ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ ТА ЙОГО ІНВАРІАНТНІСТЬ ВІДНОСНО КАЛІБРУВАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕНЬ

Наталія ПОДОПРИГОРА

Розглядається застосування методу одержання законів природи з принципів інваріантності для обґрунтування закону збереження електричного заряду в курсах класичної електродинаміки, квантової механіки, квантової електродинаміки та його релятивістсько-інваріантне узагальнення.

Use of a method of reception of the laws of a nature based on use of principles of invariancy, for a substantiation of the law of preservation of an electrical charge in rates of classical electrodynamics, quantum mechanics, quantum electrodynamics and him Invariant generalization in the theory of a relativity.

Одним з теоретичних методів дослідження у фізиці вважається метод одержання законів природи з принципів інваріантності. Слід відзначити, що цей сучасний теоретичний підхід розглядає всі фізичні поля як калібрувальні, виходячи з цього припущення вдається одержати закони збереження низки різноманітних фізичних величин.

Згідно діючих програм в курсі класичної електродинаміки розглядається один з видів динамічної інваріантності – калібрувальна інваріантність електромагнітного поля, яка для однозначного вибору потенціалів поля доповнюється умовою Лоренца. Але, на жаль, розгляд вказаної фундаментальної властивості поля, цим і обмежується. Далі, вже в курсі квантової електродинаміки встановлюється, що всі поля взаємодій повинні бути калібровано інваріантні – градієнтно-інваріантні, аналогічно до електромагнітного поля. Такі обчислення проводяться в чотиривимірній формі, але вони є досить складними. Можна розглянути найпростіший варіант таких обчислень для обґрунтування закону збереження електричного заряду, спочатку в курсі класичної електродинаміки, а потім – в курсах квантової механіки, квантової електродинаміки тощо та виконати його релятивістсько-інваріантне узагальнення. Ілюструючи, таким чином, ще раз один з ґрунтовних методів сучасної теоретичної фізики – одержання законів збереження з принципів інваріантності.

Для одержання закону збереження електричного заряду в класичній електродинаміці можна враховувати градієнтну інваріантність електромагнітного поля та використати такий метод. Функцію Лагранжа для системи, що складається з електромагнітного поля і зарядів в ньому зображають так:

$$L=\int_V\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}-\frac{B^2}{2\mu_0}+\vec{A}\vec{j}-\rho\varphi\right)dV,$$

де $\vec{E}$ і $\vec{B}$ – вектори напруженості та індукції поля; $\vec{A},\varphi$ – векторний і скалярний потенціали поля; $\rho,\vec{j}$ – густини зарядів і струмів; V – об'єм, в якому знаходиться розглядувана система.

Згідно існуючих рівнянь зв'язку між силовими та енергетичними характеристиками електромагнітного поля:

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ \text{і}\ \vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A},$$

функцію Лагранжа можна виразити через скалярний та векторний потенціали:

$$L=\int_V\left(\frac{\varepsilon_0\left(\mathrm{grad}\varphi+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2}{2}-\frac{\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)^2}{2\mu_0}+\vec{A}\vec{j}-\rho\varphi\right)dV.$$

Визначною рисою калібрувальної інваріантності поля є те, що при калібрувальних перетвореннях ні функція Лагранжа, ні функція дії поля не змінюються, хоч ці величини можуть бути подані як за допомогою силових характеристики поля $\vec{E}$ і $\vec{B}$, так і за допомогою допоміжних – векторного і скалярного потенціалів поля $\vec{A}$, і φ. А формули типу:

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}\ \text{і}\ \vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

не дають можливості однозначно отримати потенціали електромагнітного поля, виходячи з заданих векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$.

