УДК 532.59

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ КОРИСНОСТІ ВІД ЗАТРАТ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Г.А. Кушнір, В.А. Кушнір

У статті розглядаються моделі підтримки прийняття рішень у вигляді нелінійних задач програмування.

In the article the support models of taking decisions in the kind of non-linear programming problems are considered.

Багато економічних проблем вимагає створення моделей, які визначали б ефективність затрат. Досить часто такі моделі будуються на основі моделі задач математичного програмування, частковими випадками якого є лінійне, квадратичне, випукле, цілочисельне програмування. У самому загальному випадку задача математичного програмування має вигляд:

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

$$G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le r_i, \tag{2}$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,2,\ldots,k., \tag{3}$$

де (1) – цільова функція (функція корисності), (2) і (3) – обмеження у вигляді нерівностей. Величиною цільової функції може бути величина різної природи: кошти, якість життя, якість праці, моральне задоволення тощо. Розв’язком задачі математичного програмування є вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, числові координати якого дають оптимальне значення цільової функції.

Для здійснення певного проекту, оптимальний розрахунок якого ведеться за моделлю задачі математичного програмування (1) – (3), потрібні відповідні затрати, обчислення котрих відбувається за визначеною формулою:

$$y = s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

Такими затратами можуть бути кошти, матеріали, час, людські затрати тощо. Зазвичай на затрати у накладаються певні обмеження b. Тоді до задачі математичного програмування (1) – (3) добавиться ще одна нерівність

$$s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b. \tag{5}$$

Модель (1) – (3), (5) по суті буде оптимальною моделлю розподілу затрат b. Якщо затрати можуть змінюватися в межах від 0 до b, то, надаючи дискретних значень b_i з цього проміжку і кожного разу розв’язуючи відповідну задачу математичного програмування (1) – (3) з обмеженням

$$s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i,\ i=1,2,\ldots, n, \tag{6}$$

отримаємо функціональну залежність у вигляді таблиці між затратами b та корисністю Z.

Як уже відзначалося математичною моделлю може виступати модель задачі цілочисельного програмування, яка формулюється так:

знайти вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ що мінімізує цільову функцію

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{6}$$

і задовольняє систему обмежень

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le t_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le t_n$$
$$x_i \ge 0,\ x_i \text{ – цілі},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Приклад задачі цілочисельного програмування: Підприємство вирішило встановити додаткове устаткування, для розміщення якого виділено 19/3 м^2 площі. На придбання обладнання підприємство має змогу витратити не більше 10 тис. грн. Комплект обладнання першого виду коштує 1 тис. грн., а другого – 3 тис. грн. Один комплект обладнання першого типу дозволяє збільшити випуск продукції за зміну на 2 од., а одного комплекту другого типу – на 4 од. При цьому один комплект обладнання першого типу потребує 2 м^2 площі, а другого – 1 м^2. Скільки комплектів кожного виду обладнання треба придбати для максимального збільшення випуску продукції?

Розв'язок. Припустимо, що підприємство придбало x_1 комплектів обладнання першого типу та x_2 комплектів обладнання другого типу. Тоді змінні x_1, x_2 повинні задовольняти наступні нерівності:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases}$$

Якщо підприємство придбає зазначену кількість обладнання, то загальне збільшення випуску продукції сягне

$$F = 2x_1 + 4x_2 \quad \to \quad \max$$

Згідно з економічним змістом змінні x_1, x_2 можуть приймати лише цілочислові невід'ємні значення:

