

УДК517

ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА МЕТОДОМ ШТУРМА

О.П. Макарчук

Доводиться нерівність Єнсена методом Штурма.

The inequality of Ensen are proved by methods of Shturm.

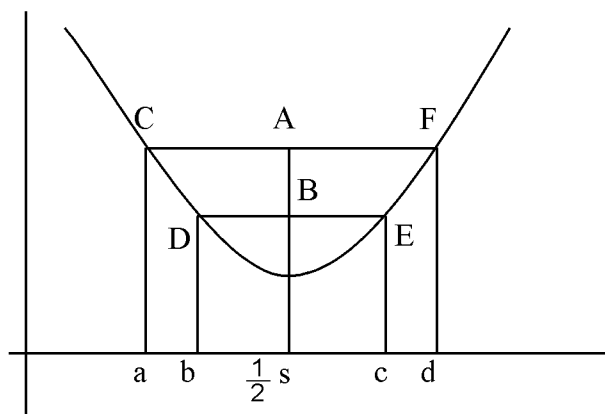
Для опуклої вниз функції $f(x)$ і дійсних чисел x_1, x_2, \dots, x_n доведемо нерівність Єнсена:

$$1/n(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n))\geq f(1/n(x_1+x_2+\dots+x_n)) \quad (1)$$

Спочатку доведемо лему:

Лема. Для чисел $a \leq b \leq c \leq d$, що задовольняють рівність: $a+d=b+c=S$, виконується нерівність: $f(a)+f(d) \geq f(b)+f(c)$.

Доведення. Фактично це означає, що при зближенні чисел x і y при їх сталій сумі вираз $f(x)+f(y)$ не збільшується. Ця нерівність має досить наглядне геометричне ілюстрування.



На малюнку зображені точки $C(a, f(a))$, $D(b, f(b))$, $E(c, f(c))$, $F(d, f(d))$ і середини A та B відрізків CF і DE відповідно. Точка не виходить за межі “чаші” $CDEF$, тому ордината точки A не менша за ординату точки B , тобто $\frac{1}{2}(f(a)+f(d)) \geq \frac{1}{2}(f(b)+f(c))$, або $f(a)+f(d) \geq f(b)+f(c)$, що і потрібно було довести.

Однак звісно для більшої чіткості потрібні алгебраїчні міркування, які ґрунтуються на означенні опуклості.

Зрозуміло, що знайдеться $\lambda \in [0, 1]$ таке, що $b = \lambda a + (1-\lambda)d$, тоді $c = a + d - b = a + d - \lambda a - (1-\lambda)d = (1-\lambda)a + \lambda d$. Враховуючи опуклість функції $f(x)$, маємо: $f(b) + f(c) = f(\lambda a + (1-\lambda)d) + f((1-\lambda)a + \lambda d) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(d) + (1-\lambda)f(a) + \lambda f(d) = f(a) + f(d)$.

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення нерівності (1). Позначимо середнє арифметичне чисел x_1, x_2, \dots, x_n через A . Якщо не всі дані числа рівні між собою, то найменше з них менше A , а найбільше - більше A . Нехай, скажімо, $x_1 < A$, $x_2 > A$. Замінивши x_1 на A , а x_2 на $x_1 + x_2 - A$, ми зберігши суму цих чисел зблизимо їх. При чому середнє арифметичне A не зміниться, а ліва частина нерівності (1) за лемою не збільшиться. Якщо в новому наборі чисел є нерівні, то виконуємо ту саму операцію. Так як на кожному кроці збільшується кількість чисел, рівних A , через скінченне число кроків всі числа стануть рівними і ми прийдемо до набору, для якого ліва і права

частина нерівності (1) рівні. Так як при цьому на кожному кроці ліва частина нерівності не зростала, а права залишилась незмінною, то нерівність (1) правильна.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Наука, 1965. – 342 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Наука, 1965. – 347 с.
3. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967. – 252 с.
4. Болтянский В. Г. Ялгом И. М. Геометрические задачи на максимум и минимум. – В кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. V. – М.: Наука, 1966. – 421 с.
5. Вортянський П. Е. Методи мінімізації функцій. // У світі математики. Том 5, вип.. 3, 1983. – с. 22–27

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 20 березня 2006 р.