ЗАЛЕЖНІСТЬ МАСИ ВІД ШВИДКОСТІ У СПЕЦІАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ

Наталія Подопригора

В статті розглядається виведення релятивістської залежності маси рухомого тіла від його швидкості, що ґрунтується на використанні релятивістського закону додавання швидкостей й закону збереження імпульсу двох взаємодіючих тіл у методиці навчання шкільного курсу фізики.

In the article the conclusion of relativism dependence of mass of body is consider from his speed which is based on the use of relativism law of addition of speeds and law of maintenances of impulse for two interactive bodies in the method of teaching of school course of physics.

Сучасна перебудова шкільного курсу фізики у середніх закладах освіти, обумовлена передусім, створенням у них профільних класів. Це потребує перегляду навчального матеріалу, який пропонується вивчати згідно з пропонованими програмами та розробці й удосконаленні існуючих методик викладання окремих тем і розділів, відображених у підручниках. Класичні фізичні теорії та методики їх викладання виглядають досить пристойно, і мають достатню й перевірену методологічну основу. Їх удосконалення, передусім, пов'язано із запровадженням до навчального процесу сучасних новітніх технологій навчання. Що ж стосується нових фізичних теорій таких, як релятивістська й квантова – запровадження їх у шкільний курс фізики потребує особливої уваги.

Доведено, що ньютонівська механіка – в цілому логічна й вірна теорія, однак за межами свого застосування вона дає невірні результати і повинна бути заміненою іншими теоріями – релятивістською і квантовою, які в свою чергу теж мають свої межі застосування.

Проаналізувавши основну методичну літературу, підручники й програми для профільних загальноосвітніх навчальних закладів (за якими на вивчення теми відводиться 6 год. для фізико-математичного профілю навчання та 4 год. для природничого профілю [1–3]), ми вважаємо, що бажано обрати за основу викладання нового матеріалу основні положення спеціальної теорії відносності – принцип відносності і принцип інваріантності швидкості світла у вакуумі – й аналіз таких понять, як «швидкість», «час», «довжина», «маса», «імпульс», «енергія», основа яких учням зрозуміла і потребує лише уточнення їх змісту з релятивістських позицій.

У методичній літературі основи релятивістської кінематики описано досить ґрунтовно, навіть пропонується отримання виразу для релятивістського закону додавання швидкостей [2, с. 137-139]. Для учнів середньої школи це виявилось доступним, що перевірено практикою викладання.

Щодо аналізу понять маси й імпульсу в спеціальній теорії відносності, то їх пропонується розпочати з повторення другого закону Ньютона. Але, нажаль, основний програмний матеріал, щодо залежності маси від швидкості та закону взаємозв'язку маси й енергії подається в методичній літературі без їх виведення. Зрозуміло, що це допустимо, до того ж якщо враховувати ту невелику кількість годин, що виділяється на вивчення цієї теми, але навряд чи таку методику можна вважати оптимальною. В даній статті ми пропонуємо свій варіант вивчення основних понять релятивістської динаміки у шкільному курсі фізики. Цьому спонукає те, що: по-перше, вивчаючи основні динамічні закони і величини релятивістської механіки, слід вказувати на їхню відмінність від класичних; по-друге, у класичній механіці такі важливі динамічні величини, як імпульс, момент імпульсу, енергія – можуть бути отриманими як наслідок перетворення основного рівняння динаміки.

Щодо маси, то цей параметр вважається величиною абсолютною, яка приймає одне й теж значення в будь-якій інерціальній системі відліку. Разом з тим у теорії відносності показується, що *маса тіла – величина відносна, що залежить від швидкості руху і в різних інерціальних системах відліку має різні значення.*

Імпульс і кінетична енергія в класичній механіці: $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$ і $T = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2}$, являють собою дві різні міри руху. Кінетична енергія – величина скалярна, вона характеризує рух лише кількісно; імпульс же як фізична векторна величина, – вказує ще й на напрямок руху.

Основний закон класичної механіки – другий закон Ньютона, може бути записаний у вигляді рівняння, що пов'язує швидкість зміни імпульсу й силу, що діє на тіло:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{\mathrm{v}}) = \vec{F} \qquad (1)$$

Оскільки у класичній механіці масу тіла вважають сталою величиною, тоді її можна винести за знак похідної за часом та отримати інший загальновідомий математичний вираз, що відображає зміст другого закону Ньютона:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \qquad (2)$$

Але слід відмітити, що, навіть у класичній механіці формулу (1) слід вважати більш загальною, ніж формулу (2), оскільки перша справджується і для тіл, маса яких змінюється під час їх руху (ракета, потяг із змінним вантажем і т.п.)