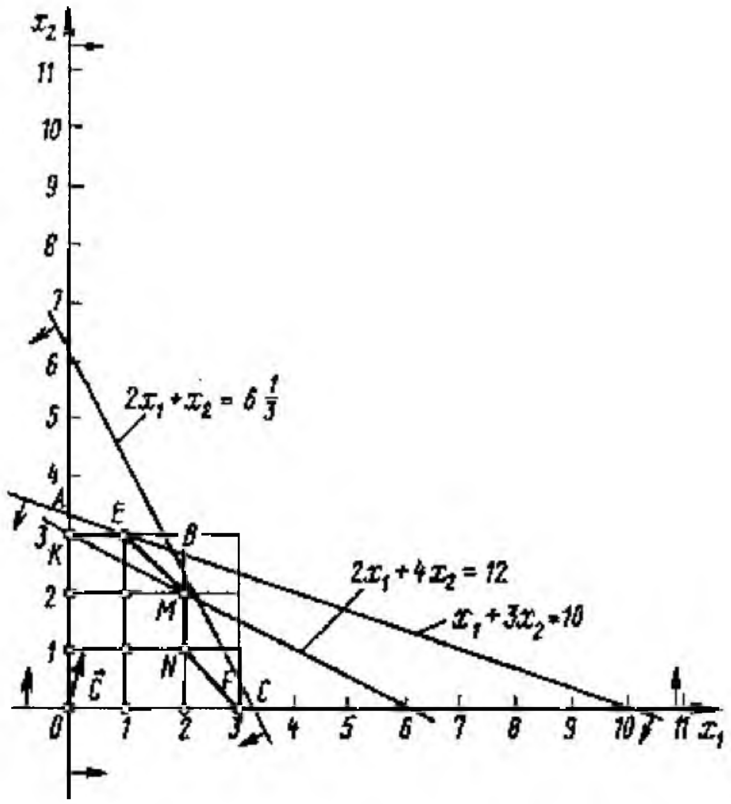
$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$

x_1, x_2 - цілі числа

Використовуючи геометричний метод розв'язку задачі, знаходимо многокутник рішень OAEBC, який задовольняє систему лінійних нерівностей та умови невід'ємності змінних (мал. 1). У той же час цілочисловому значенню змінних задовольняють тільки 12 точок (мал. 1). Замінюємо многокутник OAEBC многокутником OKEMNF, який містить усі допустимі точки з цілочисловими координатами.

Використовуючи вектор C(2,4) та пряму $2x_1 + 4x_2 = h$, знаходимо точку E(1,3), в якій цільова функція набуває максимального значення $F_{max} = 14$. Отже підприємство має придбати один комплект устаткування першого типу та три комплекти устаткування другого типу. Це забезпечить підприємству максимальне збільшення випуску продукції на 14 од. що зміни. Вершина E(1,3) відповідає максимуму цільової функції $F_{max} = 14$.

Розглянемо задачу цілочисельного програмування, де побудована математична модель з використанням Excel-технології [2].



Мал. 1. Многокутник рішень OKEMNF.

Приклад. $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ (цільова функція)

при обмеженнях

$0 \le x_1 \le 5$; $0 \le x_2 \le 10$;

$x_1 + x_2 = c$;

$0 \le c \le 20$;

x_1, x_2 – цілі числа.

Затрати c можуть змінюватися від 0 до 20. Змінюючи c в цих межах з певним кроком h, одержимо функціональну залежність значення цільової функції від затрат c_i. Дана модель реалізується за допомогою інформаційної Excel-технології, що й дозволяє побудувати у програмованому режимі функціональну залежність між можливими затратами і корисністю Z у табличному вигляді [1]. Зауважимо, що на кожному кроці здійснюється оптимальний розподіл затрат c_i.

У таблиці 1 відображена математична модель у Excel-технології [1;2] та розв'язана наведена вище задача цілочисельного програмування.

Таблиця 1

	x1	x2			
значення	0	1			
НГ	0	0			
ВГ	5	10			
коефіцієнти	1	1	1		
	Обмеження				
	1	1	0	дор	1

Таблиця 2

значення			якість
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	2	2	4
5	3	2	5
6	3	3	6
7	4	3	7
8	4	4	8
9	5	4	9
10	5	5	10
11	5	6	11
12	5	7	12
13	5	8	13
14	5	9	14
15	5	10	15
16	5	10	15
17	5	10	15
18	5	10	15
19	5	10	15
20	5	10	15

У таблиці 2 показано динаміку змін оптимального розподілу затрат та залежність цільової функції від затрат. Оптимізація задачі цілочисельного програмування відбувається тільки у послідовному використанні x_1 x_2, що випливає з таблиці 2. Можна побудувати у середовищі Excel графік функції корисності (затрати) за точками з таблиці 2 (мал. 2).

