ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ВИВЧЕННЯ СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Наталія ПОДОПРИГОРА, Олександр МІРОШНИЧЕНКО

Наведено опис теоретичних основ співвідношення невизначеностей, структурованого до взаємодій з некласичними об'єктами.

Description of theoretical bases of correlation of vagueness is resulted, structured to co-operations with nonclassical objects.

Співвідношення невизначеностей – вагомий елемент теоретичної фізики, який нелегко піддається розумінню і логічному осмисленню. За аналізом змісту ряду посібників спостерігається певна недовершеність і складність структурування теоретичних викладок як навчального матеріалу щодо оптимальності відтворення ряду положень у прикладному плані до типових некласичних об'єктів. Наведені нижче викладки охоплюють опис застосування співвідношення до ряду мікро- і макросистем.

Співвідношення невизначеностей – це співвідношення, що виникає внаслідок спроби застосувати класичні макроскопічні поняття до опису поведінки некласичних мікроскопічних об'єктів, які описуються принципово іншими, некласичними, тобто квантовими поняттями і законами.

Приписувати частинкам речовини (електронам, протонам, нейтронам, атомам і т. п.) хвильові властивості з погляду класичних уявлень здається безпідставним, недоцільним і суперечливим. Але досліди свідчать: всі мікрооб'єкти володіють і хвильовими властивостями, а тому хвильові поняття (довжина хвилі, хвильове число, частота і т. і.) необхідно застосовувати і до них. І саме це і є одним з джерел співвідношення невизначеностей.

Існують класичні співвідношення, схожі до квантового співвідношення невизначеностей, яких зв'язане з хвильовими властивостями сигналів та своєрідною взаємодією між джерелом та сигналом, а також сигналом та резонатором.

Наведемо деякі положення із теорії коливань.

1. Якщо коливальна система (маятник нитяний, маятник пружний, коливальний контур і т. д.) виконує вільні коливання (рухається лише під дією внутрішніх сил), то її коливання є гармонійними. Але практично будь-яка коливальна система насправді здійснює затухаючі коливання, коли відхилення її від положення рівноваги поступово зменшуються. Такі коливання є негармонійними (амплітуда коливань втрачає зміст, частота в буквальному розумінні – також). Проте, коли коливання затухають слабко (наприклад, сила тертя значно менша сили пружності), то затухаючі коливання розглядаються близькими до синусоїдальних, та разом такими, що мають змінну амплітуду й умовний період коливань.

Наразі амплітуда коливань – це величина максимального відхилу системи від положення рівноваги, яка через рівні проміжки часу утворює спадну геометричну прогресію.

Умовний період – це проміжок часу між двома послідовними максимальними відхиленнями від положення рівноваги в одну й ту ж сторону. Тоді:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha_0),$$

де A_0 – початкова амплітуда (у момент часу $t = 0$), β – коефіцієнт затухання, ω – умовна частота затухаючих коливань, причому:

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad \text{а} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \beta = \frac{c}{2m},$$

де c – коефіцієнт тертя: $F_T = -c\text{v}$ - сила в'язкого тертя, яка лінійно пропорційна швидкості коливань.

2. Що потрібно розуміти під словом „слабке затухання"?

Для цього вводять кількісну характеристику ступеня затухання – добротність коливальної системи.

Основною причиною збурення коливань є квазіпружна сила $F_П = -kx$, а основна причина затухань – сила тертя $F_T = -c\text{v}$.

Добротність системи Q – це характеристика системи й навколишнього середовища, що кількісно дорівнює відношенню максимальної сили пружності до максимальної сили тертя, тобто:

$$Q = \frac{F_П}{F_T} = \frac{kx_{\max}}{c\text{v}_{\max}}.$$

Але $x_{\max} = A$, а $\text{v}_{\max} = \omega_0 A$. (Тут ми поклали, що β – мала, а тому $\omega \approx \omega_0$).

