УДК 532.59

РЕЗОНАНС ДРУГОЇ ГАРМОНІКИ ХВИЛЬОВОГО ПАКЕТУ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

В.В. НАРАДОВИЙ

Evolution equations on the contact surface and on the free surface in the form of nonlinear Schrödinger equations are obtained. The phenomenon of second harmonic resonance for a system of "layer with haid bottom - the layer with free surface" are investigates.

Получены уравнения огибающих на поверхности контакта и на свободной поверхности в виде нелинейных уравнений Шредингера. Изучено явление резонанса вторых гармоник для системы «шар с твердым дном – шар со свободной поверхностью».

Вступ. Більшість теоретичних досліджень з вивчення внутрішніх хвиль кінцевої амплітуди було пов'язано з аналізом хвильових рухів в системах, де внутрішні хвилі слабко нелінійні і є довгими по відношенню до глибини рідини [6, 12]. У статтях [1-5, 9, 11] досліджені двошарові системи виду «півпростір - півпростір», «шар - півпростір», «шар-шар», а також подано обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень.

У [2] досліджується форма хвильового пакету, а також умови резонансу другої гармоніки. Представлено умови поширення хвильових пакетів і встановлено характерні особливості резонансної області для системи "шар - шар". Аналогічні дослідження проведені в [1] для системи “шар - півпростір”. Також явище резонансу другої гармоніки досліджувалось в роботах [8, 10].

В даній статті досліджено явище резонансу другої гармоніки для системи «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

Постановка задачі та метод розв’язання. Математична постановка задачі про поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \left\{(x,z): |x| < \infty, -h_1 \le z < 0\right\}$ і $\Omega_2 = \left\{(x,z): |x| < \infty, 0 \le z \le h_2\right\}$ з густинами ρ_1 і ρ_2 визначається системою, що складається з рівнянь Лапласа для потенціалів швидкостей φ_1 і φ_2 в кожному з шарів, кінематичних і динамічних умов на поверхні контакту та на вільній поверхні, а також граничної умови на дні. Математична постановка задачі:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\varphi_j = 0 \ \text{в}\ \Omega_j,\\
&\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\alpha\varphi_{j,x}\eta_{,x} \ \text{на}\ z = \alpha\eta(x,t),\\
&\eta_{0,t} - \varphi_{2,z} = -\alpha\varphi_{2,x}\eta_{0,x} \ \text{на}\ z = \alpha\eta_0(x,t),\\
&\varphi_{1,t} - \rho\varphi_{2,t} + (1-\rho)\eta + 0.5\alpha\left[(\nabla\varphi_1)^2 - \rho(\nabla\varphi_2)^2\right] -\\
&-T\left(1+\alpha^2\eta_{,x}^2\right)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0 \ \text{на}\ z = \alpha\eta(x,t),\\
&\varphi_{2,t} + \eta_0 + 0.5\alpha(\nabla\varphi_2)^2 - T_0\left(1+\alpha^2\eta_{0,x}^2\right)^{-3/2}\eta_{0,xx} = 0 \ \text{на}\ z = \alpha\eta_0(x,t),\\
&\varphi_{1,z} = 0 \ \text{при}\ z = -h_1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $j = 1,2$, $\rho = \rho_2/\rho_1$ - відношення густин верхнього і нижнього шарів, $\alpha = a/L$ - коефіцієнт нелінійності, $\eta(x,t)$ - відхиленні поверхні контакту, $\eta_0(x,t)$ - відхилення вільної поверхні. Для визначення розв'язку задачі для малих, але скінченних амплітуд використаємо метод багатомасштабних розвинень

$$
\begin{aligned}
&\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\eta_n(x_0,x_1,x_2,t_0,t_1,t_2) + O(\alpha^3),\\
&\eta_0(x,t) = \sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\eta_{0n}(x_0,x_1,x_2,t_0,t_1,t_2) + O(\alpha^3),\\
&\varphi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^{3}\alpha^{n-1}\varphi_{jn}(x_0,x_1,x_2,z,t_0,t_1,t_2) + O(\alpha^3),\ j = 1,2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де $x_n = \alpha^n x$, $t_n = \alpha^n t$ - масштабні змінні.

Підстановка (2) в (1) приводить до трьох лінійних задач [3] відносно невідомих функцій η_1, η_{01}, φ_{11}, φ_{21}, η_2, η_{02}, φ_{12}, φ_{22}, η_3, η_{03}, φ_{31}, φ_{32}, які є доданками в розкладах (2). Розв'язки першої та другої лінійних задач , дисперсійне співвідношення між хвильовим числом та частотою центру хвильового пакету, умови розв'язуваності другої та третьої лінійних задачах наведено у роботі [3].