<u>Приклад.</u> $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

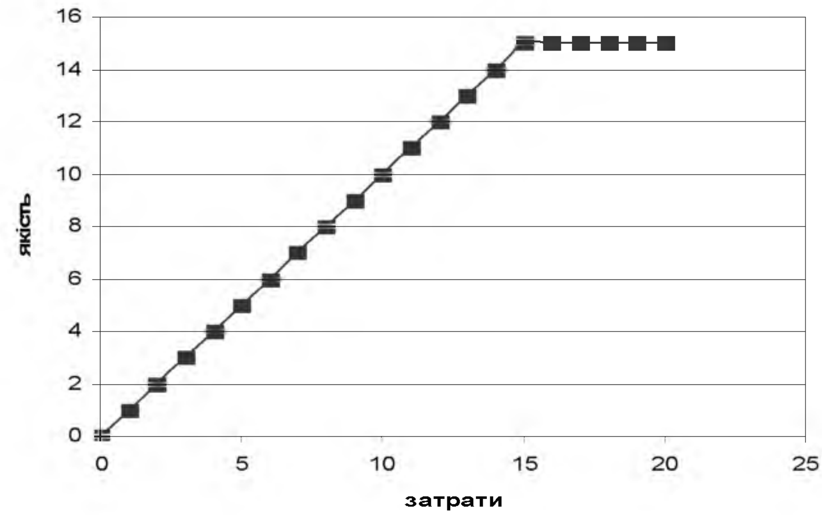
При обмеженнях

$0 \le x_1 \le 5$; $0 \le x_2 \le 9$;

$2x_1 + x_2 = c$;

$0 \le c \le 20$;

x_1, x_2, x_3 - цілі числа.



Мал. 2.

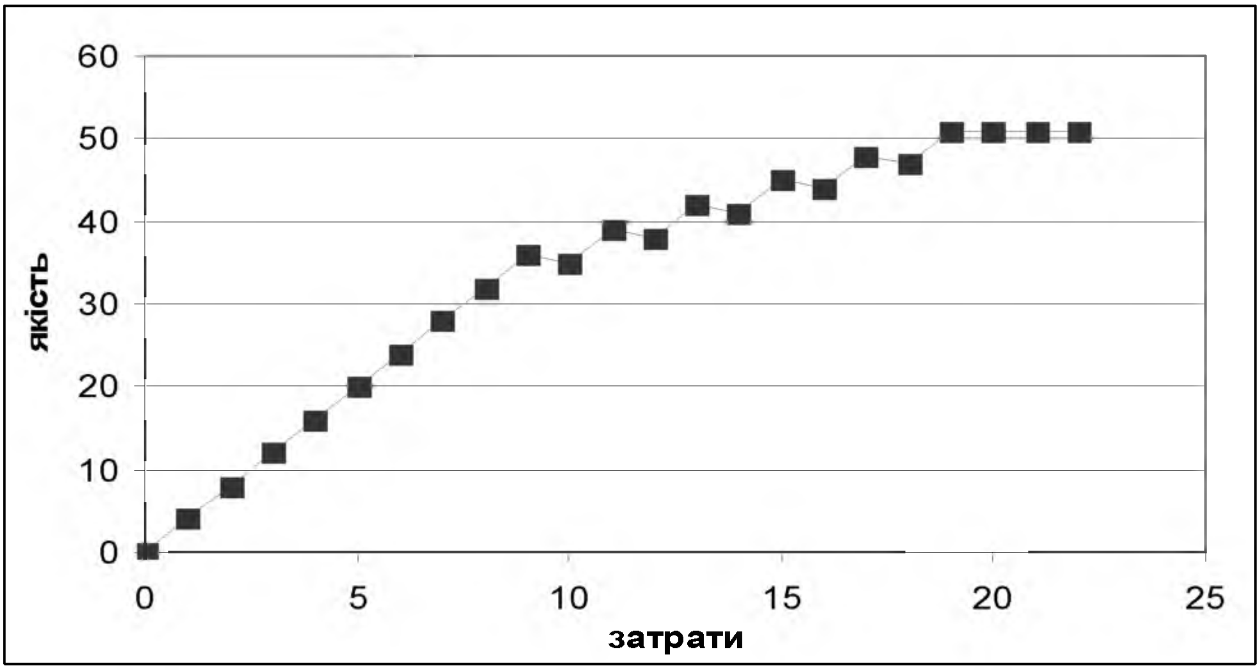
У таблиці 3 відображено постановка задачі в Exel-технології. Таблиця 4 відображає залежність корисності від затрат, а на мал. 3 зображена відповідна геометрична ілюстрація.