Довести це нескладно, якщо розглянути деяку довільну та диференційовану функцію координат і часу $f(\vec{r},t)$, і показати, що перетворення потенціалів електромагнітного поля $\vec{A},\varphi$ типу:

$$\vec{A}'=\vec{A}+\mathrm{grad}f\ \text{і}\ \varphi'=\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}\qquad\text{або}\qquad\vec{A}=\vec{A}'+\mathrm{grad}f\ \text{і}\ \varphi=\varphi'-\frac{\partial f}{\partial t}$$

описують теж саме поле з векторами $\vec{E}$ і $\vec{B}$.
Дійсно:

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}f\right) = \mathrm{rot}\vec{A} + \mathrm{rotgrad}f = \mathrm{rot}\vec{A} + \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}f\right].$$

Зрозуміло, що

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}f\right] \equiv 0,$$

отже

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B}.$$

Далі

$$\vec{E}' = -\mathrm{grad}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}f\right) =$$

$$= -\mathrm{grad}\varphi + \mathrm{grad}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}f.$$

Враховуючи, що

$$\mathrm{grad}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}f,$$

маємо:

$$\vec{E}' = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Таким чином, ми дійсно спостерігаємо інваріантність електромагнітного поля відносно калібрувального перетворення його потенціалів. Отже, оскільки інваріантом по відношенню до градієнтних співвідношень:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}f \text{ і } \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \text{ або } \vec{A} = \vec{A}' + \mathrm{grad}f \text{ і } \varphi = \varphi' - \frac{\partial f}{\partial t}$$

є саме електромагнітне поле, що описується векторами $\vec{E}$ і $\vec{B}$, тоді та частина функції Лагранжа, що описується рівнянням:

$$L = \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0} + \vec{A}\vec{j} - \rho\varphi\right) dV,$$

і залежить від $\vec{E}$ та $\vec{B}$, враховуючи вказану інваріантність, не зміниться.
З'ясуємо, яким умовам повинна задовольняти остання частина функції Лагранжа, що незалежна від $\vec{E}$ і $\vec{B}$, щоб інтеграл дії S був також калібровано інваріантним. Відповідна частина інтегралу дії може бути позначена як:

$$S_1 = \int_\tau dt \int_V \left(\vec{A}\vec{j} - \rho\varphi\right) dV.$$

Якщо застосувати градієнтні співвідношення до S_1, то він набуде вигляду:

$$S_1' = \int_\tau dt \int_V \left(\left(\vec{A}' + \mathrm{grad}f\right)\vec{j} - \rho\left(\varphi' - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right) dV = \int_\tau dt \int_V \left(\vec{A}'\vec{j} + \vec{j}\,\mathrm{grad}f - \rho\varphi' + \rho\frac{\partial f}{\partial t}\right) dV.$$

Оскільки $f\left(\vec{r}, t\right)$ – скалярна функція, а також враховуючи, що

$$\vec{j}\,\mathrm{grad}f = \mathrm{div}\left(\vec{j}f\right) - f\,\mathrm{div}\vec{j},$$

крім того очевидно, що

$$\rho\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho f)-f\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

маємо:

$$S_1'=\int_\tau dt\int_V\left(\vec{A}'\vec{j}+\mathrm{div}\left(\vec{j}f\right)-f\mathrm{div}\vec{j}-\rho\varphi'+\frac{\partial}{\partial t}(\rho f)-f\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV.$$

Отриманий інтеграл дії можна розділити на дві частини, причому одну з цих частин можна проінтегрувати за часом:

$$S_1'=\int_\tau dt\int_V\left(\vec{A}'\vec{j}-\rho\varphi'-f\left(\mathrm{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\right)dV+\int_\tau dt\int_V\left(\mathrm{div}\left(\vec{j}f\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho f)\right)dV.$$

За допомогою теореми Гаусса від дивергенції векторного поля $\left(\vec{j}f\right)$, перейдемо до його потоку через деяку обмежувальну поверхню $\vec{F}$, та проінтегруємо останній доданок за часом:

$$S_1'=\int_\tau dt\int_V\left(\vec{A}'\vec{j}-\rho\varphi'-f\left(\mathrm{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\right)dV+\int_\tau dt\int_F fj_n dF+\int_V\left(\rho f\right)\Big|_{t_1}^{t_2}dV.$$