Помножимо обидві частини рівняння (2) скалярно на вектор швидкості частинки $\vec{\mathrm{v}}$, тоді для тіла із незмінною масою ми отримаємо співвідношення:

$$m\vec{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{\mathrm{v}} \qquad (3)$$

Рівняння (1) і (3) можна записати ще й інакше:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}) = \vec{F} \qquad (4)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{\mathrm{v}} \quad \text{або} \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = N \qquad (5)$$

Таким чином, швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює діючій на тіло силі, а швидкість зміни кінетичної енергії дорівнює роботі цієї сили за одиницю часу (потужності).

Надзвичайно плідним виявилось введення поняття імпульсу й енергії тіла під час їх розгляду в інших розділах фізики.

Передбачене Дж.Максвеллом та експериментально обґрунтоване П.М.Лебедєвим існування тиску світла показує, що світло (електромагнітна хвилі), як будь-яка інша рухома матерія, володіє імпульсом і як наслідок, «масою».

Поширення поняття енергії на інші форми руху (теплову, електромагнітну та інші) спричинюють існування фундаментального закону природи – закону збереження й перетворення енергії.

Під час дослідження законів руху тіл із релятивістськими швидкостями першочерговими виявляються поняття імпульсу й енергії тіла. Але варто зауважити, що під час пошуку закону руху тіла із великими швидкостями другий закон Ньютона, записаний у форі (2) не може бути використаний для релятивістських ефектів. У класичній фізиці маса вважалась незмінною величиною. Але це справедливо лише за малих швидкостей руху. На це вказують дослідження сучасної науки в інтервалі елементарних частинок. Експеримент показує, що за великих швидкостей рухомого об'єкту його маса є залежною від абсолютної величини швидкості, тобто: $m = m(\mathrm{v})$, де лише $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$ – є величиною незмінною або інваріантною, однаковою у будь-якій інерціальній системі відліку.

Вигляд цієї функціональної залежності може бути однозначно встановлений різними способами. Найсучасніший методологічний прийом – це пошук інваріантів по відношенню до перетворень Лоренца. В аналітичній механіці досить відомим є метод Лагранжа. Чудовою особливістю рівнянь Лагранжа є те, що вони є інваріантними відповідно до будь-якого (неперервного, однозначного) перетворення координат, у тому числі і до перетворень Лоренца. Тому метод Лагранжа є зручним у випадку розгляду релятивістського руху. Для застосування цього методу потрібно скласти функцію Лагранжа, яка була б завчасно інваріантною до перетворень Лоренца. Тоді отримані за її допомогою диференціальні рівняння руху будуть мати інваріантну форму. Але, нажаль, у шкільному курсі фізики вивчити основи аналітичної механіки не виявляється можливим, а основні поняття релятивістської динаміки повинні бути введеними, з огляду на діючі програми для фізико-математичного і природничого профілю [3]. Тому для вирішення цієї проблеми ми пропонуємо застосувати інший прийом, що ґрунтується на основі закону збереження імпульсу і правилі додавання швидкостей у релятивістській теорії, які розглядаються у шкільному курсі фізики. Для досягнення цієї мети розмірковуємо так, як це в свій час вперше зробив відомий фізик Р. Толмен.

Нехай відбувається пружній співудар двох однакових куль А і В, причому у системі K швидкості куль до удару рівні за величиною і протилежні за напрямком.

Якщо ми позначимо проекції швидкості кулі А на вісі $0x$ і $0y$ через a і b, тоді відповідні проекції швидкості кулі В будуть рівні $-a$ і $-b$.

Нехай, внаслідок співудару „x-і" проекції швидкостей обох куль залишаються незмінними, а „y-і" проекції змінюють знак, тобто кулі розлітаються у напрямках, вказаних пунктирними стрілками, як це показано на рисунку 1.

Тоді у нерухомій системі відліку K ми матимемо результати для проекцій швидкостей куль А і В до і після удару, що містяться у табл. 1.

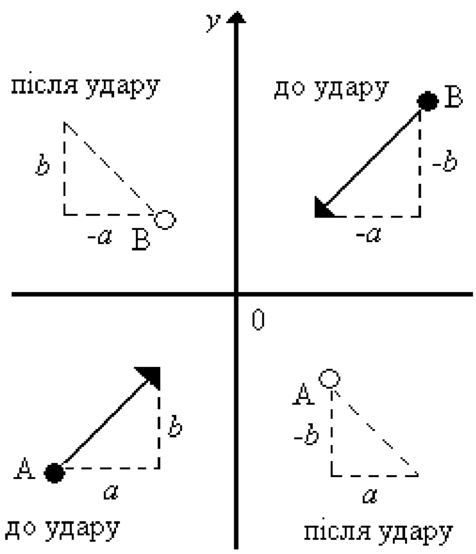

Рис. 1

Таблиця 1.

