УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Г.В. ЗАВІЗІОН, І.Г. КЛЮЧНИК

Пропонується асимптотичний метод дослідження коливних імпульсних систем диференціальних рівнянь

We propose the asymptotic method of study the oscillatory system of differential equations.

Вступ. В [1] пропонується асимптотичний метод інтегрування m – частотної коливної системи, а також встановлена математична відповідність між положеннями рівноваги амплітудних усереднених рівнянь m – частотної коливної системи і інваріантними торами простору $C^{l-2}(F_m)$.

В даній статті пропонується асимптотичний метод дослідження m – частотної коливної імпульсної системи диференціальних рівнянь і встановлено асимптотичну властивість розв’язків.

Асимптотичний метод дослідження. Розглянемо систему з фіксованими моментами часу вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \varepsilon X(x,\varepsilon),\ t \neq t_i, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = Ix + \varepsilon I(x,\varepsilon),$$

де $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1,n}$; $H = diag(H_1 \ldots H_n)$; $X(x,\varepsilon)$, $I(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями ε, з коефіцієнтами $X_v(x), I_v(x)$, які належать кільцю поліномів $K[x]$ над R, $x \in R^{2n}$.

Асимптотичний розв’язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$x = y + \varepsilon u_1(y) + \ldots \varepsilon^p u_p(y) + \ldots, \tag{2}$$

в якому $y = y(t,\varepsilon)$ є розв’язком усередненого рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \lambda Hy + \varepsilon Y_1(y) + \ldots + \varepsilon^p Y_p(y) + \ldots,\ t \neq t_i, \tag{3}$$

де $u_j, j = 1,2\ldots$ – розв’язок гомологічного рівняння

$$L_0 u_j = X_j(y) - Y_j(y), \tag{4}$$

який задовольняє умові

$$Su_i(y) = 0. \tag{5}$$

Тут $L_0 = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda Hy) - \lambda H$ – гомологічний оператор, S – усереднюючий оператор; функції $Y_i(y)$ і формули для обертання оператора L_0 визначаються в [1]. Виходячи з імпульсних умов для рівняння (1) виведено імпульсні умови для усередненого рівняння (3), які мають вигляд

$$\Delta y|_{t=t_i} = Iy + \sum_{v=1}^{p} \varepsilon^v \widetilde{I}_v(y) + O(\varepsilon^{p+1}), \tag{6}$$

а $\widetilde{I}_v(y)$ обчислюється за формулою

$$\widetilde{I}_1(y) = Iu_1(y) - u_1(y + Iy) + u_1(y),$$

$$\widetilde{I}_m(y) = Iu_m(y) - I_m(y) + \sum_{r=1}^{m} I_{r,m-r}(y) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial u_i}{\partial y}(y + Iy)\widetilde{I}_{m-i}(y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i,m-i}(\widetilde{I}_1 \ldots \widetilde{I}_{m-1}) - u_m(y + Iy) + u_m(y),\ m = 2,3\ldots \tag{7}$$

Вірною є теорема.

Теорема 1. Нехай $X_j(x), I_j(x)$ – поліноми за змінною x, тоді асимптотичне зведення системи (1) до усередненої імпульсної системи визначається за формулами (2) – (7).

Для встановлення асимптотичної властивості розв’язків систему (1) запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \lambda Hx + \sum_{v=1}^{p} \varepsilon^v X_v(x) + \varepsilon^{p+1} X'_{p+1}(x,\varepsilon),\ t \neq t_i$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = Ix + \sum_{v=1}^{p} \varepsilon^v I_v(x) + \varepsilon^{p+1} I'_{p+1}(x,\varepsilon), \tag{8}$$

де

$$X'_{p+1}(x,\varepsilon) = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-z)^p \frac{d^{p+1} X_{p+1}(x,\varepsilon z)dz}{d(\varepsilon z)^{p+1}},$$

$$I'_{p+1}(x,\varepsilon)=\frac{1}{p!}\int_0^1(1-z)^p\,\frac{d^{p+1}I_{p+1}(x,\varepsilon z)dz}{d(\varepsilon z)^{p+1}}.$$

Позначимо $x_p(t,x_p^0,\varepsilon)=y_t(y_0,\varepsilon)+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v u_v(y_t(y_0,\varepsilon))-p-$те наближення системи (8), а $y_t(y_0,\varepsilon)$ є розв'язком рівняння $p-$го наближення

$$\frac{dy}{dt}=\lambda Hy+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v X_v(y),\ t\neq t_i$$

$$\Delta y|_{t=t_i}=Iy+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v\widetilde{I}_v(y)\,, \tag{9}$$

де x_p^0 має вигляд $x_p^0=y_0+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v u_v(y_0)$. Позначимо через D_ρ підобласть, яка міститься в D разом з своїм околом.

Справедливі твердження.

Лема. Нехай для $x\in D_\rho$ виконуються нерівності

$$\|u_v(x)\|\le M,\left\|\frac{du_v(x)}{dx}\right\|\le M,v=\overline{1,p},t\neq t_i\,.$$

Тоді існує $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\rho,M)>0$, що заміна

$$x=y+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v u_v(y) \tag{10}$$

призводить (8) до вигляду

$$\frac{dx}{dt}=\lambda Hx+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v Y_v(x)+\varepsilon^{p+1}Y'_{p+1}(x,\varepsilon),\ t\neq t_i\,.$$

При виконанні нерівностей

$$\left\|\frac{\partial^{p+2-i}u_{p+2-i}(y+Iy+\sum_{v=1}^{p}(\varepsilon z)^v I_v(y)+(\varepsilon z)^{p+1}\widetilde{I}'_{p+1}(y,\varepsilon))}{\partial(\varepsilon z)^{p+1-i}\,\partial y}\right\|\le M_1, i=\overline{1,p},\qquad M_1 p\varepsilon_0^{p+1}<1,$$

заміна (10) імпульсні умови системи (8) приводить до імпульсних умов

$$\Delta y|_{t=t_i}=Iy+\sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v\widetilde{I}_v(y)+\varepsilon^{p+1}\widetilde{I}'_{p+1}(y,\varepsilon),$$

де $Y'_{p+1}(y,\varepsilon),\widetilde{I}'_{p+1}(y,\varepsilon)$ функції, які визначені $(y,\varepsilon)\in D_\rho\times[0,\varepsilon_0]$ і мають розриви першого роду в точках $t=t_i$.

