаменник − 3^2. Тоді задача зводиться до знаходження співвідношення між сумою перших п'яти членів геометричної прогресії та її першим членом:

$$\frac{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5}{S_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{S_1 \cdot (9^5-1)}{(9-1)\cdot S_1} = 7381.$$

Ускладнимо умову задачі, сформулювавши її так.

Задача 2. У кут величиною α вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?

Розглянувши подібність трикутників SAO та SA_1O_1 (рис. 1), визначимо, що:

$$\frac{OA}{SO} = \frac{O_1A_1}{SO_1} = \cos\angle AOS = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Шляхом проведення нескладних міркувань отримуємо співвідношення між радіусами першого та другого вписаних кіл:

$$O_1A_1 = OA \cdot \frac{SO_1}{SO} = OA \cdot \frac{SO + AO + A_1O_1}{SO} =$$

$$= OA \cdot \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{A_1O_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{AO}\right);$$

Звідси маємо: $O_1A_1 = OA \cdot \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Встановлюємо, що радіус наступного кола відрізняється від радіуса попереднього множником $\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$, робимо висновок, що площі всіх п'яти кіл утворюють зростаючу геометричну прогресію, перший член якої дорівнює S_1, а знаменник $\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2$.

Відповідь (для подальшої роботи з задачею позначимо відповідь $f(\alpha)$) до задачі знаходимо у вигляді:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{S_1 \cdot \left(\left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^5 - 1\right)}{\left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 1\right) \cdot S_1} =$$

$$= \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^4 + \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^3 +$$

$$+ \left(\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + 1 = f(\alpha)$$

Задача 2, по суті, є узагальненням першої задачі – а тому рівень умінь, необхідних для її розв'язання, очевидно вищий, ніж тих, що необхідні для розв'язання задачі 1. Пізніше ми це продемонструємо у вигляді схеми. Продовжимо роботу над задачною темою, розширивши поле можливостей учня [7], а, отже, і інтегративний образ задачної теми, до роботи над задачею дослідницького характеру.

Задача 3. У кут величиною α вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга? Дослідити, при якому значенні кута α вказане відношення буде найбільшим (найменшим). Скласти та розв'язати аналогічні задачі, які б розв'язувалися з використанням формули суми нескінченої геометричної прогресії. Самостійно вибравши засоби, провести дослідження розв'язків цих задач

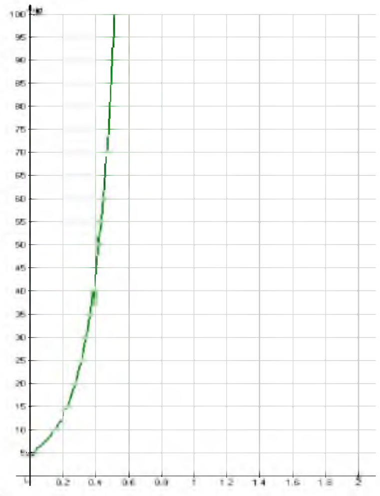

Рис.2.

Дослідження розв`язку задачі можна провести і аналітично, вияснивши властивості функції $f(\alpha)$, яка є відповіддю до задачі 2. Але, зважаючи на обсяг завдання в даній ситуації, доречним буде використання ІКТ (наприклад, програми "Advanced Grapher" [8]). Тому, задавши функцію $f(\alpha)$, будуємо її графік на інтервалі $\alpha \in (0;\ \pi)$ (очевидно, що інші значення аргументу нас не цікавлять). З рис. 2 бачимо, що при $x \to 0^+$ значення функції наближається до числа 5, а при $x \to \pi$ $f(\alpha) \to \infty$. Це легко перевірити, записавши функцію у вигляді:

$$f(\alpha)=\frac{\left(\left(\dfrac{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2\right)^5-1}{\left(\dfrac{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2-1}$$

та взявши відповідні границі. Отже, ні мінімального, ні максимального значення відношення площ не досягається. Зрозуміло лише, що при значеннях α, близьких до 0, відношення площ прямує до числа 5, а чим більше значення α з проміжку $(0;\ \pi)$, тим більшим буде і відношення. Виконуючи наступне завдання задачі 3, можна запропонувати такі умови:

1. У кут величиною α вписане коло, а потім у бік до вершини кута вписані безліч кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх вписаних кругів більша за площу найбільшого круга.

2. У кут рівний α у бік до вершини кута вписані квадрати ABCD, $DB_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$ і т.д., причому AB=a. Знайти відношення суми площ квадратів $DB_1C_1D_1$, $D_1B_2C_2D_2$, … , $D_{n-1}B_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD.