Таблиця 3

	x1	x2			
значення	0	0			
НГ	0	0			
ВГ	5	9			
коефіцієнти	3	4	0		
	Обмеження				
	2	1	0	дор	1

Таблиця 4

затрати			якість
0	0	0	0
1	0	1	4
2	0	2	8
3	0	3	12
4	0	4	16
5	0	5	20
6	0	6	24
7	0	7	28
8	0	8	32
9	0	9	36
10	1	8	35
11	1	9	39
12	2	8	38
13	2	9	42
14	3	8	41
15	3	9	45
16	4	8	44
17	4	9	48
18	5	8	47
19	5	9	51
20	5	9	51
21	5	9	51
22	5	9	51



мал. 3.

На мал. 3 зображений графік залежності корисності від затрат.

Приклад. $z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \max$

При обмеженнях

$0 \le x_1 \le 5$; $0 \le x_2 \le 4$; $0 \le x_3 \le 4$;

$x_1 + 10x_2 + 11x_{35} = c$;

$0 \le c \le 94$;

x_1, x_2, x_3 - цілі числа.

У таблиці 5 відображено постановку задачі оптимізації в Exel-технології. Таблиця 6 відображає процес реалізації математичної моделі для кожного c_i , а мал. 4 відповідну графічну ілюстрацію.