Отже:

$$Q = \frac{k}{c\omega_0} = \frac{m\omega_0^2}{c\omega_0} = \frac{m\omega_0}{c} = \frac{\sqrt{km}}{c}.$$

Можна дати й інше визначення добротності коливальної системи.

Добротність коливальної системи дорівнює відношенню її повної енергії до величини втрати енергії за чверть періоду внаслідок її дисипації.

Виходячи з обчислень повної енергії коливальної системи і втрати енергії за чверть періоду, можна відшукати час, протягом якого коливання практично затухають:

$$\tau \approx \frac{Q}{\omega_0}.$$

Дійсно: $\Delta W_{тепл} = A_{тр} = F_{тр\,ср} \cdot A \approx \frac{cv_{max}}{2} \cdot A = \frac{c\omega_0 A^2}{2}$ – втрата енергії за чверть періоду. $W_{пов} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$, тоді $\Delta W_{тепл} = \frac{W_{пов}}{Q}$.

3. Яким чином взаємодіє коливальна система з періодичною зовнішньою силою?

Як відомо, через деякий час у системі встановлюються незатухаючі коливання за частотою, що дорівнює частоті зовнішньої періодичної сили ω. Це – вимушені, стимульовані коливання (у системі немає автоколивань).

4. За збігання частоти зовнішньої сили з частотою коливальної системи наступає резонанс, що взагалі веде до збільшення амплітуди коливань, причому:

$$A_{рез} = QA_{ст} = Q\frac{F_m}{k} = Q\frac{F_m}{m\omega_0^2}.$$

Прилади, що вимірюють частоту коливань певної системи, називаються резонаторами, бо їх налаштовують у резонанс з джерелом коливань. Резонатор з гострою резонансною кривою має добру вибірковість коливань, тобто з кількох коливань близької частоти впевнено вибрати таку, яка збігається з частотою коливань резонатора. Якщо резонансна крива має похилий вигляд, то резонатор на кілька коливань, тобто має недостатньо вибірковість. Кількісно вибірковість резонатора характеризується половиною ширини резонансної кривої $\Delta\omega$. Це різниця між резонансною частотою ω_0 і частотою ω_1, при якій енергія вимушених коливань у резонаторі виявляється вдвічі меншою, ніж за власної частоті (амплітуда вимушеної сили постійна). Інакше:

$$\frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A_{рез}.$$

Якщо врахувати, що $A_{рез} = Q \cdot A_{ст}$, а $A = \frac{F_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, $(\beta \approx 0)$, то за умови, що Q – велике і $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega| << \omega_0$, а $\omega_0 + \omega = 2\omega_0$ можна одержати: $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$.

Отже, при зростанні Q, $\Delta\omega$ – спадає, а вибірковість контура зростає.

5. Ми розглядали лише вимушені коливання, що встановились у резонаторі після певного часу дії зовнішньої періодичної сили. Але далі нас буде цікавити й процес встановлення коливань за умови резонансу. Можна встановити: якщо на систему з високою добротністю, що була в стані спокою, почне діяти змушувальна сила, частота якої збігається з власною частотою системи (резонанс), то амплітуда коливань наростає пропорційно часу: $A_{рез} = \frac{F_m t}{2m\omega_0^2}$. За відсутності тертя за умов резонансу в коливальній системі спостерігався б процес необмеженого зростання амплітуди. Насправді зростання амплітуди вимушених коливань триває до того часу, доки робота сил тертя не сягає значення рівного роботі вимушеної сили Це дає змогу встановити величину $A_{рез}$ й оцінити час, протягом якого в системі встановлюються вимушені коливання. Це можна встановити, прирівнявши:

$$A_{рез} = \frac{F_m}{c\omega_0^2} \text{ і } A_{рез} = \frac{F_m \tau}{2m\omega_0^2},$$

де τ – час встановлення коливань. Тоді:

$$\frac{F_m}{c\omega_0^2}=\frac{F_m\tau}{2m\omega_0^2}\Rightarrow\tau=\frac{2m}{c}=\frac{2Q}{\omega_0}.$$

Отже, за настання резонансу час наростання коливань і час затухання вільних коливань тієї ж коливальної системи практично однакові між собою (ми проводили оцінки цих величин, а тому маємо лише порядки цих величин).