Куля	до удару		після удару	
	v_x	v_y	v_x	v_y
А	*a*	*b*	*a*	*-b*
В	*-a*	*-b*	*-a*	*b*

У цій системі відліку сумарний імпульс до і після удару дорівнює нулю. Проекції на вісі $0x$ і $0y$ відповідно дорівнюють:

$$m\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot a+m\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot(-a)=0; \qquad m\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot b+m\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot(-b)=0;$$

Перейти до рухомої системи координат K' можна, використовуючи релятивістський закон додавання швидкостей:

$$\mathrm{v}'_x=\frac{\mathrm{v}_x-a}{1-\frac{\mathrm{v}_x a}{c^2}}; \qquad \mathrm{v}'_y=\frac{\mathrm{v}_y\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1-\frac{\mathrm{v}_x a}{c^2}}.$$

Підставляючи значення v_x і v_y у ці формули, отримаємо проекції швидкостей для рухомої системи K' і матимемо відповідну табл. 2.

Таблиця 2.

Куля	до удару		після удару	
	v'_x	v'_y	v'_x	v'_y
A	0	$\dfrac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}$	0	$\dfrac{-b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}$
B	$\dfrac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}$	$\dfrac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}$

Таким чином, у системі K' куля А до і після удару рухається вздовж вісі $0y'$ і картина удару буде такою, як це зображено на рисунку 2.

Абсолютні величини швидкостей куль в системі K' до і після удару не змінюються і дорівнюють $\mathrm{v}'=\sqrt{(\mathrm{v}'_x)^2+(\mathrm{v}'_y)^2}$,

для кулі А: $\mathrm{v}'_A=\dfrac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}$,

для кулі В: $\mathrm{v}'_B=\dfrac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}$.

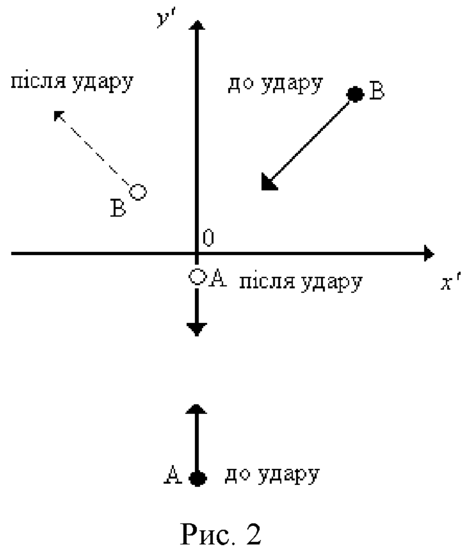

Рис. 2

Запишемо закони збереження імпульсу у системі K'. Легко бачити, що для проекцій імпульсу на вісь $0x'$ закон збереження виконується тотожньо, а саме:

$$\left(m(\mathrm{v}'_A)\mathrm{v}'_{Ax}+m(\mathrm{v}'_B)\mathrm{v}'_{Bx}\right)_{\text{до удару}}=\left(m(\mathrm{v}'_A)\mathrm{v}'_{Ax}+m(\mathrm{v}'_B)\mathrm{v}'_{Bx}\right)_{\text{після удару}},$$

$$m(\mathrm{v}'_{\mathrm{A}})\cdot 0+m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}})\cdot\left(\frac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right)=m(\mathrm{v}'_{\mathrm{A}})\cdot 0+m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}})\cdot\left(\frac{-2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right).$$

А закон збереження імпульсу на вісь $0y'$ дає рівняння:

$$\left(m(\mathrm{v}'_A)\mathrm{v}'_{Ay}+m(\mathrm{v}'_B)\mathrm{v}'_{By}\right)_{\text{до удару}}=\left(m(\mathrm{v}'_A)\mathrm{v}'_{Ay}+m(\mathrm{v}'_B)\mathrm{v}'_{By}\right)_{\text{після удару}},$$

$$m(\mathrm{v}'_{\mathrm{A}})\cdot\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}+m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}})\left(\frac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right)=m(\mathrm{v}'_{\mathrm{A}})\cdot\left(\frac{-b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}\right)+m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}})\cdot\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}.$$

або

$$m(\mathrm{v}'_A)\cdot\frac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}+m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}})\cdot\left(\frac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right)=0.$$

Для отримання функції $m(\mathrm{v})$ поділимо останнє функціональне рівняння на спільний множник $\dfrac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}{1+\frac{a^2}{c^2}}$ й отримаємо:

$$m(\mathrm{v}'_A)\cdot\frac{1+\frac{a^2}{c^2}}{1-\frac{a^2}{c^2}}=m(\mathrm{v}'_{\mathrm{B}}).$$

Ця рівність повинна виконуватись тотожньо за будь-яких значень a і b.