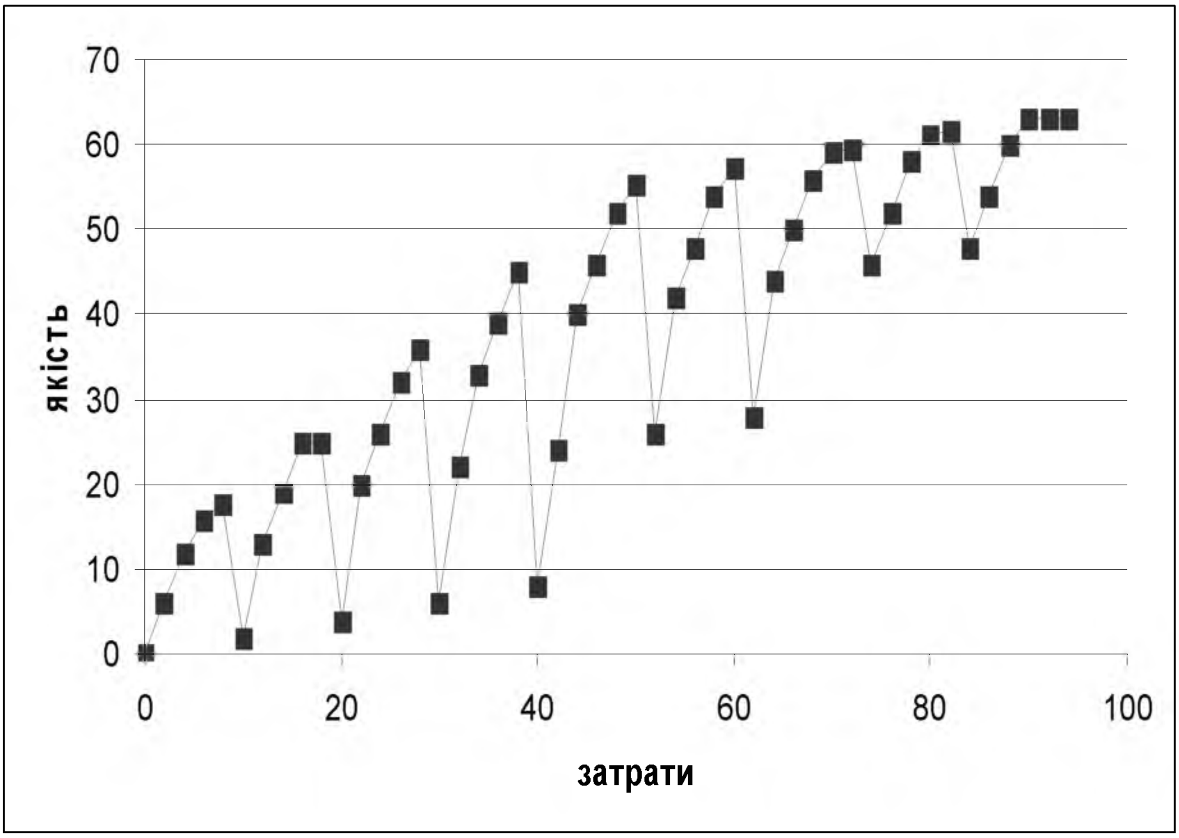
Таблиця 5

	x1	x2	x3	
значення	5	0	1	
НГ	0	0	0	
ВГ	5	4	4	
коефіцієнти	3	2	10	25

	обмеження		значення		
1	10	11	16	дорівнює	16

Таблиця 6

затрати				якість
0	0	0	0	0
2	2	0	0	6
4	4	0	0	12
6	5	0	0	16
8	5	0	0	18
10	0	1	0	2
12	1	0	1	13
14	3	0	1	19
16	5	0	1	25
18	5	0	1	25
20	0	2	0	4
22	0	0	2	20
24	2	0	2	26
26	4	0	2	32
28	5	0	2	36
30	0	3	0	6
32	0	1	2	22
34	1	0	3	33
36	3	0	3	39
38	5	0	3	45
40	0	4	0	8
42	0	2	2	24
44	0	0	4	40
46	2	0	4	46
48	4	0	4	52
50	5	0	4	55
52	0	3	2	26
54	0	1	4	42
56	2	1	4	48
58	4	1	4	54
60	5	1	4	57
62	0	4	2	28
64	0	2	4	44
66	2	2	4	50
68	4	2	4	56
70	5	2	4	59
72	5	2	4	60
74	0	3	4	46
76	2	3	4	52
78	4	3	4	58
80	5	3	4	61
82	5	3	4	62
84	0	4	4	48
86	2	4	4	54
88	4	4	4	60
90	5	4	4	63
92	5	4	4	63
94	5	4	4	63



Мал. 4.

Побудова залежності значення цільової функції від затрат допоможе прийняти рішення про виділення ресурсів для реалізації відповідного проекту. Таке рішення приймає особа, що приймає рішення (ОПР). Експериментальне дослідження за допомогою Exel-технології [2] виду залежності корисності від затрат висвітлює особливості такого процесу, а саме: зі зміною затрат с змінюється тільки одна змінна із .x_1, x_2, …, x_n від мінімального її значення до верхнього допустимого значення, а потім змінюється інша і т.д. Особливістю залежності корисності від затрат є те, що така функціональна залежність має тенденцію до зменшення швидкості зростання значень функції цінності при зростанні затрат.

По суті нами розроблена технологія дослідження залежності корисності від затрат з використанням моделей математичного програмування [2], зокрема – цілочисельного, за допомогою комп'ютерного експерименту.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кушнір Г.А., Кушнір В.А. Визначення виду функціональної залежності корисності від затрат на певні проекти шляхом машинного експерименту //Наукові записки. – Випуск 66. – Серія: Математичні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2007. – С. 53 – 58.
2. Мур Д., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Exel. – М.: Изд. Дом Вильямс, 2004. – 1024 с.