Теорема 2. Нехай виконується лема і умови:

1) розв'язок $y = y_t(z,\varepsilon)$ рівняння $p-$го наближення (9) визначеного для t, z, ε з області

$$t \in [0;\frac{L}{\varepsilon}), \|z - y_0\| \le \varepsilon^r M, \varepsilon \in (0;\varepsilon_0); \tag{11}$$

2) матриця $\frac{\partial y_t(z,\varepsilon)}{\partial z}$ задовольняє нерівностям

$$\left\|\frac{\partial y_t(z,\varepsilon)}{\partial z}\right\| \le \frac{K}{\varepsilon^q}, \left\|\left(\frac{\partial y_t(z,\varepsilon)}{\partial z}\right)^{-1}\right\| \le \frac{K_1}{\varepsilon^{q_1}}, t \ne t_i,$$

для t, z, ε з області (11), де $K, K_1, q, q_1 -$ невід'ємні сталі;

3) виконуються нерівності $r > q, p > r + q_1$;

4) функція $y_{t_i+0}(z,\varepsilon)$ має обернену $z = \psi(y, t_i + 0, \varepsilon)$ відносно z;

5) мають місце нерівності

$$\left\|Y'_{p+1}(y_t,\varepsilon)\right\| \le M_2,\ t \ne t_i,$$

$$\sum_{0<t_i<t}\left\|\frac{\partial \psi}{\partial y}(\tilde{J}_1(y_{t_i}(z,\varepsilon),\varepsilon) + \theta\varepsilon^{p+1}\tilde{I}'_{p+1}(y_{t_i}(z,\varepsilon),\varepsilon))\tilde{I}_{p+1}(y_{t_i}(z,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le \frac{M_3 t}{\varepsilon^{q_2}}, t \in [0;\frac{L}{\varepsilon}),$$

де $\tilde{J}_1(y,\varepsilon) = Iy + \sum_{v=1}^{p}\varepsilon^v \tilde{I}_v(y,\varepsilon); \theta -$ число інтервалу $(0;1)$.

Тоді існує достатньо мале $\varepsilon_0 > 0$, таке, що розв'язок $x = x(t, x_p^0, \varepsilon)$ рівняння (8) задовольняє нерівність

$$\left\|x(t,x_p^0,\varepsilon) - x_p(t,x_p^0,\varepsilon)\right\| \le C\varepsilon^{p-q_1-q}, t \in [0;\frac{L}{\varepsilon}), \varepsilon \in (0;\varepsilon_0),$$

де $C -$ додатня стала.

Теорема 3. Нехай виконується лема і умови:

1) розв'язок $\bar{y} = \bar{y}_\tau(y_0,\varepsilon)$ укороченого рівняння $p-$го наближення

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = Y_1(\bar{y}_\tau) + \varepsilon Y_2(\bar{y}_\tau) + \ldots + \varepsilon^{p-1}Y_p(\bar{y}_\tau), t \ne t_i,$$

$$\Delta\bar{y}_\tau|_{\tau=\varepsilon t_i} = Iy + \varepsilon\tilde{I}_1(\bar{y}_\tau) + \ldots + \varepsilon^{p-1}\tilde{I}_{p-1}(\bar{y}_\tau) + \varepsilon^p\tilde{I}_p(\bar{y}_\tau)$$

визначені при $\tau \in [0;L], \varepsilon \in (0;\varepsilon_0), \tau = \varepsilon t$;

2) виконуються рівності

$$e^{\lambda H t_i}I = Ie^{\lambda H t_i}, \tilde{I}_v(e^{\lambda H t_i}(\bar{y}_{\varepsilon t_i} + z)) = e^{\lambda H t_i}\tilde{I}_v(\bar{y}_{\varepsilon t_i} + z);$$

3) виконується нерівність $p > r$, в якій $r -$ невід'ємна стала;

4) виконується нерівність

$$\sum_{0<t_i<t}\left\|\tilde{I}_{p+1}(e^{\lambda H t_i}(\bar{y}_{\varepsilon t_i} + z),\varepsilon)\right\| \le M_5 t, t \in [0;\frac{L}{\varepsilon}).$$

Тоді існує достатньо мале $\varepsilon_0 > 0$, таке, що розв'язок $x = x(t, x_p^0, \varepsilon)$ рівняння (8) задовольняє нерівність

$$\left\| x(t, x_p^0, \varepsilon) - x_p(t, x_p^0, \varepsilon) \right\| \le C\varepsilon^p, t \in [0; \frac{L}{\varepsilon}) .$$

Таким чином, запропоновано асимптотичний метод дослідження коливної імпульсної системи диференціальних рівнянь і встановлено асимптотичну властивість розв'язків.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М. Асимптотический метод исследования $m-$ частотных колебательных систем // Укр. мат. журн. – 1998 – Т. 50, № 10. – С. 1367 – 1387.