Відповідно ми можемо оцінити процес прийому синусоїдальних сигналів за допомогою резонаторів. Для цього розглянемо, як реагує резонатор на вимушену силу, що має форму синусоїдального імпульсу, наприклад, ділянку синусоїди (рис. 1а).

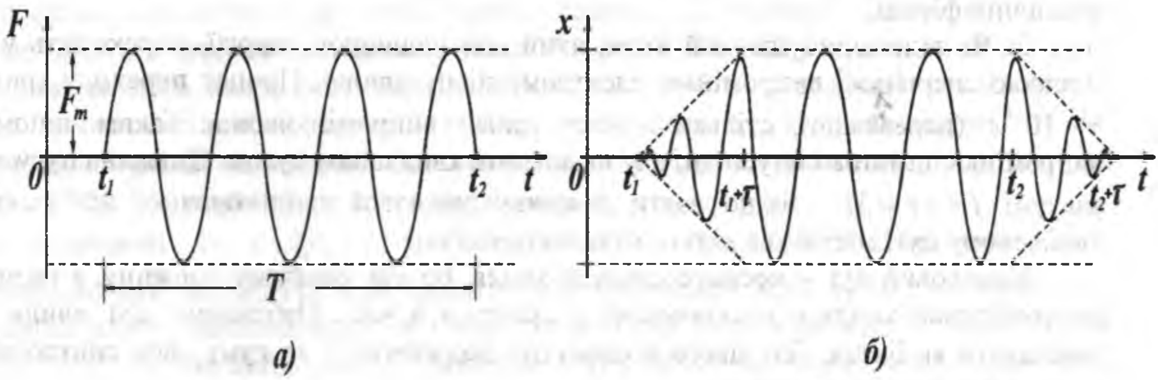

Рис. 1.

Нехай період вимушеної сили $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$, де ω_0 – власна частота резонатора. Оберемо тривалість імпульсу $T>>T_0$. Добротність резонатора Q, час наростання і затухання коливань пов'язані співвідношенням

$$\tau=\frac{Q}{\omega_0}.$$

У момент часу t_1 вмикається вимушена сила, амплітуда коливань у резонаторі розпочне зростати, і в момент $t_1+\tau$ в ньому встановлюються коливання з максимальною (резонансною) амплітудою. У момент часу t_2 вимушена сила вимикається, але в резонаторі коливання ще триватимуть до повного затухання протягом часу τ (рис. 1б).

Отже, резонатор сприймає синусоїдальний імпульс як несинусоїдальний, чимось схожий на биття. Істотно, якщо час встановлення коливань τ значно менший від тривалості імпульсу T, то спотворення синусоїдального імпульсу буде незначним. Якщо ж $\tau\geq T$, то спотворення буде істотним („тире" в абзаці Морзе може навіть перетворитися в „крапку"). Отже, щоб синусоїдальний імпульс відтворювався добре в резонаторі, необхідно щоб він мав малий час розгойдування, тобто малу добротність. Вимога доброї відтворюваності й неспотворюваності синусоїдального сигналу вимагає низької добротності резонатора, а вимога доброї вибірковості резонатора – відповідно високої. Отже, ці дві вимоги до резонатора взаємо суперечливі.

Підкреслимо, що така вимога справедлива не лише для прийняття синусоїдальних імпульсів, а й для прийняття будь-яких модульованих сигналів.

Загальний висновок.

1. Резонатор, за допомогою якого досліджується або просто реєструється деякий коливальний процес, вносить невизначеність у процес вимірювання як частоти, так і

часу. Причина полягає в тому, що частота не може бути визначена точніше, ніж половина ширини резонансної кривої, а час – точніше за час розгойдування резонатора. Разом:

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}, \text{ а } \tau \approx \frac{Q}{\omega_0}.$$

Отже, змінюючи добротність резонатора, можна змінити невизначеність однієї з величин, але при цьому невизначеність другої величини в стільки ж разів зростає.