Еволюційні рівняння обвідних та резонанс другої гармоніки. Використовуючи умови розв'язуваності другої та третьої лінійних задач, а також дисперсійне співвідношення , отримаємо еволюційні рівняння обвідних на поверхні контакту та на вільній поверхні у вигляді нелінійних рівнянь Шредінгера

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = \alpha^2 I A^2 \overline{A}, \tag{3}$$

$$A^0_{,t} + \omega' A^0_{,x} - 0.5\omega'' A^0_{,xx} = \alpha^2 I_0 (A^0)^2 \overline{A}^0. \tag{4}$$

де A - обвідна хвильового пакету на поверхні контакту, A^0 - обвідна хвильового пакету на вільній поверхні, $\overline{A}$ і $\overline{A}^0$ - комплексно спряжені їм величини.

Як і в попередніх роботах, рівняння (3) та (4) мають розв'язки, які залежать лише від часу

$$A = a\exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} It), \tag{5}$$

$$A^0 = a\exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t). \tag{6}$$

Форма хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні визначається формулами (2), звідки

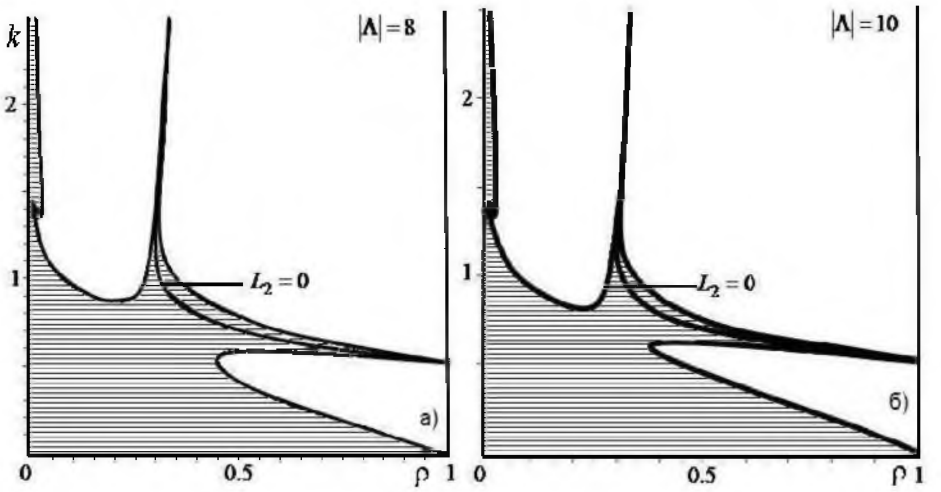
$$\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + \alpha A^2 \Lambda \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2), \tag{7}$$

$$\eta_0(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t) + \alpha A_0^2 \Lambda_0 \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2), \tag{8}$$

де A і A^0 розв'язки, що задаються формулами (5) та (6), $\Lambda(h_1,h_2,T,T_0,\rho,k) = L_1 / L_2$, $\Lambda_0(h_1,h_2,T,T_0,\rho,k) = M_1 / M_2$.