Як частковий випадок, нехай $b=0$, тоді, враховуючи, що

$\mathrm{v}'_{\mathrm{A}}=\dfrac{b}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}}$, а $\mathrm{v}'_{\mathrm{B}}=\dfrac{\sqrt{4a^2+b^2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{a^2}{c^2}}$, отримаємо:

$$m_0\cdot\frac{1+\frac{a^2}{c^2}}{1-\frac{a^2}{c^2}}=m\left(\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}\right), \qquad (6)$$

де $m_0=m(0)$ – стала величина, яку й назвемо масою спокою.

Для того, щоб остаточно отримати функціональну залежність $m(\mathrm{v})$, позначимо:

$$\frac{2a}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\mathrm{v}.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на швидкість світла c:

$$\frac{\frac{2a}{c}}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\frac{\mathrm{v}}{c}.$$

Додамо й віднімемо обидві частини цього рівняння від одиниці та отримаємо дві рівності:

$$\frac{\left(1+\frac{a}{c}\right)^2}{1+\frac{a^2}{c^2}}=1+\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}};\qquad \frac{\left(1-\frac{a}{c}\right)^2}{1+\frac{a^2}{c^2}}=1-\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}.$$

Перемножимо ліві й праві частини цих рівностей:

$$\frac{\left(1+\frac{a}{c}\right)^2}{1+\frac{a^2}{c^2}}\cdot\frac{\left(1-\frac{a}{c}\right)^2}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\left(1+\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\cdot\left(1-\frac{\mathrm{v}}{c}\right),$$

отримаємо:

$$\frac{\left(1-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)^2}{\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^2}=1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2.$$

Якщо добути квадратний корінь, тоді матимемо:

$$\frac{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}$$

Отриману рівність врахуємо у рівнянні (6) й отримаємо остаточно вигляд функціональної залежності маси від швидкості:

$$m(\mathrm{v})=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}. \qquad (7)$$

З функціональної залежності видно, що із збільшенням швидкості тіла маса його збільшується за законом (7) та при наближенні швидкості тіла до швидкості світла у вакуумі зростає безмежно. Але співвідношення (7) ми можемо трактувати й по іншому – *маса тіла є величиною відносною: оскільки в різних системах відліку швидкість тіла різна*, то й маса тіла на підставі рівняння (7) є різною в різних системах відліку. Інваріантною величиною є лише маса спокою.

З урахуванням формули (7) ми можемо записати вираз для релятивістського імпульсу у вигляді:

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{\mathrm{v}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}. \qquad (8)$$

Тобто, в релятивістській механіці між імпульсом тіла й швидкістю вже немає прямої пропорційної залежності, як у класичній фізиці, а існує більш складна залежність, яка відображена формулою (8).

Отже, в рамках відведеного у шкільному курсі фізики на вивчення елементів теорії відносності часу, цей матеріал можна викладати не фрагментарно, а послідовно й логічно, як і будь-яку іншу фізичну теорію. Це означає, що необхідно показати емпіричний базис теорії, її основні постулати, логіку побудови та евристичні можливості на прикладі отримання основних наслідків, що ми і зробили на прикладі введення поняття залежності маси тіла від швидкості. Розширення положень теорії відносності є необхідним елементом для реалізації принципу науковості під час вивчення фізичних теорій у шкільному курсі фізики.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Гончаренко С.У. Фізика: Пробн. иавч. посібник для 11-х кл. ліцеїв і гімназій природничо-наукового профілю. / С.У.Гончаренко. – К.: Освіта, 1995. – 448 с.

2. Методика преподавания физики в средней школе: Електродинамика нестационарных явлений. Квантовая физика: Пособие для учителя / [А.Т.Глазунов, И.И.Нурминский, А.А.Пинский]; под ред. А.А.Пинского. – М.: Просвещение, 1989. – 272 с.

3. Фізика 10-11 кл.: Програми для профільн. кл. загальноосвіт. навч. закладів з укр. мовою навч. Рекомендовано МОН України / [О.Бугайов, М.Головко, Л.Закота та ін.]. – К.: Педагогічна преса, 2004. – 144 с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Подопригора Наталія Володимирівна – доцент кафедри фізики та методики її викладання КДПУ ім. В. Винниченка.

Наукові інтереси: проблеми дидактики фізики середньої і вищої школи.