Тому: $\Delta\omega\,\Delta t \approx 1$.

Це і є співвідношенням невизначеностей для частоти й часу, що є наслідком взаємодії хвиль та коливальних систем. Тобто це співвідношення працює і в звичайній класичній фізиці.

2. Як відомо, збуджений атом, який має надлишок енергії, переходить у стан з меншою енергією і випромінює електромагнітну хвилю. Процес переходу триває час $\tau \sim 10^{-8} c$ (переважно), стільки ж часу триває випромінювання. Таким чином, атом випромінює шматок синусоїди, яку називають хвильовим цугом. Довжина цугу хвиль у вакуумі $l \approx c\tau \approx 3ì$. Якщо взяти довжину світлової хвилі близько $10^{-6}\,ì$, тому у хвильовому цугі міститься кілька мільйонів хвиль.

Хвильовий цуг – несинусоїдальна хвиля, бо має скінчену довжину, а гармонійна синусоїдальна хвиля є нескінченою в просторі й часі. Наближено цуг хвиль можна розглядати як биття. Для цього подамо цуг довжиною l як суму двох синусоїдальних хвиль з близькими частотами:

$$\omega_1 = \omega - \Delta\omega$$
$$\omega_2 = \omega + \Delta\omega,$$

причому $\Delta\omega << \omega$. Та відповідно з близькими хвильовими числами:

$$k_1 = k + \Delta k$$
$$k_2 = k - \Delta k\,.$$

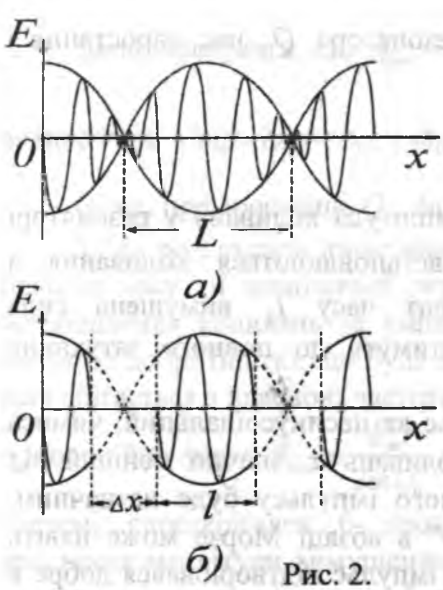

Рис. 2.

Нехай, ці хвилі мають однакові амплітуди:

$$E_1 = E_0\cos(\omega_1 t - k_1 x)\,;\; E_1 = E_0\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0\big(\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\big) =$$
$$= E_0\big(\cos(\omega t - \Delta\omega t - kx - \Delta kx) + \cos(\omega t - \Delta\omega t - kx - \Delta kx)\big) =$$
$$= B\cos(\omega t - kx),$$

причому $B = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$.

Очевидно, що в дану мить $(t = 0)$, підсумкова хвиля є „просторовим биттям" зі змінною амплітудою $B = B_0\cos\Delta kx$ (рис. 2а).

Довжина одного „биття" – це віддаль між сусідніми вузлами.

$$L = \frac{\pi}{\Delta k}.$$

Просторове биття – це хвильовий цуг, але процес його реєстрації приладом розділений на „шматки биттів", що майже не відрізняється від хвильового цуга. Пояснюється це тим, що реєструвальний прилад (у нас резонатор) має певну межу чутливості. Отже, якщо „амплітуда биття" виявиться нижче межі чутливості приладу, то останній хвилю не сприймає, і разом реєструвальний прилад буде фіксувати ті „шматки биттів", які практично від цуг хвиль не відрізняються (рис. 2б).