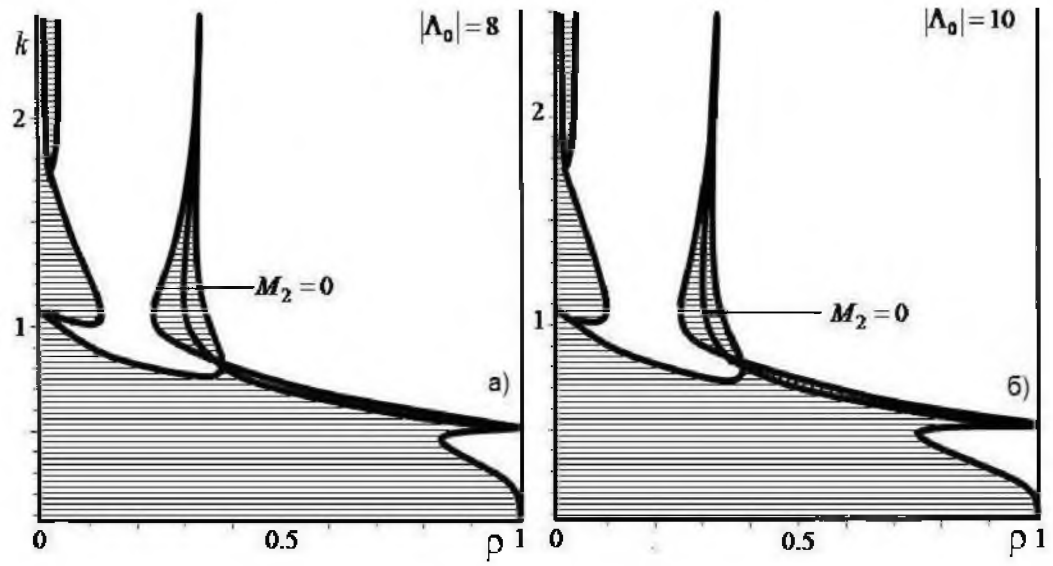
Як відомо, в околі кривої $L_2 = 0$ виникає резонанс другої гармоніки відхилення внутрішньої поверхні контакту, коли амплітуда $\eta_2(x,t)$ зростає порівняно з амплітудою $\eta_1(x,t)$. Подібне явище для двох півпросторів, шару і півпростору розглянуто в роботах [1, 10]. На малюнку 1 показана крива $L_2 = 0$ при значеннях $h_1 = 10, h_2 = 1$, а також показані околи кривої, де значення Λ більше за задану величину ($|\Lambda| > 8$ і $|\Lambda| > 10$)

Аналогічно, в околі кривої $M_2 = 0$ виникає резонанс другої гармоніки відхилення вільної поверхні, коли амплітуда $\eta_{02}(x,t)$ зростає порівняно з амплітудою $\eta_{01}(x,t)$. Нам малюнку 2 показана крива $M_2 = 0$ при значеннях $h_1 = 10, h_2 = 1$, а також показані її околи, де значення Λ_0 більше за задану величину ($|\Lambda_0| > 8$ і $|\Lambda_0| > 10$)



Мал. 1. Області резонансу другої гармоніки при $h_2 = 1$ і $h_1 = 10$

а) $|\Lambda| > 8$; б) $|\Lambda| > 10$



Мал. 2. Області резонансу другої гармоніки при $h_2 = 1$ і $h_1 = 10$

а) $|\Lambda_0| > 8$; б) $|\Lambda_0| > 10$.

Висновки. При дослідженні областей резонансу других гармонік виявлено, що вони вказують на ті параметри двошарової системи, при яких амплітуда другої гармоніки має великі значення. Це зумовлено нехтуванням в математичній моделі задач в'язкості і дисипації енергії, а також відсутністю третього наближення для обвідних хвильових пакетів.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В. Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісник ХНУ, сер. "Математика,прикл. математика і механіка".- 2001.- Вип.50.- С. 122-128.

2. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладная гидромеханика. - 2005. - 7(79), № 1. - С. 80-89.

3. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю.В., Нарадовый В.В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методи та фіз.-мех. поля.- 2009. - 52, №1. - С. 72-83.

4. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля.- 2000. - 44, №2. - С. 113-122.

5. Avramenko O.V., Selezov I.T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on a semi-infinite fluid // Доп. НАН України. - 1997.-N10. - С. 61-66.

6. Benjamin T.B. Internal waves of flnite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech.- 1966.-25.- P. 241-270.

7. Benney C. J. Long nonlinear waves in fluid flows // J.Maths. Phys.– 1966.- 45.- P.52.

8. McGoldric L.F. On the replying of the small waves: a harmonic nonlinear resonant interaction // J.Fluid Mech.- 1972.- 52.- P. 725-751.

9. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.-1976.- 43, N4.- P. 584-588.

10.Nayfeh A.H. Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves // J.Fluid Mech.- 1973.- 59.- P. 803-816.

11.Selezov I., Avramenko O., Nayfeh A., Huq P., Zeegers N. Propagation of water wave-packets at the interface of layer and half-space fluid // Proc. 2nd Int. Conference “Asymptotics in Mechanics”. St-Petersburg State Marine Technical University, St-Petersburg, Russia, 13-16 October 1996. Ed. by A.Nayfeh and K.Rozhdestvensky. St-Petersburg. - 1997. – P. 245-252.

12.Watson K.M. The coupling of surface and internal gravity waves^ revised // J/ of Phis. Oceanography.- 1990, Vol. 20.- Pp.1233-1248