В одержаному виразі для S_1' останні два доданки нічого не змінюють в рівняннях електродинаміки (рівняння електродинаміки одержуються з функції дії методом варіації). Під час обчислення варіації δS враховується, що варіації всіх інших величин на межах інтегрування рівні нулеві. У нашому випадку t_1 і t_2 – початковий і кінцевий моменти часу, а F – замкнена поверхня, яка обмежує поле в об'ємі V. Оскільки функція Лагранжа L і інтеграл дії S завідомо є градієнтно інваріантними, вони не повинні змінюватись з точністю до сталих інтегрування при градієнтному перетворенні. З одержаної нами останньої формули випливає, що градієнтна (калібрована) інваріантність матиме місце лише тоді, коли

$$\mathrm{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

бо саме за цієї умови $S_1'=S_1$ з точністю до сталих інтегрування. Одержана умова являє собою не що інше як рівняння неперервності.

У класичній електродинаміці це рівняння зображає диференціальну форму закону збереження електричного заряду. Якщо $\vec{j}=0$, то це означає, що джерела електричного струму відсутні або потік густини ступу через замкнену поверхню, що обмежує розглядувану область простору, дорівнює нулю. Отже, тоді і $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, а це означає, що об'ємна густина електричного заряду у даній точці простору не змінюється, $\rho\left(\vec{r}\right)=\mathrm{const}$. Також незмінним залишається і повний заряд розглядуваної замкненої частини простору:

$$Q=\int_V\rho\left(\vec{r}\right)dV=\mathrm{const}.$$

Таким чином, з градієнтної інваріантності електромагнітного поля можна одержати закон збереження електричного заряду, що свідчить про визначальну й фундаментальну роль принципів інваріантності.

У квантовій механіці закон збереження електричного заряду для розглядуваної системи одержується з симетрії її хвильової функції при зміні квантово-механічної фази. Рівняння непевності у квантово-механічному розумінні матиме завчасно інваріантну форму представлення, подібну до електродинамічної:

$$\mathrm{div}\vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0,$$

де $\vec{j}_e$ –квантово-механічна густина струму, ρ_e – густина електричного заряду.

Покажемо, що рівняння неперервності не зміниться при зміні квантово-механічної фази хвильової функції на довільну сталу величину φ_0. Дійсно, будь-яку комплексну хвильову функцію можна подати завжди так:

$$\varphi(\vec{r},t) = R(\vec{r},t)e^{i\varphi(\vec{r},t)},$$

де $R(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$ – дійсні хвильові функції. Тоді густина імовірності, а отже густина заряду будуть рівними:

$$\rho_e = q\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 = qR^2(\vec{r},t).$$

Густина потоку імовірності розрахується як:

$$\vec{j}_e = \frac{i\hbar q}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right),$$

отже

$$\vec{j}_e = \frac{i\hbar q}{2m}\left(R(\vec{r},t)e^{i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}R(\vec{r},t)e^{-i\varphi(\vec{r},t)} - R(\vec{r},t)e^{-i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}R(\vec{r},t)e^{i\varphi(\vec{r},t)}\right) =$$

$$= \frac{i\hbar q}{2m}\left(R(\vec{r},t)e^{i\varphi(\vec{r},t)}\left(e^{-i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}R(\vec{r},t) - iR(\vec{r},t)e^{-i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)\right) -\right.$$

$$\left. - R(\vec{r},t)e^{-i\varphi(\vec{r},t)}\left(e^{i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}R(\vec{r},t) + iR(\vec{r},t)e^{i\varphi(\vec{r},t)}\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)\right)\right) =$$

$$= \frac{i\hbar q}{2m}\left(R(\vec{r},t)\vec{\nabla}R(\vec{r},t) - iR^2(\vec{r},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - R(\vec{r},t)\vec{\nabla}R(\vec{r},t) - iR^2(\vec{r},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)\right) =$$

$$= \frac{i\hbar q}{2m}\left(-2iR^2(\vec{r},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)\right) = \frac{\hbar q}{m}R^2(\vec{r},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) = \frac{\hbar q}{m}R^2(\vec{r},t)\mathrm{grad}\varphi(\vec{r},t).$$