3. В кут рівний α у бік до вершини кута вписані рівносторонні трикутники ABC, CB_1C_1, і т.д., причому AB=a і точки A, C, C_1 і т.д. лежать на одній із сторін кута. Знайти відношення суми площ трикутників CB_1C_1, $C_1B_2C_2$ і т.д. до площі трикутника ABC.

4. В квадрат ABCD вписане коло. В це коло вписаний квадрат $A_1B_1C_1D_1$. В квадрат $A_1B_1C_1D_1$ вписане коло, в яке вписано квадрат $A_2B_2C_2D_2$ і т.д. Знайти відношення суми площ квадратів $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$,…, $A_nB_nC_nD_n$ до площі квадрата ABCD, якщо AB=a.

5. В рівносторонній трикутник ABC, вписане коло, в яке вписаний рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$, і т.д. Знайти відношення суми площ трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,…, $A_nB_nC_n$ до площі трикутника ABC, якщо AB=a.

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі роботи із задачними темами здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу задачної теми та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв`язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначеної роботи. Результати такого аналізу показані на схемі 1 у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу задачної теми, яка сама по собі у практичному використанні є досить корисною; особливо це стосується підготовки на базі таких структурних аналізів уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів, планування та проведення результативних уроків формування або застосування знань та умінь або розробки з використанням подібних деталізованих схем системи завдань навчального характеру або завдань для вимірювання навчальних досягнень учнів. Дійсно, схема 1 ілюструє детальний аналіз компонентів інтегрованого образу задачної теми в залежності від *рівня (репродуктивного, продуктивного, творчого) умінь, необхідних для розв'язування задачі* з «множини задач», що породжена задачною темою, у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для розв'язування або дослідження конкретної задачі; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним апаратом у процесі розв'язування; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння загальними прийомами розв'язування та дослідження задачі. Рис.3, по суті, є об'єднанням в одній схемі можливих у даній «множині задач» компонентів інтегрованого образу задачної теми. Основні поняття, основні математичні дії та уміння, узагальнені дії, формування яких є необхідним для розв'язування конкретних задач з «множини задач», вказані на рис. 3 з відповідними номерами, що відповідають задачам 1, 2 та 3.