Наразі можна оцінити невизначеність хвильового цуга. Для цього будемо вважати, що резонатор буде реєструвати „шматки биттів” як цуг хвиль, якщо амплітуда на початку чи в кінці цього шматка й меншою від максимальної амплітуди не більше ніж у два рази: $\frac{B}{B_0} \approx 0.5$ (інтенсивність при цьому зменшиться не більше ніж в чотири рази). Отже:

$$\frac{B}{B_0} = \cos(\Delta x \Delta k) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x \Delta k \approx \frac{\pi}{3} \approx 1 \ (\Delta x \Delta k \approx 1.).$$

Це і є співвідношення невизначеностей для координати й хвильового числа.

Оскільки цуг хвиль – це лише уривок синусоїди, то йому відповідає не одне хвильове число, а інтервал хвильових чисел $k - \Delta k \le k \le k + \Delta k$, шириною $2\Delta k$. Крім того, довжина цуга хвиль має невизначеність Δx, тобто положення цуга хвиль у просторі неможливо знати точніше, ніж з невизначеністю Δx. Невизначеності Δx і Δk обернено пропорційні одна одній. Одночасно, коли x відоме з невизначеністю Δk, то з невизначеності $\Delta\lambda$ відома буде й довжина хвилі.

3. Величини Δx і Δp_x ; Δy і Δp_y; Δz і Δp_z, що зв‘язані між собою співвідношеннями, не можуть дорівнювати нулю одночасно. Крім того, слід зазначити, що співвідношення невизначеностей справедливі й для будь-яких мас, у тому числі й макротіл. Але застосування цього співвідношення можливе тільки тоді (приносить потрібні результати), коли істотну роль відіграє корпускулярно-хвильовий дуалізм, тобто коли λ досить велика. Якщо ж λ де Бройля є досить малою, то ті обмеження, які вносять співвідношення невизначеностей на координати й імпульси, є істотно малими і їх не враховують.

Приклад: 1) Електрон рухається в бетатроні по коловій орбіті радіусом 2,5 $ì$ і з швидкістю, що становить 99 % швидкості світла і $v = 0{,}99\,c = 2{,}97 \cdot 10^8 \frac{ì}{ñ}$. З якою точністю можна задати радіус орбіти та швидкість електрона?

Врахуємо, що $m = m(v)$, тобто

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}} = \frac{m_0}{\sqrt{0{,}01 \cdot 1{,}99}} = \frac{m_0}{1{,}41 \cdot 0{,}1} \approx 7{,}1\, m_0 .$$

Задамо невизначеність радіуса орбіти $\Delta r = 0{,}05\ ì$. Тоді невизначеність радіальної компоненти швидкості:

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{7 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}3 \frac{ì}{ñ}$$

Ця величина порівняно з $2{,}97 \cdot 10^8\, ì\,/\,ñ$ дуже мала і її можна не враховувати. Таким чином, при русі електрона по макротраєкторії невизначеність Δv_r ніякої ролі не відіграє (задачу можна розв‘язувати класичними методами з релятивіськими поправками).

2) Розглянемо рух електронів в атомі. Радіус атома $r \approx 0{,}5 A° = 5 \cdot 10^{-11}\, м$, а орбітальна швидкість $v \approx 10^6 \frac{м}{с}$. Релятивіські ефекти можна не враховувати, бо $v << c$ ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$), а тому $m = m_0$.

Нехай неоднозначність радіуса рівна 1% радіуса орбіти електрона: $\Delta r = 0{,}01r = 5\cdot10^{-13}\, м$.

Отже: $\Delta v_r \approx \dfrac{\hbar}{m\Delta r} = 2{,}2\cdot10^{8}\dfrac{м}{с}$ (майже швидкість світла).

Отже, ніякої мови про рух електрона по орбіті вести не можна, бо швидкість його руху повністю не визначено, а це свідчить про те, що співвідношення невизначеності $\Delta p_x \Delta x \geq \dfrac{\hbar}{2}$ в атомі працює.