Враховуючи, що

$$\rho_e = qR^2(\vec{r},t),$$

остаточно маємо:

$$\vec{j}_e = \frac{\hbar}{m}\rho_e \mathrm{grad}\varphi(\vec{r},t) = \rho_e \mathrm{grad}\left(\frac{\hbar\varphi(\vec{r},t)}{m}\right).$$

Якщо виконати заміну квантово-механічної фази хвильової функції на довільну величину φ_0, тобто виконати перетворення типу:

$$\varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) + \varphi_0,$$

тоді

$$\psi'(\vec{r},t) = R(\vec{r},t)e^{i(\varphi(\vec{r},t)+\varphi_0)}.$$

Обчислимо тепер ρ'_e і $\vec{j}'_e$ відповідно до отриманих вище перетворень:

$$\rho'_e = q\left|\psi'(\vec{r},t)\right|^2 = qR^2(\vec{r},t) = q\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 = \rho_e$$

$$\vec{j}'_e = \rho'_e \mathrm{grad}\left(\frac{\hbar(\varphi(\vec{r},t)+\varphi_0)}{m}\right) = \rho_e \mathrm{grad}\left(\frac{\hbar\varphi(\vec{r},t)}{m}\right) = \vec{j}_e,$$

бо $\varphi_0 = \mathrm{const}$, тому $\mathrm{grad}\varphi_0 = 0$.

Отже, відповідно одержуємо, що:

$$\mathrm{div}\vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0.$$

Таким чином, перетворення, що змінює фазу хвильової функції системи на довільну величину φ_0, має своїм інваріантом як густину електричного заряду ρ_e, так і густину електричного струму $\vec{j}_e$, при цьому рівняння неперервності залишається інваріантним. Отже, симетрія фізичної системи відносно зміни на довільну сталу величину квантово-механічної фази її хвильової функції дає нам закон збереження електричного заряду.

У квантовій електродинаміці, квантовий стан заряду q описується хвильовою функцією ψ_q і задовольняє рівняння Шредінгера:

$$i\hbar\frac{\partial \psi_q}{\partial t} = \hat{H}\psi_q.$$

Нехай $\hat{Q}$ – оператор електричного заряду. Як відомо, $\langle\hat{Q}\rangle = \overline{Q}$. Середнє значення оператора не буде змінюватись лише тоді, коли $\hat{Q}$ явно від часу не залежить, що очевидно, і коли $[\hat{H},\hat{Q}] = 0$. Якщо ця умова виконується, тоді ψ_q є спільною власною функцією обох операторів. Отже, $\hat{Q}\psi_q = q\psi_q$, причому власне значення q не залежить від часу. Щоб з'ясувати, яка ж саме інваріантність за цим стоїть, використаємо наступне перетворення:

$$\psi'_q = e^{i\varepsilon\hat{Q}}\psi_q,$$

де ε – довільне дійсне число, $\hat{Q}$ – оператор електричного заряду. Перетворення такого типу називають калібрувальними перетвореннями першого роду. Калібрована інваріантність означає, що хвильова функція ψ'_q описує той самий квантовий стан, що і ψ_q. Отже, ψ'_q задовольняє тому ж рівнянню Шредінгера, що і ψ_q:

$$i\hbar\frac{\partial \psi'_q}{\partial t} = \hat{H}\psi'_q,$$

або

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\varepsilon\hat{Q}}\psi_q\right) = \hat{H}e^{i\varepsilon\hat{Q}}\psi_q.$$

Помножимо ліву частину цього рівняння на $e^{-i\varepsilon\hat{Q}}$, тоді матимемо:

$$i\hbar e^{i\varepsilon\hat{Q}}e^{-i\varepsilon\hat{Q}}\frac{\partial \psi_q}{\partial t} = e^{-i\varepsilon\hat{Q}}\hat{H}e^{i\varepsilon\hat{Q}}\psi_q.$$