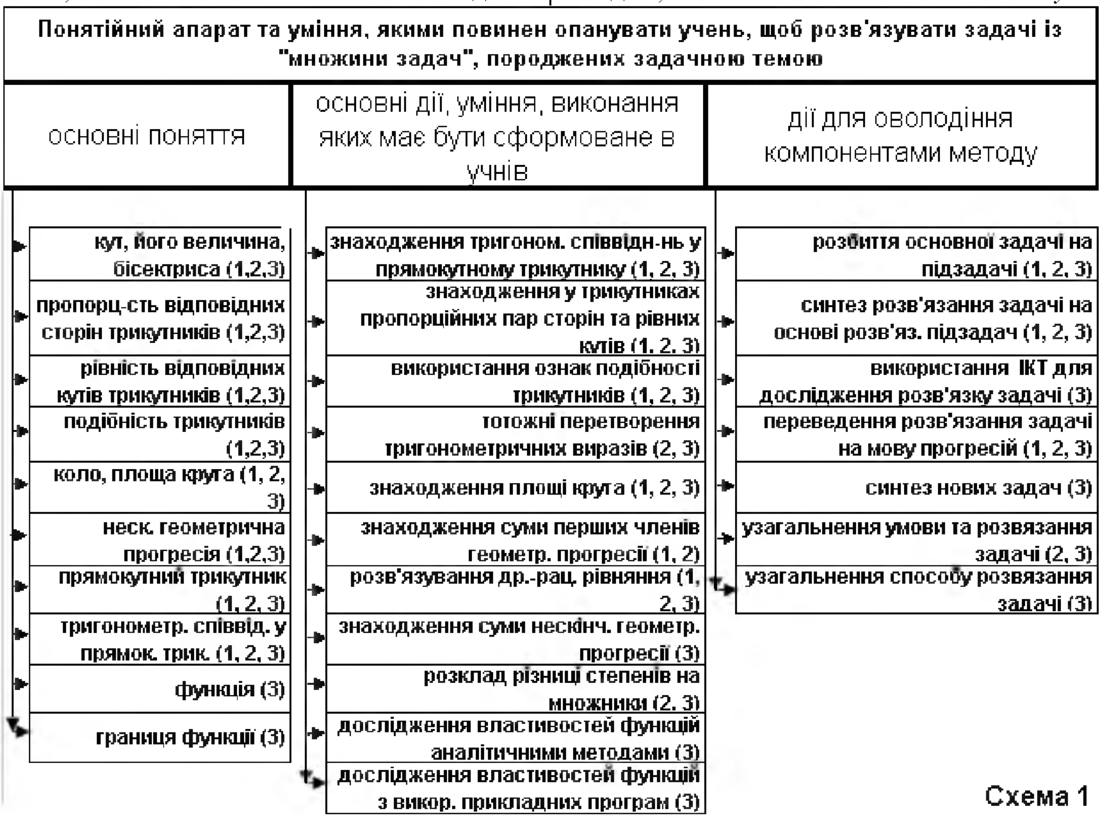

Рис. 3.

Зазначимо, що вказані задачі не вичерпують можливих варіантів породження задачною темою «множини задач»; продовження роботи у даному напрямку може доповнити «множину задач» новим напрямком аналізу компонентів змісту матеріалу та необхідних у контексті його застосування умінь (дивіться початок статті – щодо обсягу інтегрованого образу задачної теми). Межі даної статті потребують деталізації та розкриття методичних умов, при яких організація роботи над породженою задачною темою «множиною задач» буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом. У якості згаданих умов за матеріалами дослідження можна вказати такі:

1. Формування інтегрованого образу задачної теми відбувається у процесі детального аналізу та порівняння ознак та характеристик окремих компонентів інтегрованого образу, що визначаються та задаються у результаті вибору необхідної та виправданої цілями навчального процесу «множини задач»;

2. Вибір конкретної задачі або «множини задач» даної задачної теми проводиться з врахуванням загальної мети організації навчального процесу у конкретно вибраному його епізоді; інакше кажучи – проблема вибору конкретної задачі або «множини задач» даної задачної теми є свого роду евристикою, а отже проблемою поставленої мети і залежить лише від планування вчителем можливої (або необхідної) широти поля можливостей навчальної діяльності учнів [5]. Отже, модель, схема, характеристики чи кінцевий результат формування інтегрованого образу задачної теми залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем.

3. При формуванні інтегрованого образу задачної теми шляхом породження

необхідної «множини задач» вчитель організовує процес мисленого об’єднання компонентів інтегрованого образу задачної теми за їх істотними ознаками; а тому при проведенні описаної навчальної роботи продуктивним для використання є метод узагальнення знань та умінь учнів;

4. У процесі планування та підготовки формування інтегрованого образу задачної теми здійснюється розподіл компонентів інтегрованого образу змісту навчального матеріалу на взаємопов’язані класи за найбільш істотними ознаками по їх подібності (дивіться схему 1); у процесі безпосереднього формування інтегрованого образу задачної теми відбувається систематизація – об’єднання класів компонентів інтегрованого образу у єдину цілісність з подальшим синтезом нових знань.

Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання породження задачною темою необхідної (методично виправданої) «множини задач» з метою формування інтегрованого образу задачної теми. Особливо це можна використовувати при підготовці уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів, при плануванні та проведенні уроків формування або застосування знань та умінь, при розробці системи завдань навчального характеру або наборів завдань для вимірювання навчальних досягнень учнів. Але вірним є і те, що планування формування інтегрованого образу задачної теми слід проводити ретельно, використовуючи спочатку аналіз компонентів інтегрованого образу, потім – детальне співставлення та порівняння згадуваних компонентів з метою подальшого мисленого об’єднання компонентів інтегрованого образу задачної теми за їх істотними ознаками, розподілу компонентів інтегрованого образу на взаємопов’язані класи та подальше об’єднання не окремих компонентів інтегрованого образу, а їх класів. Тоді результатом такої діяльності буде синтез нових знань – зв’язків між отриманими класами компонентів та новими синтезованими суб’єктами навчання компонентами – і, як наслідок, формування інтегрованого образу задачної теми, що обрана предметом дослідження. Саме це і має забезпечити формування в учнів знань та умінь інтегративної математичної діяльності (в тому числі і з використанням ІКТ).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв’язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
2. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Розв’язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп’ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
3. С.А. Раков Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
4. В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк. Системне моделювання процесу розв’язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
5. В.А. Кушнір Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
6. Збірник задач з математики для вступників до втузів / За редакцією М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.
7. Кушнір В.А. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.
8. http://www.serpik.com/.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка;

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: формування інтегративної діяльності студентів засобами ІКТ.