3) Співвідношення невизначеностей показують, що всі вимірювальні прилади можна прокласифікувати за двома типами: прилади для вимірювання координати й прилади для вимірювання імпульсу (отже, їх одочасово точно визначити не можна, бо їх точні значення одночасово не існують). Прикладами одного з таких прикладів – пропускання потоку електронів через вузьку щілину. На непрозорий екран з вузькою щілиною $AB = \Delta x$ (екран лежить у площині XYZ). Зліва від екрану кожний з електронів має імпульс $\vec{p}$, спрямований вздовж OY (рис.3).

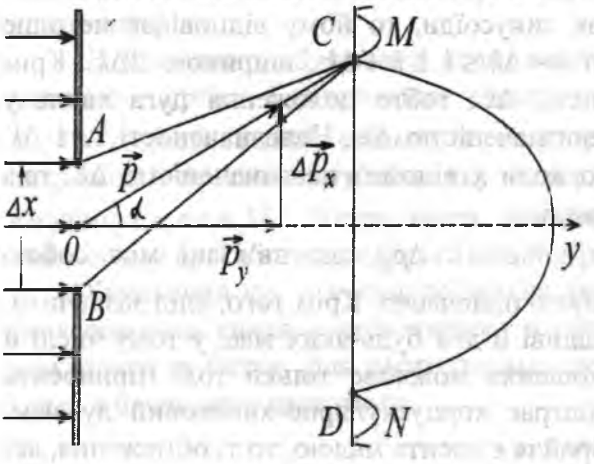

Рис. 3.

Отже зліва від екрана кожний з електронів має точні значення імпульсу $p_y = p$, а тому $\Delta p_y = 0$. Але координати електронів можуть бути довільними, тобто $-\infty < y < +\infty$. Тоді $\Delta y = \infty$, а $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$.

Інша ситуація відбувається, коли електрон проходить через щілину; і знаходиться всередині щілини AB, тобто $\Delta x = AB$. Зменшуючи AB, можна виміряти x із заданою точністю (це лише принципове положення, яке реалізувати дуже складно). За умови, коли розміри щілини будуть порядку дебройлівської довжини хвилі, тобто $\lambda = \dfrac{2\pi\hbar}{p}$, має місце дифракція електронів: на екрані CD будемо спостерігається дифракційна картина; симетричний відносно осі OY головний максимум і ряд вторинних максимумів; до щілини всі електрони рухались вздовж осі OY; і при відхиленні від попереднього напряму одержують приріст імпульсу Δp_x вздовж вісі OX. Можна вважати, що вся дифракційна картина має ширину від нижнього першого мінімуму до відповідного верхнього.

Тому $$\Delta p \approx p\, tg\,\alpha \approx p \sin\alpha \;\; (\alpha - \text{малий})$$

Отже: $$\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\sin\alpha$$

$$\Delta x \sin\alpha = k\lambda \;\; (k=1)$$

$$\Delta x \sin\alpha = \lambda$$

Тоді: $$\Delta x \Delta p_x = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha} \approx 2\pi\hbar$$

Коли враховувати і вторинні максимуми, то $\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar$, тобто одержимо співвідношення невизначеностей Гейзенберга (одну з його форм)

Вчені придумали цілий ряд таких мислених експериментів (визначення положення електрона за допомогою мікроскопа, визначення його імпульсу при відбиванні від кристала тощо), які завжди працюють у відповідності до співвідношення невизначеностей.

Окрім співвідношень $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$, $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$ між координатами та імпульсами, існує ще одне важливе співвідношення такого ж типу.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Гончаренко С.У., Коршак Є.В. Фізика. Олімпіадні задачі. Випуск 2. 9-11 класи. – Тернопіль: „Навчальна книга – Богдан", 1999. – 200 с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Подопригора Наталія Володимирівна – доцент кафедри фізики та методики її викладання КДПУ ім. В.Винниченка.

Мірошниченко Олександр Іванович – випускник КДПУ ім. В. Винниченка.

Наукові інтереси: проблеми методики навчання квантової фізики.