Враховуємо, що

$$e^{i\varepsilon\hat{Q}}e^{-i\varepsilon\hat{Q}} = 1,\ \text{а}\ i\hbar\frac{\partial \psi_q}{\partial t} = \hat{H}\psi_q,$$

маємо:

$$\hat{H} = e^{-i\varepsilon\hat{Q}}\hat{H}e^{i\varepsilon\hat{Q}}.$$

Оскільки ε – довільне дійсне число, його можна взяти як завгодно малим, щоб $\varepsilon\hat{Q} << 1$ і покласти $\varepsilon^2 \approx 0$. Тоді

$$\left(1 - i\varepsilon\hat{Q}\right)\hat{H}\left(1 + i\varepsilon\hat{Q}\right) = \hat{H}\ ;\ \hat{H} + i\varepsilon\hat{H}\hat{Q} - i\varepsilon\hat{Q}\hat{H} + \varepsilon^2\hat{Q}\hat{H}\hat{Q}\hat{H} = \hat{H}.$$

Отже,

$$i\varepsilon\left(\hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \left[\hat{H}, \hat{Q}\right] = 0.$$

Таким чином, сталість $\left\langle\hat{Q}\right\rangle$ свідчить про те, що відповідно й $q = \text{const}$.

Ми одержали, що з каліброваної інваріантності випливає закон збереження електричного заряду. Або інакше: електричний заряд зберігається, а тому в квантовій теорії допускаються лише такі гамільтоніани, що інваріантні відносно калібрувальних перетворень.

Закон збереження заряду можна записати в релятивістсько-інваріантній формі. Для цього запишемо вектор густини струму у чотиривимірній формі:

$$j_\alpha = \left(\vec{j}, ic\rho\right) \text{ або } j_\alpha = \left(\rho\vec{\mathrm{v}}, ic\rho\right).$$

Тоді закон збереження заряду необхідно подати у загальному чотиривимірному вигляді:

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial j_\tau}{\partial \tau} = 0.$$

Оскільки густину струму ми зобразили у вигляді чотири-вектора, тому вона є за відомо релятивістсько-інваріантною. Отже, закон збереження заряду має місце в усіх інерціальних системах відліку.

Розглянемо заряд dq будь-якого елемента об’єму dV, густина розподілу якого ρ. Застосуємо закон перетворення компонент чотири-вектора до компоненти $j_\tau = ic\rho$. Застосування формул перетворень дає:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}},$$

де ρ – густина заряду в системі K, а ρ' – в системі K', яка рухається по відношенню до K із швидкістю v. Помножимо праву і ліву частини одержаного рівняння на елемент розглядуваного об’єму dV:

$$\rho dV = \frac{\rho' dV}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}},$$

але

$$dV = dV'\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}},$$

отже

$$\rho dV = \rho' dV' .$$

Таким чином ми отримали, що заряд будь-якого елемента об'єму є інваріантним відносно перетворень Лоренца.

Підкреслимо, що в квантовій електродинаміці встановлюється, що всі поля взаємодій повинні бути калібрувально інваріантні – градієнтно інваріантні. Такі обчислення проводяться у чотиривимірній формі, але вони досить складні. Тому ми і вибрали найпростіший варіант таких обчислень, який можна показати студентам. Це дає змогу обґрунтувати закон збереження електричного заряду в курсі теоретичної фізики спочатку в курсі класичної електродинаміки, а потім – в квантовій механіці.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Физматгиз, 1962.
2. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика. – М.: Просвещение, 1990.
3. Петрина П.Я. Квантовая теория поля. – К.: Вища школа, 1984.
4. Кушниренко А.Н. Введение в квантовою теорию поля. – М.: Высшая школа, 1984.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Подопригора Наталія Володимирівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики та методики її викладання КДПУ імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: проблеми дидактики фізики у вищій школі.